



Title	自由縁と平行な半無限き裂の熱応力拡大係数
Author(s)	本村, 文孝; 今井, 康文; 才本, 明秀
Citation	長崎大学工学部研究報告 Vol.26(47) p. 117-121, 1996
Issue Date	1996-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10069/14970">http://hdl.handle.net/10069/14970</a>
Right	

This document is downloaded at: 2018-03-23T16:49:21Z

## 自由縁と平行な半無限き裂の熱応力拡大係数

本村文孝\*・今井康文\*  
才本明秀\*Thermal Stress Intensity Factor for a Semi-infinite  
Crack Parallel to a Straight Edge

by

Fumitaka MOTOMURA\*, Yasufumi IMAI\*  
and Akihide SAIMOTO\*

A time-dependent thermal stress field in a semi-infinite plane having a semi-infinite crack parallel to the edge of the plate was analyzed when the vicinity of the crack tip was locally heated. The straight boundary of the semi-infinite plate were assumed to be kept at zero temperature or thermally insulated.

The thermal stress field was analyzed after each stepwise time advance by the Body Force Method. It was found that a mixed mode deformation occurs at the crack tip independently of the heating time and the stress intensities of mode I and II vary with the heating location. Moreover, the increase of heat dissipation from the plate surfaces may be effective for the decrease of  $K_{II}$ .

## 1. 緒言

ガラスなどのぜい性材料を局所的に加熱すると熱応力によりき裂が進展する。材料がき裂面に対して対称となる割断、及び自由縁の影響を無視できるような広い板の中央部付近では任意形状の割断が可能である。

しかし自由縁の影響を受ける領域では、例えば加熱点をき裂の延長線上におき、直線自由縁と平行移動させる場合でさえ、き裂は加熱点の軌跡を追従せず一般に湾曲した割断面しか得られない。これはき裂先端に構成される混合モード応力状態に起因するが、これまで境界の影響を考慮したこの種の解析はあまりされていない。最近、薄板を縁近傍で割断するときに縁を冷却すると、冷却しない場合に比べて比較的直線的な割断面が得られたという報告がある。これは板の自由縁の熱的条件が熱応力拡大係数に影響を及ぼすことを示唆している。そこで、本研究では、応力自由な直線自由縁を有する半無限板内の予き裂先端近傍を非定常点加熱する場合に、縁の熱的条件として縁の温度勾配が

零の断熱縁と縁の温度を零度に保つ等温縁の極端な2種類を比較した。これらの縁の熱的条件の違いが及ぼす熱応力拡大係数への影響を解析し、加熱時間、加熱位置および対流熱伝達とともに検討した。

## 主要記号

$\lambda$	熱伝導率
$a$	熱拡散率
$\alpha$	線膨張係数
$E$	縦弾性係数
$b$	板厚
$h$	板表面と外気との相対熱伝達係数
$q$	単位時間当たりの持続熱量
$T$	温度上昇
$P(x_0, y_0)$	注目点座標
$Q(x, y)$	加熱点座標
$S(s, 0)$	X軸上の点
$L$	自由縁からき裂線までの距離
$D$	加熱点からき裂先端までの距離

平成8年4月26日受理

\*機械システム工学科 (Department of Mechanical Systems Engineering)

C	き裂の半長
G	自由縁から加熱点までの距離
$P_x$	X 軸方向の合力
$P_y$	Y 軸方向の合力
$i$	虚数単位
$\gamma_I, \gamma_{II}$	体積力密度
上付添字	
(a)	断熱縁
(b)	等温縁
I	引張型
II	面内せん断型

## 2. 解析方法

2.1 縁の熱的条件の導出 始めに、板表面からの放熱を考慮して無限板に作用する孤立点熱源による非定常熱弾性場<sup>1)</sup>を考える。 $q$ の熱量が無限板内の点 $Q(x, y)$ に作用するときの点 $P(x_0, y_0)$ における時刻 $t$ での $T, \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ は次式で与えられる。

$$T(P, Q) = \frac{q}{4\pi\lambda} S_{-1}(P, Q) \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_x(P, Q) = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \frac{Y_1^2}{R^2} \left[ Z(P, Q) - \frac{2a}{Y_1} L(P, Q) \right] \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_y(P, Q) = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \frac{X_1^2}{R^2} \left[ Z(P, Q) - \frac{2a}{X_1} L(P, Q) \right] \quad (3)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(P, Q) = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \frac{X_1 \cdot Y_1}{R^2} \cdot Z(P, Q) \quad (4)$$

$$Z(P, Q) = S_{-1}(P, Q) + \frac{4a}{R^2} L(P, Q) \quad (5)$$

$$L(P, Q) = S_0(P, Q) - \frac{b}{2ah} (1 - e^{-\frac{2ah}{b}}) \quad (6)$$

$$S_m(P, Q) = \int_0^t (t-\tau)^m e^{-\frac{2ah(t-\tau)}{b}} - \frac{R^2}{4a(t-\tau)} d\tau \quad (7)$$

$$X_1 = x_0 - x, \quad Y_1 = y_0 - y, \quad R^2 = X_1^2 + Y_1^2 \quad (8)$$

半無限板中にある点熱源による非定常熱弾性場は、無限板中にある点熱源による非定常熱弾性場の重ね合わせによって得られる。Fig. 1のようにX軸を直線自由縁とするような半無限板において、縁近傍に持続点熱源があるときの非定常熱弾性場はX軸に関する鏡像の原理<sup>2)</sup>を利用して解くことができる。この際、概念的に仮想領域（実際の解析領域に対する負のY領域）を考えると、鏡像点に配置する熱源の正負によって、X軸上の熱的条件を表現できる。つまり、正の熱源に対して正の熱源をおいた場合には温度勾配零の断熱境界が、また正の熱源に対して負の熱源をおい

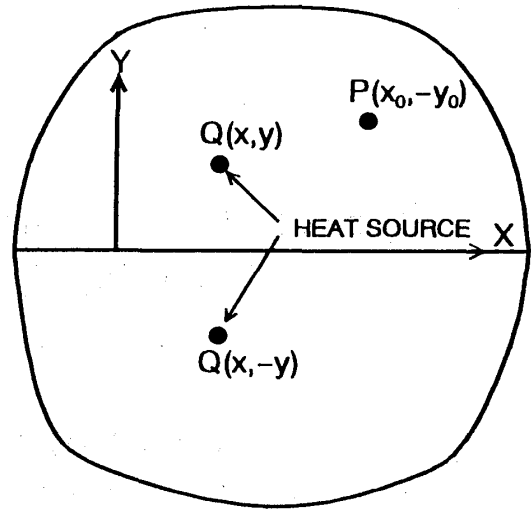


Fig. 1 Analysis of the temperature field

た場合には温度零度の等温境界が得られる。

ただし、Fig. 2のように断熱自由縁には垂直応力 $\sigma_y^Q(x, 0)$ 、等温自由縁にはせん断応力 $\tau_{xy}^Q(x, 0)$ が生じる。これら自由縁に残っている表面力はMelanの解<sup>3)</sup>を分布させて消去する。Melanの解を用いれば、半無限板内の応力は次式で表される。

断熱縁の場合：

$$\sigma_y^P(s, 0) = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{((x_0-s)^2 + y^2)^2} \quad (9)$$

$$\sigma_y^{(a)}(P, S) = -\frac{2y_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y^P(s, 0)}{((x_0-s)^2 + y_0^2)^2} ds \quad (10)$$

$$\tau_{xy}^{(a)}(P, S) = -\frac{2y_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y^P(s, 0) \cdot (x_0-s)}{((x_0-s)^2 + y_0^2)^2} ds \quad (11)$$

等温縁の場合：

$$\tau_{xy}^Q(s, 0) = -\frac{2Q}{\pi} \frac{(x_0-s)^2 y}{((x_0-s)^2 + y^2)^2} \quad (12)$$

$$\sigma_y^{(b)}(P, S) = -\frac{2y_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{xy}^Q(s, 0) \cdot (x_0-s)}{((x_0-s)^2 + y_0^2)^2} ds \quad (13)$$

$$\tau_{xy}^{(b)}(P, S) = -\frac{2y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{xy}^Q(s, 0) \cdot (x_0-s)^2}{((x_0-s)^2 + y_0^2)^2} ds \quad (14)$$

よって、熱源 $Q(x, y)$ 、 $Q'(x, -y)$ から直接及ぼされる応力成分と打ち消すべき表面力による応力成分の重ね合わせにより、半無限板中の任意の点 $P(x_0, y_0)$ に生じる応力 $\sigma_y, \tau_{xy}$ は次のように表せる。

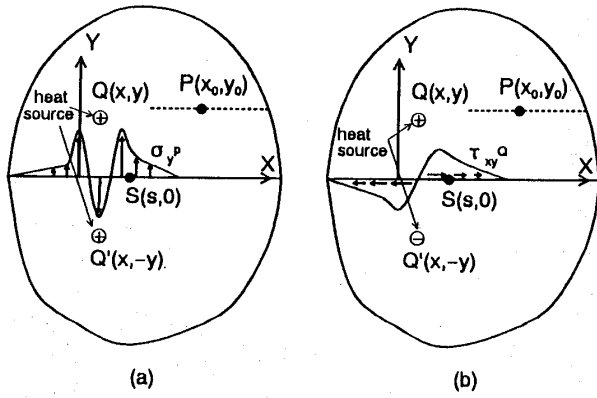


Fig. 2 Method for the stress analysis

断熱縁の場合：

$$\sigma_y = \bar{\sigma}_y(P, Q) + \bar{\sigma}_y(P, Q') + \sigma_y^{(a)}(P, S) \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy}(P, Q) + \bar{\tau}_{xy}(P, Q') + \tau_{xy}^{(a)}(P, S) \quad (16)$$

等温縁の場合：

$$\sigma_y = \bar{\sigma}_y(P, Q) - \bar{\sigma}_y(P, Q') + \sigma_y^{(b)}(P, S) \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy}(P, Q) - \bar{\tau}_{xy}(P, Q') + \tau_{xy}^{(b)}(P, S) \quad (18)$$

2.2 き裂で解放される応力 持続点熱源によってき裂相当位置に生じる応力が求めた。Fig. 3, Fig. 4にそれぞれ、断熱縁および等温縁の場合について、加熱源を原点とし縁と平行にX軸をとった時のX軸上の応力分布を示す。縁の条件に関わらず、 $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ は熱源近傍で正のピークをむかえ、一旦負になった後、無限遠方で負値からゼロに収束する。また加熱時間が長くなると、断熱縁の応力分布は等温縁に比べ、熱源近くに大きな負のせん断応力が現れている。

次に、き裂面で、Fig. 3やFig. 4で表される応力のどの範囲を解放するかを考える。一般に、き裂面は引張応力は担えないが、圧縮応力は面の接触により担うことができる。また、面接触をすれば、摩擦によりせん断応力もある程度担うことが可能である。今の場合、加熱源から離れると $\sigma_y$ はわずかではあるが圧縮になっているので、ここの応力は解放されないと予想される。厳密な解析もできるが、ここでは近似的に、 $\sigma_y$ が正となる範囲の $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ がき裂によって解放されたと考えた。すなわちFig. 5のようにき裂長さを有限値とし、 $\sigma_y$ が正となる範囲とした。

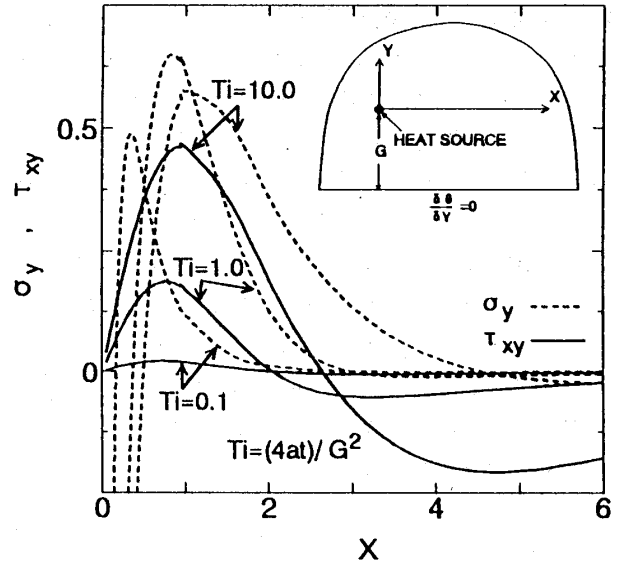


Fig. 3 Stress appeared on an insulated edge

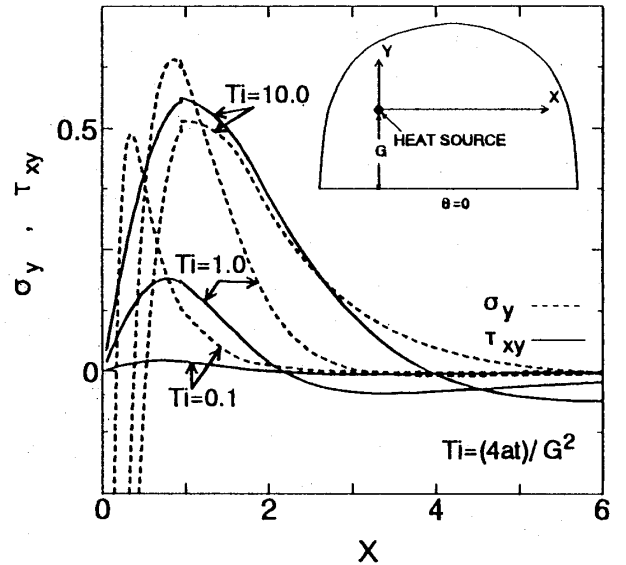


Fig. 4 Stress appeared on a zero-kept edge

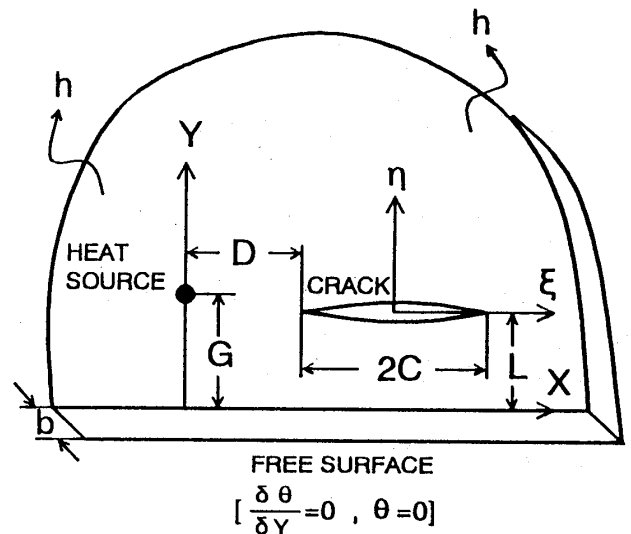


Fig. 5 Finite crack in a semi-infinite plate

2.3 半無限板のき裂の応力場 解析には体積力法<sup>4)</sup>を用いた。き裂の問題は体積力対を求める問題に置き換えられる。力対には対称な相対変位に対応する引張型と逆対称な相対変位に対応するせん断型があり、それらは集中力を表す応力場をき裂方向及びその垂直方向に微分して、組み合わせることで得られる。本法では、半無限板内の力対による応力場を用いることで、 $X$ 軸上の力学的境界条件が乱されないよう考慮した。ただし、ポアソン比は零とし、き裂先端の応力場の特殊性に適合させるため、体積力対密度 $\gamma_I, \gamma_{II}$ は有限き裂のき裂先端での特殊性を考慮した基本密度関数と重み関数の積で次のように表した。

$$\gamma_I(z) = (4\sqrt{\xi^2 - C^2}) W_I(\xi) \quad (19)$$

$$\gamma_{II}(z) = (2\sqrt{\xi^2 - C^2}) W_{II}(\xi) \quad (20)$$

$W_I, W_{II}$ は未知なる重み関数である。

本解析では選点法を用いた。仮想境界を $M$ 等分すると、合計 $2(M+1)$ 個の未知数があり、各分割中点を結んで作られる区間における合力が零となる条件からこれらを決定した。なお、重み関数は一次関数的に変化するものとし、着区間 $[\xi_1, \xi_2]$ に作用する引張型、及びせん断型の体積力対によって、注目区間 $[z_A, z_B]$ に生じる合力は、次のように閉じた形の結果を用いた。

$$-2\pi[P_y^I + iP_x^I] = [G_1 + 2iL \cdot G_2] W_I(\xi) \Big|_{z=z_A}^{z=z_B} \quad (21)$$

$$-2\pi[P_y^{II} - iP_x^{II}] = [G_1 - 2iL \cdot G_2] W_{II}(\xi) \Big|_{z=z_A}^{z=z_B} \quad (22)$$

$$G_1 = \text{Re}[I_1(z_2) - I_1(z_1)] - 8L^2 \cdot I_3(z_2) \quad (23)$$

$$G_2 = I_2(z_2) - I_2(\bar{z}_1) \quad (24)$$

$$I_k(z_j) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\xi^2 - C^2}}{(z_j - \xi)^k} d\xi \quad (j=1, 2, k=1, 2, 3) \quad (25)$$

$$z_1 = z - D - iL, \quad z_2 = z - D + iL \quad (26)$$

また、体積力対の密度はき裂上下縁の相対変位量に直接対応している。特に、き裂の応力拡大係数は先端での重みのみで決まり、次のように表せる。

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi C} (W_I(-C) - iW_{II}(-C)) \quad (27)$$

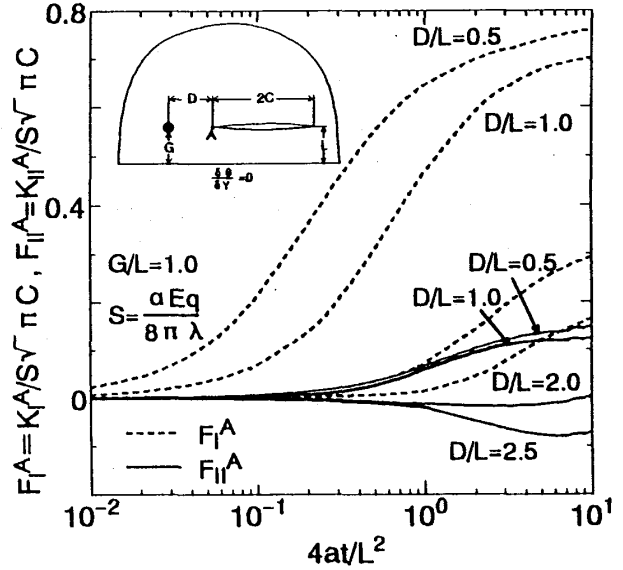


Fig. 6 Effect of  $D/L$  on SIF

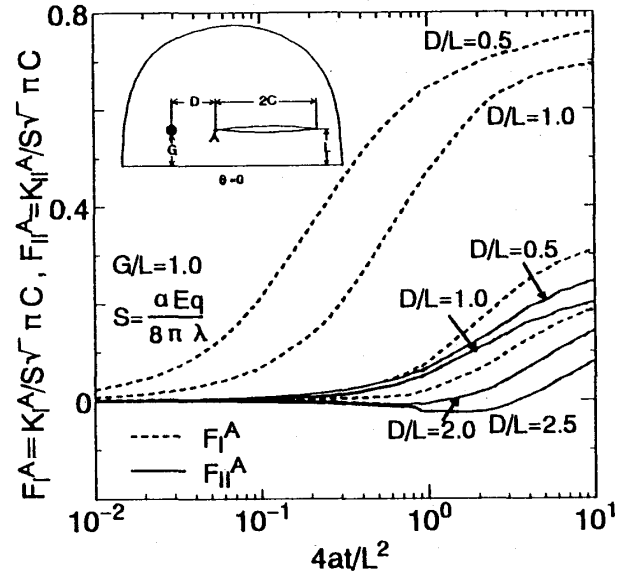


Fig. 7 Effect of  $D/L$  on SIF

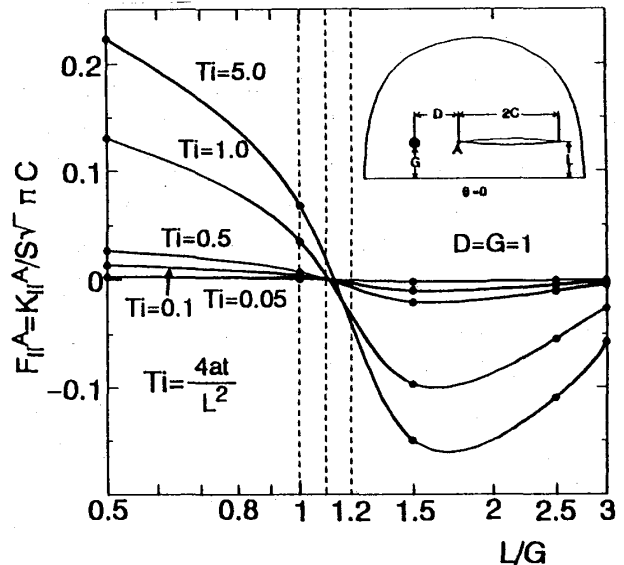


Fig. 8 Effect of  $L/G$  on SIF

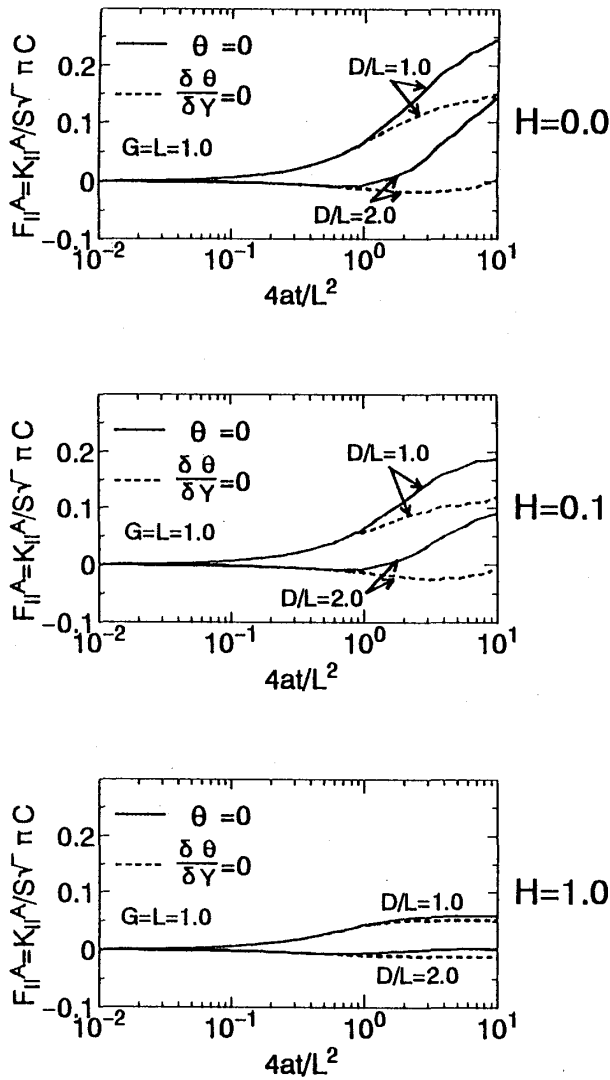


Fig. 9 Effect of heat dissipation from the surfaces of the plate

3. 解析結果

Fig. 6, Fig. 7は各々断熱縁, 等温縁について,  $G/L = 1$ で,  $D/L$ を変化させたときの応力拡大係数の時間的变化を示している。 $K_I$ は時間と共に増加しており, 縁の条件によって大差はない。しかし,  $K_{II}$ は,  $D/L$ が小さいと正の値が現れ,  $D/L$ が大きいと負の値が現れる。また, 等温縁の方が照射時間が長くなると, 速やかに正值に変化していく。 $K_{II}$ が正とな

ると, 加熱点に近い側のき裂先端が縁と反対方向に進みやすい。

Fig. 8は等温縁について,  $D=G=1$ で, 種々の加熱時間における加熱位置に対する $K_{II}$ の変化を示している。これより,  $D=G=1$ のとき,  $L/G=1.0$ から $L/G=1.2$ の間に,  $K_{II} = 0$ となる時間が集中しているので, この範囲にき裂が直進する値があると予想される。すなわち, き裂線延長よりも自由縁側を加熱すればき裂が直進することになり, 現実とは逆の結果となった。解析条件として, き裂の応力解放範囲を有限値としたため応力解放が不十分であったこと, また無限板中のき裂線延長線上を加熱するのと異なり, き裂線上に熱流束が現れるが, この熱流束を打ち消していなかったことが理由として考えられる。

Fig. 9は板表面からの対流熱伝達(係数 $h$ )を考慮し,  $H = \frac{2ah}{b} = 0.0, 0.1, 1.0$ で各熱的条件について,  $K_{II}$ の時間的变化を表したものである。 $H$ を大きくすると, 縁の条件によらず, かなりの加熱時間後も $K_{II}$ の値は増加を抑制されている。また,  $K_I$ は $H$ の増加に伴いピーク値が低くなる。これよりき裂が進展するだけの $K_I$ が与えられるのであれば,  $H$ を大きくするとき裂は直進するのではないかと考えられる。

4. 結 言

点熱源を有する半無限板において, 断熱縁および等温縁の熱的条件が応力拡大係数に及ぼす影響を比較した。その際,  $K_I$ に関しては若干断熱縁が大きい程度であった。 $K_{II}$ に関しては, き裂と熱源の距離が長いと, 断熱縁の方が大きな負の $K_{II}$ が現れた。これはき裂面の $\tau_{xy}$ の応力解放が不十分であったためと考えられる。また, 対流熱伝達係数が大きくなると, 縁の条件に関わらず,  $K_{II}$ は小さくなった。

参 考 文 献

- 1) 今井, 他3名, 機論, 55-509, (1989), 147.
- 2) 森口, 二次元弾性論, (1957), 岩波書店, P70.
- 3) 村上, 弾性力学, (1985), 養賢堂, P64.
- 4) 西谷・陳, 体積力法(重ね合わせの原理に基づく数値解析), (1988), 培風館