Title	或る uniformity の subbase の性質について
Author(s)	吉田, 誠一郎
Citation	長崎大学教養部紀要. 自然科学. 1968, 8, p.9-12
Issue Date	1968-02-29
URL	http://hdl.handle.net/10069/16449
Right	

或る uniformity の subbase の性質について

吉　田　誠一郎

（昭和42年9月30日受理）

実数の集合 X に一様位相を導入する為の uniform structure の uniformity の subbase の作り方は色々あるが，所謂 usual structure によるものと異なる一様位相を導入する為に用いられる uniformity の subbase の例としては，$a<b$ として作った

$$Sab = \{ (x,\ y) : \text{both } x,\ y<b \text{ or both } x,\ y>a \}$$

の族がある。この族のもつ性質について考えてみる。尚，以下に現われる区間 $(a,\ b)$，$(-\infty,\ a]$ などは，最小元，最大元を持たない稠密な全順序集合 X における区間を考えてもよい。

今 m 箇の区間 $(a_i,\ b_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ と，それぞれの内部の点 x_i を考え，

$Sa_ib_i\ [x_j] = \{y:\ (x_j,\ y) \in Sa_ib_i\}$ を S^i_j とかくと次の諸性質が成立つ。

［1］ $S^i_j \cup S^j_k \supseteqq S^i_k$ $\left(i,\ j,\ k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\right)$

証明　本質的には

(1)　$S^1_2 \cup S^2_3 \supseteqq S^1_3$ を云うことと同じである。

$$S^1_2 = Sa_1b_1\ [x_2] = \begin{cases} (-\infty,\ b_1) & (x_2 \leqq a_1) \\ X & (a_1 < x_2 < b_1) \\ (a_1,\ \infty) & (b_1 \leqq x_2) \end{cases}$$

今 S^i_j の補集合を S^{ic}_j と書くと，(1) の代りに両辺の補集合を考えて

(2)　$S^{1c}_2 \cap S^{2c}_3 \subseteqq S^{1c}_3$ を証明すればよい。

$$S^{1c}_2 = \begin{cases} \phi & (a_1 < x_2 < b_1) \\ (-\infty,\ a_1] & (b_1 \leqq x_2) \\ [b_1,\ \infty) & (x_2 \leqq a_1) \end{cases}$$

$$S^{2c}_3 = \begin{cases} \phi & (a_2 < x_3 < b_2) \\ (-\infty,\ a_2] & (b_2 \leqq x_3) \\ [b_2,\ \infty) & (x_3 \leqq a_2) \end{cases}$$

$$S_3^{1c}=\begin{cases}\phi & (a_1<x_3<b_1)\\ (-\infty,\ a_1] & (b_1\leqq x_3)\\ [b_1,\ \infty) & (x_3\leqq a_1)\end{cases}$$

(i)　$S_2^{1c}=\phi$ 又は $S_3^{2c}=\phi$ のとき (2) は成立つ。

(ii)　$\begin{cases}S_2^{1c}=(-\infty,\ a_1]\\ S_3^{2c}=(-\infty,\ a_2]\end{cases}$ のとき

$b_1\leqq x_2,\ b_2\leqq x_3$

ところが $a_2<x_2<b_2$

故に $b_1<x_3$ となり $S_3^{1c}=(-\infty,\ a_1]=S_2^{1c}$

よって (2) は成立つ。

(iii)　$\begin{cases}S_2^{1c}=[b_1,\ \infty)\\ S_3^{2c}=[b_2,\ \infty)\end{cases}$ のとき

$x_2\leqq a_1,\ x_3\leqq a_2$

ところが $a_2<x_2<b_2$

故に $x_3<a_1$ となり $S_3^{1c}=[b_1,\ \infty)=S_2^{1c}$

よって (2) は成立つ。

(iv)　$\begin{cases}S_2^{1c}=(-\infty,\ a_1]\\ S_3^{2c}=[b_2,\ \infty)\end{cases}$ のとき

$b_1\leqq x_2,\ x_3\leqq a_2$

ところが $a_2<x_2<b_2,\ a_1<b_1$ だから

$a_1<b_2$ となり $S_2^{1c}\cap S_3^{2c}=\phi$

よって (2) は成立つ。

(v)　$\begin{cases}S_2^{1c}=[b_1,\ \infty)\\ S_3^{2c}=(-\infty,\ a_2]\end{cases}$ のとき

$x_2\leqq a_1,\ b_2\leqq x_3$

ところが $a_2<x_2<b_2,\ a_1<b_1$ だから

$a_2<b_1$ となり $S_2^{1c}\cap S_3^{2c}=\phi$

よって (2) は成立つ。

即ちいずれの場合も (2) は成立つ。(終)

[2]　巡回置換 $\begin{pmatrix}p_1 & p_2\cdots p_n\\ p_2 & p_3\cdots p_1\end{pmatrix}$

$$\left(n \leqq m,\ p_i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ p_i \neq p_j\ (i \neq j)\right)$$

に対して

(3)　$S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_3} \cup \cdots \cup S^{p_n}_{p_1} = X$　が成立つ。

証明　(n についての帰納法)

明かに $S^i_i = Sa_i\,b_i\,[x_i] = X$ であるから $i=p_1$ とすると (3) は$n=1$ のとき成立つ。

$n=2$ のときは

$$S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_1} \supseteqq S^{p_1}_{p_1} = X \quad \therefore \quad S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_1} = X$$

$2 \leqq n = k < m$ のとき (3) が成立つと仮定すれば

$$S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_3} \cup \cdots \cup S^{p_{k+1}}_{p_1} = \left(S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_3} \cup \cdots \cup S^{p_{k-1}}_{p_k}\right) \cup \left(S^{p_k}_{p_{k+1}} \cup S^{p_{k+1}}_{p_1}\right)$$

$$\supseteqq \left(S^{p_1}_{p_2} \cup S^{p_2}_{p_3} \cup \cdots \cup S^{p_{k-1}}_{p_k}\right) \cup \left(S^{p_k}_{p_1}\right) = X$$

よって (3) は$n=k+1 \leqq m$ のときも成立つ。　(終)

[3]　$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \left(S^1_i \cap S^2_i \cap \cdots \cap S^m_i\right) = X$

証明　左辺は $\displaystyle\bigcap_{\substack{p_i \in \{1,2,\cdots,m\} \\ (i=1,\ 2,\ \cdots,m)}} \left(S^{p_1}_1 \cup S^{p_2}_2 \cup \cdots \cup S^{p_m}_m\right)$ となるから

(4)　$S^{p_1}_1 \cup S^{p_2}_2 \cup \cdots \cup S^{p_m}_m = X$

を云えばよい。ただしここでは $i \neq j$ のとき $p_i \neq p_j$ であるとは限らない。

若し或る i ($1 \leqq i \leqq m$) に対して $p_i = i$ が成立てば $S^{p_i}_i = X$ となり (4) は成立つ。

すべての i ($1 \leqq i \leqq m$) に対して $p_i \neq i$ のときは，$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m$ の下に$1,\ 2,\ \cdots,\ m$ を並べた

(5)　$\begin{Bmatrix} p_1 & p_2 \cdots p_m \\ 1 & 2 \cdots m \end{Bmatrix}$

は一般には置換ではない。しかしこの中から巡回置換を取り出すことができる。

それには下段の 1 から始めて矢印の順に並べ変えて行くと $\left\{\begin{array}{ccccccccc} p_1 & & p_{q_1} & & p_{q_2} & & p_{q_3} & & \cdots \\ \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \\ 1 & & q_1 & & q_2 & & q_3 & & \cdots \end{array}\right\}$

ただし $q_1=p_1,\ q_2=p_{q_1},\ q_3=p_{q_3}\cdots$ となるように選んで行く。書き改めると

$\left\{\begin{array}{ccccccccc} q_1 & & q_2 & & q_3 & & q_4 & & \cdots \\ \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \\ 1 & & q_1 & & q_2 & & q_3 & & \cdots \end{array}\right\}$ の形になる。

ところが $q_1,\ q_2,\ q_3\cdots$ は皆 m 以下の自然数であるから，いつかは同じものが再び現われ

る。始めて一致した二つのものを $q_k = q_{k+r}$ ($1 \leqq k < k+r \leqq m$) とすれば

(5) の中に置換 $\begin{pmatrix} q_{k+1} & q_{k+2} & \cdots & q_{k+r} \\ q_k & q_{k+1} & \cdots & q_{k+r-1} \end{pmatrix}$

が含まれる。 q_{k+r} を q_k と改め左右の順序を逆に改めると $\begin{pmatrix} q_k & q_{k+r-1} & \cdots & q_{k+2} & q_{k+1} \\ q_{k+r-1} & q_{k+r-2} & \cdots & q_{k+1} & q_k \end{pmatrix}$
となり巡回置換になる。

$$\therefore \quad S_1^{p_1} \cup S_2^{p_2} \cup \cdots \cup S_m^{p_m} \supseteqq S_{q_{k+r-1}}^{q_k} \cup S_{q_{k+r-2}}^{q_{k+r-1}} \cup \cdots \cup S_{q_k}^{q_{k+1}} = X$$

故に (4) は成立つ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

文　献

C. Kuratowski : Topologie I

J. Kelley : General topology

Steven A. Gaal : Point set topology