



Title	SEMIGROUP における CONGRUENCE (by Mario· Petrich) についての考察(1)
Author(s)	江口, 俊男
Citation	長崎大学教養部紀要. 自然科学. 1968, 8, p.5-8
Issue Date	1968-02-29
URL	http://hdl.handle.net/10069/16448
Right	

This document is downloaded at: 2020-09-27T01:49:06Z

SEMIGROUP における CONGRUENCE

(by Mario • Petrich) についての考察 (1)

江 口 俊 男

(昭和42年9月30日受理)

ON THE CONGRUENCES (by Mario Petrich) OF SEMIGROUPS (1)

By

Toshio Eguchi

semigroup の ideal extension については, Clifford, Yoshida によって研究されているが, また, Mario, Petrich によって, semigroup における congruence についての結果が報告されている。ここでは, V を semigroup, S を V の ideal, T を V/S に isomorphic な semigroup, $V \ni \nu, S \ni \sigma, T \ni \tau$ に対して, $\nu|_S$ が weakly reductive であるような V の congruence ν について考察する。

1. V を 0 をもつ semigroup T による semigroup S の拡大とする。 $\sigma \in C(S)$, P を T のイデアルで, 任意の $A \in P^*$ に対して, 次のような $a \in S$ が存在するとする。

(1) $Ax\sigma ax, xA\sigma xa$ ($x \in S$)

若し A と a が条件(1)を満足するならば, それらを, “ σ -link” と呼ぶ。 $\tau \in C(T/P)$ で O -restrict で且つ,

(2) $Ax\sigma By, xA\sigma yB$ もし $A\tau B, x\sigma y$ ならば。 ($A, B \in T \setminus P, x, y \in S$)

V における関係 ν を次のように定義する。

$A, B \in T \setminus P : A\nu B \Leftrightarrow A\tau B;$

$A, B \in P^* : A\nu B \Leftrightarrow A, B$ に対して σ -link な, 即ち, $a\sigma b$ なる $a, b \in S$ が存在する。

$A \in P^*, b \in S : A\nu b \Leftrightarrow b\nu A \Leftrightarrow A$ σ -link なる, 即ち, $a\sigma b$ なる S の元 a が存在 : $a\nu b \Leftrightarrow a\sigma b$.

かくる ν を, $\nu = (\sigma, P, \tau)$ とかく。

補題 1,

V における congruence は (σ, P, τ) の形である。

証明

$\mu \in C(V); P = \{A \in T^* \mid A\mu a, a \in S\} \cup O.$

このとき P は T のイデアルである。 $\sigma = \mu \mid s$ とし、 T/P における τ を

$$A\tau B \Leftrightarrow A\mu B \quad (A, B \in T/P); \text{Or } O.$$

で定義する。明らかに、 $\sigma \in C(S), \tau \in C(T/P)$ で、 O -restrict で、 (1), (2) が成り立ち、 $\mu = (\sigma, P, \tau)$ である。

定理 1,

σ が S に於て、 weakly reductive congruence ならば、 $\nu = (\sigma, P, \tau)$ は、 $\nu \mid s$ が weakly reductive であるような、 V における equivalence である。

証明

$\nu = (\sigma, P, \tau)$, σ は weakly reductive とする。 ν が V の equivalence であることを示すためには、 $A\nu a, A\nu b$ が $a\nu b$, 即ち $a\sigma b$ を含むことをいえばよい。若し、 $A\nu a, A\nu b$ ならば (1) によって

$$axbx, xa\sigma xb \quad (x \in S),$$

を得る。 σ から $a\sigma b$ は weakly reductive である。 ν が右 congruence であることを明らかにする。左についても同様である。

第一、 $A, B \in T/P, A\nu B, C \in V$ の場合、

このときは、若し、 $AC \in T/P, BC \in T/P$ ならば τ から $A\tau B$ は O -restrict である。従って、 $AC\tau BC$, 即ち、 $AC\nu BC$ である。

$AC \in P^* \cup S$ と仮定すると $BC \in P^* \cup S$ は O -restrict である。そこで次のいくつかの場合に別ける。

a) $AC, BC \in P^*$ の場合。

このとき、 $a, b \in S$ に対して、 $AC\nu a, BC\nu b$ は

$$(3) ACx\sigma ax, BCx\sigma bx \quad (x \in S)$$

$$(4) xAC\sigma xa, xBC\sigma xb \quad (x \in S)$$

である。(2) によって $A\tau B$ は $A(Cx)\sigma B(Cx)$ を含み、(3) により $ax\sigma bx$ を含む。更に (2) によって、 $xA\sigma xB$ を、それは再び (2) によって、 $(xA)C\sigma(xB)C$ を、(4) によって $xa\sigma xb$ を含む。これはすべての $x \in S$ に対して成立し、 σ は Weakly reductive であるから、 $a\sigma b$ 従って $AC\nu BC$ をうる。

b) $AC \in S, BC \in P^*$ の場合。

このとき $A\tau B$ は任意の $x \in S$ に対して、 $xA\sigma xB$ を、(2) によって $x(AC)\sigma x(BC)$ を含む。更に、(2) によって、 $A(Cx)\sigma B(Cx)$ を含む。 $BC \in P^*$ であるから、ある $b \in S$ に対して、 $BC\nu b$ 。従ってすべての $x \in S$ に対して $x(BC)\sigma xb, (BC)x\sigma bx$ であり、

$$x(AC)\sigma xb, (AC)x\sigma bx \quad (x \in S)$$

然し、 σ は weakly reductive であるから $AC\sigma b$; かくて $AC\nu BC$ をうる。

c) $AC \in P^*, BC \in S$ と $AC, BC \in S$ は同様にして示される。

第二. $A, B \in P^*, A \nu B, C \in V$. このときは, $a \in S$ に対して $A \nu a, B \nu a$ である. (1)によって $a \in S$ に対して $A(Cx)\sigma a(Cx)$ と $x A \sigma x a$ をうる. (2)を $x A \sigma x a$ に適用して, $(x A)C \sigma (x a)C$ をうる. Aの代りにBを同様に用いて

- (5) $ACx\sigma aCx, BCx\sigma aCx \quad (x \in S)$
- (6) $xAC\sigma xaC, xBC\sigma xaC \quad (x \in S)$

更に次の場合に別けて考える。

- a) $AC, BC \in P^*$. このときは或る $b, c \in S$ に対して $AC \nu b, BC \nu c$. (5)と(6)によって, すべての $x \in S$ に対して, $bx\sigma cx$ と $xb\sigma xc$ をそれぞれ得ることができる. 然し, $b\sigma c$ ($AC \nu BC$) である.
- b) $AC \in S, BC \in P^*$. このときある $b \in S$ に対して $BC \nu b$. (5)と(6)によって, すべての $x \in S$ に対して, $ACx\sigma bx$ と $xAC\sigma xb$ をうる. 然し, $AC\sigma b$ ($AC \nu BC$) である.
- c) $AC \in P^*, BC \in S$ と $AC, BC \in S$ の場合は同様に考えられる.

その他の場合のすべての証明は, 上と同様にして得られる. かくて $\nu \in C(V)$. $\nu|_S = \sigma$ から, $\nu|_S$ は weakly reductive である.

系 1

σ が weakly reductive であるとき, μ が (σ, P, τ) の形であるような μ は, V における congruence である.

系 2

S におけるすべての congruence が weakly reductive であるとき, V におけるすべての congruence の集合は, (σ, P, τ) の形の関係の集合と一致する.

系 2 の S の条件が満足されるとき, S の各元は左または右 identity をもつ. この場合, 任意の $\sigma \in C(S)$ に対して, S/σ は同じ性質をもち, S/σ は weakly reductive である. 特に regular semigroup は系 2 の条件を満足する. いま S を, $S^2 \cong S$ なる semigroup とする. 若し σ を S における equivalence の 1 つとし, その class は S^2 を含むとする. このとき, S/σ は zero-semigroup で, σ は, σ が一般的関係でない限り weakly reductive ではない. $S^2 \cong S$ で weakly reductive 半群 S の例として, $S = \{a, b, c, d, e\}$ とおき, その乗積表が次の表で示される様な semigroup が考えられる.

若し, P が T のイデアル ($\cong 0$) で $P^* \cup S$ が S の狭義の拡張であるならば, P は (σ, P, τ) で用いられる. この場合すべての $A \in P^*$ に対して, $x \in A : Ax = ax, xA = xa$ であるような $a \in S$ が存在する. 結合が, V に於て partial homomorphism で与えられるときは, 次の結果が得られる.

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a
d	a	a	b	a	a
e	a	b	a	d	e

補題 2.

V を partial homomorphism ω で定められた T による S の拡張であるとする。
 $\omega : T^* \rightarrow S$. σ を S の weakly reductive congruence, P を T の任意のイデアルとする。
 このとき $\nu = (\sigma, P, \tau)$ が V に於ける congruence であるような $a\tau \in C(T/P)$
 が存在する。更に, σ, τ について, (2)の条件は次と同値である。

(7) $A\omega\sigma B\omega$ if $A\tau B$ ($A, B \in T \setminus P$)

証明.

前半は補題でのべた注意から得られる。いま, σ を weakly reductive とする。若し,
 (2)が成立し, 且, $A\tau B$ であるならば, すべての $x \in S$ に対して, $Ax\sigma Bx, xA\sigma xB$ で
 $(A\omega)x\tau(B\omega)x, x(A\omega)\tau x(B\omega)$ が ω の性質から導かれる。故に, $A\omega\sigma B\omega$ は weakly
 reductive で, 従って(7)が成立する。若し, (7)が成り立てば $A\tau B, x\sigma y$ は $A\omega\sigma B\omega$ を
 含み, $(A\omega)x\sigma(B\omega)y$, 従って $Ax\sigma By$ である。

系.

若し, V が S と T の orthogonal sum (即ち, $xA = Ax = O, x \in S, A \in T^*$) ならば,
 (1), (2)は任意の σ, P, τ に対して満足される。

証明.

この場合は, ω は $T^* \rightarrow O$ で示され, 従って $A\omega = B\omega = O, A, B \in T^*$ となり(2)が成立
 する。条件(1)は補題から成立する。

若し T が O でない proper ideal をもたないならば (即ち, T が O -simple か order
 -2 の 0 -半群である) P は O または T であらねばならない。従って若し, $\nu \in C(V)$ なら
 ば, S は ν 或は intersect T^* のすべての class ν によって saturat される。この場合
 には(1)と(2)はそれぞれ不要となる。

REFERENCES

MARIO. PETRICH, Congruences on Extensions of Semigroups, Duke. J. Math., Vol. 34,
 No, 2(1967), pp 215—223.