



|            |   |
|------------|---|
| Title      | 内部重力波のエネルギー伝播について   |
| Author(s)  | 松島, 晟   |
| Citation   | 長崎大学教養部紀要. 自然科学. 1968, 8, p.20-31   |
| Issue Date | 1968-02-29  |
| URL        | <a href="http://hdl.handle.net/10069/16451">http://hdl.handle.net/10069/16451</a> |
| Right      |   |

This document is downloaded at: 2020-09-27T00:30:32Z

## 内部重力波のエネルギー伝播について

松 島 晟

(昭和42年9月21日受理)

## The Energy Propagations of Internal Gravity Waves

A. MATSUSHIMA

## Abstract

The formula generally describing the propagations of internal gravity waves in the whole range of wave lengths in the isothermal atmosphere, is obtained.

Moreover, it is found that the wave lengths which have as yet been dealt with as continuous values in the short wave-range have discrete values in the other wave-range considering the rotation and the curvature of the earth, and the equivalent depth which has hardly been known about the physical meaning of its negative value, is a parameter showing the modes of atmospheric oscillations.

The validity that vertical co-ordinates in the basic equations have been approximated by the radius of the earth from the beginning, is also studied.

## 記 号 表

- $t, T, t'$  : 大気の温度か, 時間, 基本状態の大気温度, じょう乱による温度変化  
 $p, P, p'$  : 気圧, 基本状態の気圧, じょう乱による気変圧化  
 $q, Q, q'$  : 大気密度, 基本状態の大気密度, じょう乱による密度変化  
 $\lambda, \theta, r$  : 経度, 余緯度, 動径座標  
 $u, v, w$  : 北風, 西風, 上昇風  
 $x, \beta$  : 風速の発散, 波の振動数  
 $k\lambda, k\theta, kh$  : 経度方向の角波数, 余緯度方向の角波数, 水平方向の角波数, または, 固有値  
 $y(r), \psi(\theta)$  : 垂直方向の解, 水平方向の解  
 $R, \tau$  : 空気の気体定数, 定圧比熱 $C_p$ と定積比熱 $C_v$ の比  
 $g, \omega, a$  : 重力の加速度, 地球の自転の角速度, 地球の半径  
 $C, H$  : 音速 ( $=\tau RT, =RT/g$ )

## I 緒 論

大気中における内部重力波のエネルギー伝播については、潮汐のような極めて長周期で長い波長のもと、*acoustic gravity waves* のような極めて短周期で短波長領域について、別々に調べられているが、これら中間領域について未知のものが多い (Weeks and Wilkes, 1947 ; Hines, 1960.)。潮汐では地球の自転と曲率を考慮に入れ、垂直方向には静力学近似を用いているが、Hines が扱ったような短波長の領域では、静力学的近似は最早成立たなく、しかも、地球の自転および曲率を無視して取扱うことができる。しかし、これらの中間領域では、これらの仮定がいずれも成立たなくなるところであろう。垂直加速度、地球の自転および曲率が無視できない領域の内部重力波の伝播に関する基本式を求めるために、線型理論の範囲で取扱い、統一的な垂直伝播の式を導いた。さらに、これまで一様大気の深さとみなされていた変数分離の定数に対して、負の値がみつかり、その物理的な性質が問題になった (Silberman, 1953 ; sawada and Matsushima, 1964)。そこで、この定数の物理的性質を調べ、それらが振動の *mode* を表わす一つのパラメーターであることがわかった。さらに、短波長領域で任意に、連続的に変化させていた波長については、本来、固有値問題で、短波長以外では最早連続的な値は取り得なく、不連続値になること、したがって、その固有関数も最早三角関数でなく、複雑な関数形となることがわかった。また、Yanōwitch が指摘した  $r$  を地球半径  $a$  で近似する妥当性についても調べ、地上200kmまでの高さでは、波の垂直播性を議論するかぎり、この近似は成立つことが判明した (Yanōwitch, 1963)。

## II 大気の基本状態、方程式系と境界条件

じょう乱のない大気は、静止し、等温で、さらに粘性の影響はさしあたり無視する。そのほか、地球は円形とみなす。

方程式系は、運動方程式、連続の式、熱力の式および状態方程式が用いられる。この方程式系が閉じていることは、未知数が風速  $\vec{v}$  ( $u, v, w$ )、密度  $q$ 、温度  $T$ 、圧力  $p$ 、より自明である。

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{q} \text{grad } p + \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{Dq}{Dt} + q \text{div } \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$Cv \frac{DT}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{q} \right) = \delta \quad (3)$$

$$P = qRT \quad (4)$$

ただし、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{r \partial \theta} + v \cdot \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \lambda} + w \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

座標のとり方は、原点を地球の中心にし、 $\theta$  方向を南方に、 $\lambda$  方向を東方に、 $r$  軸を鉛直上方にとる。 $u$ ,  $v$ ,  $w$  はそれぞれ  $\theta$  方向、 $\lambda$  方向、 $r$  方向の風速成分であり、 $\delta$  は単位質量に与えられる熱量である。しかし、ここでは、ある任意の層における波のエネルギーの垂直伝播を議論するので、さしあたり断熱変化を仮定する。

境界条件として、北極または南極で、解は収束すべきであるという条件を用いる。

### Ⅲ 方程式の線型化と変形

大気の温度、圧力、密度を次のように表示する。

$$t = T + t', \quad q = Q + q', \quad p = P + p' \quad (5)$$

ここで、大文字の量は大気の基本状態を示し dash のついた小文字は、波によるじょう乱を示す。ここで温度と時間について同じ文字を用いたが、物理的性質より当然判別できるので、混乱のおそれはないと思う。

(5)式を(1)式から(4)式までに代入し、さしあたり $\vec{\omega}$ の水平成分のついた項を無視すれば次式のようになる。次式では最早 dash を省略して書いてある。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega \cos\theta \cdot v = -\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega \cos\theta \cdot u = -\frac{1}{Q} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (7)$$

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial t} + g \frac{q}{Q} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -w \frac{\partial Q}{\partial r} - QX \quad (9)$$

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - gw + C^2 X = 0 \quad (10)$$

$$X \equiv \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(u \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w)}{\partial r} \quad (11)$$

$\alpha$  は垂直加速度を考慮するパラメーターで、 $\alpha \equiv 0$ の時は静力学的近似を示し、 $\alpha \equiv 1$ の時は、垂直加速度の効果をとり入れることを意味する。かって、潮汐理論では(6), (7), (11)式において  $r$  を  $a$  で近似していた (sawada, 1954, 1955)。この論文では上述の近似は用いないで、波の垂直伝播の場合について、この近似の妥当性を吟味する。波の現象について調べているので、次のような解の形を想定する。

$$u, v, w, p, q, x \propto e^{i(\beta t + k_\lambda \lambda)} \quad (12)$$

(12)式を(6)から(11)式に代入して計算すると、結局次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \left( -\frac{2}{r} + \frac{gr}{C^2} \right) \cdot \frac{\partial S}{\partial r} + \left\{ \frac{\beta\alpha}{C^2} - \frac{2(r-1)}{rC^2} \right\} \cdot S + \left\{ \beta^2\alpha - \frac{(r-1)g^2}{C^2} \right\} \cdot \frac{1}{4\omega^2 r^2} \cdot \bar{F}(\theta) S = 0 \quad (13)$$

ただし、 $S$  および演算子 $\bar{F}(\theta)$ は次式で示される。

$$S \equiv p/P \quad (14)$$

$$\frac{\bar{F}(\theta)}{4\omega^2} \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\sin\theta}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{2\omega k_\lambda}{\beta} \cdot \frac{(\beta^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta)}{(\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2\theta)} - \frac{k_\lambda^2}{\sin\theta \cdot (\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2\theta)} \quad (15)$$

(13)式を変数分離し、垂直方向の方程式を標準形になおすと：

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + k_r^2(r)y = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\bar{F}(\theta)}{4\omega^2} \psi(\theta) = -\frac{k_h^2}{\beta^2} \psi(\theta) \quad (17)$$

$$S \equiv \frac{y(r)\psi(\theta)}{rQ^{1/2}} \quad (18)$$

ただし、 $k_h$  は変数分離の定数で、 $k_r$  は次式を通して定義される量である。

$$\beta^4\alpha - C^2 \left( \frac{k_h^2}{r^2} + k_r^2 \right) \beta^2 + \frac{(r-1)g^2 k_h^2}{r^2} + \left\{ 1 + \frac{r-2}{r} \cdot \frac{4C^2}{rgr} \right\} \cdot \frac{g^2 r^2 \beta^2}{4C^2} = 0 \quad (19)$$

ここで、 $k_h^2 = k_\theta^2 + k_\lambda^2$  である。

### Ⅲ 変数分離定数の物理的意味と水平方向の方程式の解、および、曲率の効果について

水平方向の方程式(16)、(17)は Laplace の潮汐方程式である (Hough, 1898)。この式から垂直加速度の効果は、水平方向の構造には何ら寄与しないことに注意すべきである。したがって、この式より、垂直加速度の効果を議論することは好ましくない。潮汐理論では、変数分離定数 $k_h$ を一様大気の深さに対応するものとして解釈していたが、しかし、負の値の $k_h$ がみつき、その物理的性質が問題となった (Pekeris, 1937)。ここで、その物理的性質を論じるために、早い振動数で、短い波長領域の場合を考えてみる。座標系を角度から長さの次元にするために、 $dx = r d\theta$ 、 $dy = r \sin\theta d\lambda$  のように変数変換をし、水平方向の波長  $L \equiv 2\pi/k_\lambda$  が地球の半径に比べて小さい条件を用いると、結局(15)式は次のようになる。

$$-\frac{1}{4\omega^2} \cdot \bar{F}(\theta) \equiv -\frac{a^2}{\beta^2} (k_x^2 + k_y^2) \equiv -\frac{a^2}{\beta^2} \bar{k}_L^2 \quad (20)$$

したがって(16)式より、 $k_h^2 = a^2(k_x^2 + k_y^2)$  となり、すなわち、変数分離定数は波数に対応する振動の mode を示すパラメーターであることがわかる。また一方、短波長領域では、無限平面上で考えているため、波長は連続的に変化して、任意の値を取り得るとして扱ってよいが、(16)式を北極または南極で収束するという境界条件のもとで解けば、最早固有値  $k_h$  は連続

| MODE | EIGEN VAL. | EIGEN FUNCTION   |
|------|------------|--|
| $n$  | $k_h^2$    | $\psi_n^{k_h}(\theta)$   |
| 6    | 44.5       | $P_6^6 - 0.000226P_8^6 + 0.00000767P_{10}^6 +$   |
| 8    | 76.3       | $0.157P_6^6 + P_8^6 - 0.0105P_{10}^6 + 0.00$   |
| 10   | 116.7      | $0.0179P_6^6 + 0.169P_8^6 + P_{10}^6 - 0.021P_{12}^6 + 0.00$                                       |
| 12   | 165.6      | $0.002P_6^6 + 0.019P_8^6 + 0.181P_{10}^6 + P_{12}^6$<br>$- 0.033P_{14}^6 + 0.00$                   |
| 14   | 222.8      | $0.002P_8^6 + 0.022P_{10}^6 + 0.194P_{12}^6 + P_{14}^6$<br>$- 0.046P_{16}^6 + 0.00P_{18}^6 + 0.0$  |
| 16   | 283.7      | $0.013P_{12}^6 + 0.162P_{14}^6 + P_{16}^6 - 0.032P_{18}^6$<br>$+ 0.0001P_{20}^6 + 0.0$             |
| 18   | 362.9      | $0.002P_{12}^6 + 0.0027P_{14}^6 + 0.222P_{16}^6 + P_{18}^6$<br>$- 0.073P_{20}^6 + 0.003P_{22}^6 +$ |

第1表：緯度方向の mode と固有値、固有関数との関係（周期4時間、経度方向の角波数6の場合）。

| PERIOD      | EIGEN VAL. | EIGEN FUNCTION                            |
|-------------|------------|---|
| $\tau$ (hr) | $k_h^2$    | $\psi_n^{k_h}(\theta)$                    |
| 1           | 42.5       | $P_6^6 - 0.0008P_8^6 + 0.0$               |
| 3           | 43.75      | $P_6^6 - 0.0003P_8^6 + 0.0$               |
| 5           | 45.2       | $P_6^6 - 0.0028P_8^6 + 0.0$               |
| 7           | 47.0       | $P_6^6 - 0.0062P_8^6 + 0.0$               |
| 9           | 49.1       | $P_6^6 - 0.01097P_8^6 + 0.0001P_{10}^6 +$ |
| 12          | 52.8       | $P_6^6 - 0.02067P_8^6 + 0.0006P_{10}^6 +$ |

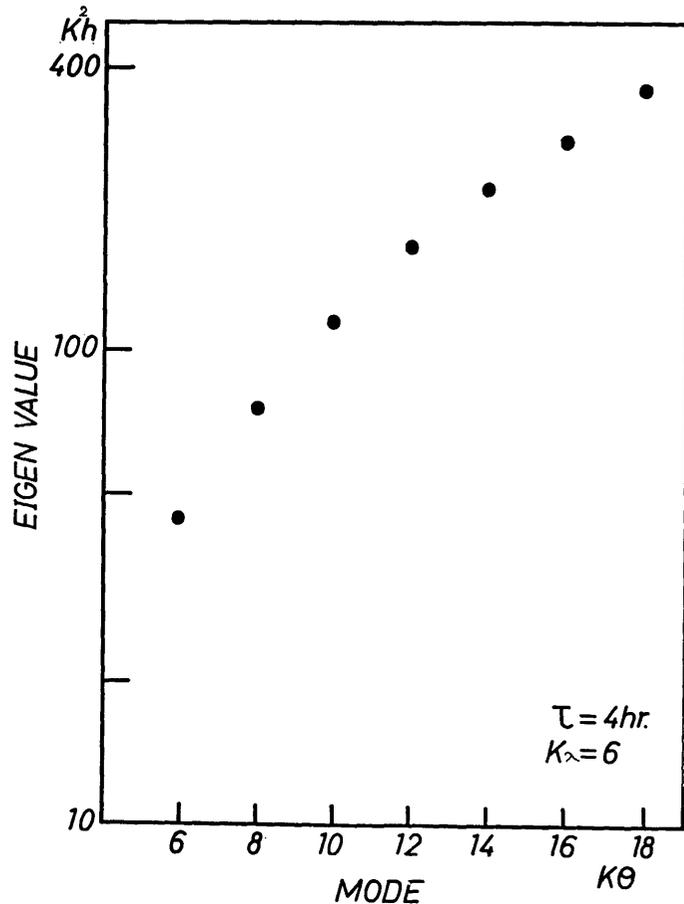
第2表：周期と固有値、固有関数との関係（経度方向の角波数6、緯度方向の mode 6の場合）。

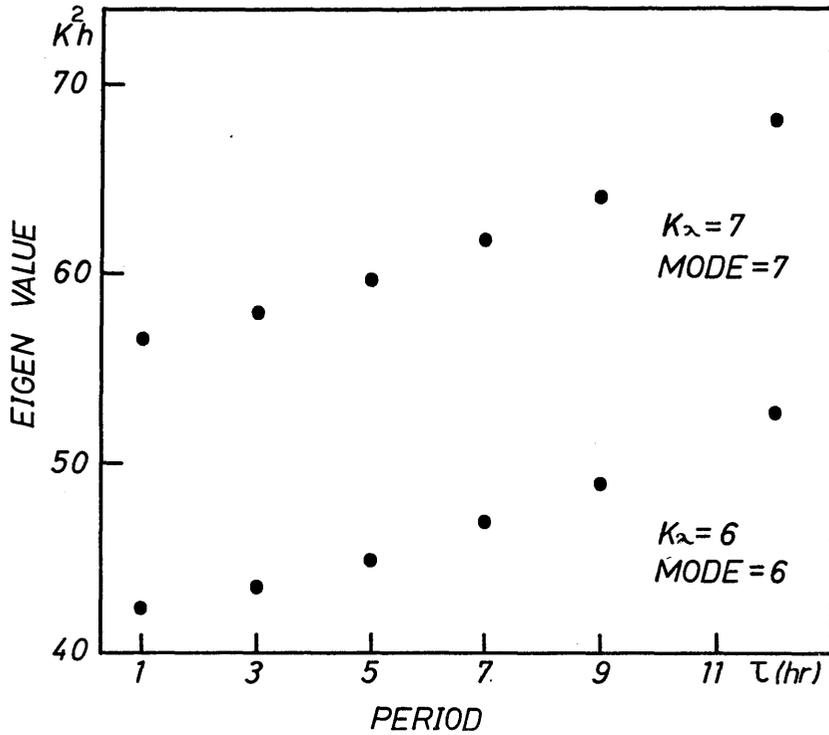
PERIOD:  $\tau = 5 \text{ hr.}$       MODE=WAVE NUM.

| WAVE NUM. | EIGEN VAL<br>$K_h^2$ | EIGEN FUNCTION<br>$\psi_n^{K_h}(\theta)$ |
|-----------|----------------------|--|
| 2         | 7.17                 | $P_2^2 - 0.0091 P_4^2 + 0.0$             |
| 3         | 13.7                 | $P_3^3 - 0.0065 P_5^3 + 0.0$             |
| 4         | 22.2                 | $P_4^4 - 0.0047 P_6^4 + 0.0$             |
| 5         | 32.7                 | $P_5^5 - 0.0033 P_7^5 + 0.0$             |
| 6         | 45.2                 | $P_6^6 - 0.0028 P_8^6 + 0.0$             |
| 7         | 59.75                | $P_7^7 - 0.0020 P_9^7 + 0.0$             |
| 8         | 76.25                | $P_8^8 - 0.0013 P_{10}^8 + 0.0$          |

第3表： 経度方向の角波数，または，緯度方向の mode と固有値，固有関数との関係（周期5時間，角波数と mode が共に相等しく変化する場合）。

的に変化できなく，その固有関数も最早，三角関数でなくなる。たとえば，第1表，第2表，第3表で示すような関数形となる。第1表では周期が4時間，経度方向の角波数が6の場合で，緯度方向の mode によって固有値，固有関数がどのように変化するかを示している。第2表は経度方向の角波数，緯度方向の mode が共に6の場合で，周期と共に変化する様子を表わしている。第3表は周期が5時間，角波数が特に mode に等しく変化する場合の変化の様子を表わしている。また，第1図は角波数が6箇，周期4時間における固有値と mode との関係を示し，固有値は mode と共に急速に増大する傾向を示している。第2第1図： 緯度方向の mode と固有値との関係（周期4時間，経度方向の角波数6の場合）。





第2図： 周期と固有値との関係（経度方向の角波数と緯度方向の mode が共に6と7の場合。上の部分が7の場合で，下の部分が6の場合）。

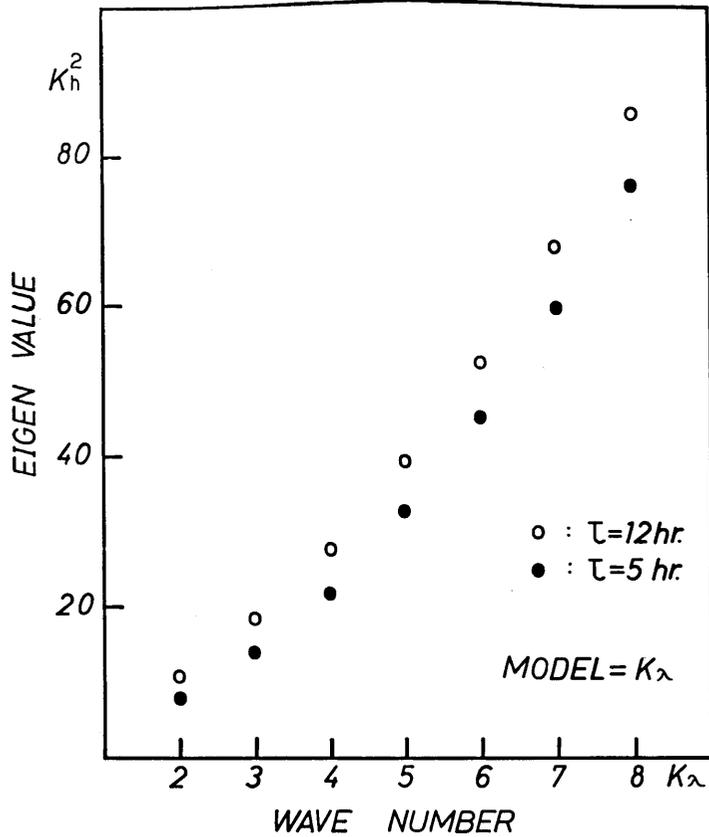
図は角波数， mode共に6箇，角波数， mode 共に7箇の場合の固有値と周期の関係を表わしている。周期が大きくなれば固有値も増大するようである。第3図は周期が5時間，12時間における固有値と角波数， mode との関係を表わしている。この場合， mode と角波数は等しく変化させてある。角波数が増大すると固有値も増大するようである。

水平方向には垂直方向に比べ，地球の自転，曲率の影響が大きく効くが，これらの影響をもう少し詳しく調らべるために，(16)式を Hines の水平方向の式と比較してみると次のようになる (Hines, 1960)。

$$\frac{\beta^2}{4\omega^2 a^2} \cdot \bar{F}(\theta) \longrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = - (k_x^2 + k_y^2) \quad (21)$$

一方，(16)式を書き直せば次のようになる。

$$\frac{\beta^2}{4\omega^2 a^2} \cdot \bar{F}(\theta) = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a} \cdot \left( \tan \theta + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \right) \cdot \frac{\partial}{a \partial \theta} - \frac{2\omega \sin \theta}{i \beta a} \cdot \frac{(\beta^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta)}{(\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta)} \cdot \right.$$



第3図： 経度方向の角波数，または，緯度方向の mode と固有値との関係（角波数と mode が共に相等しく変化する場合。白印が周期12時間の場合で，黒印が周期5時間の場合）。

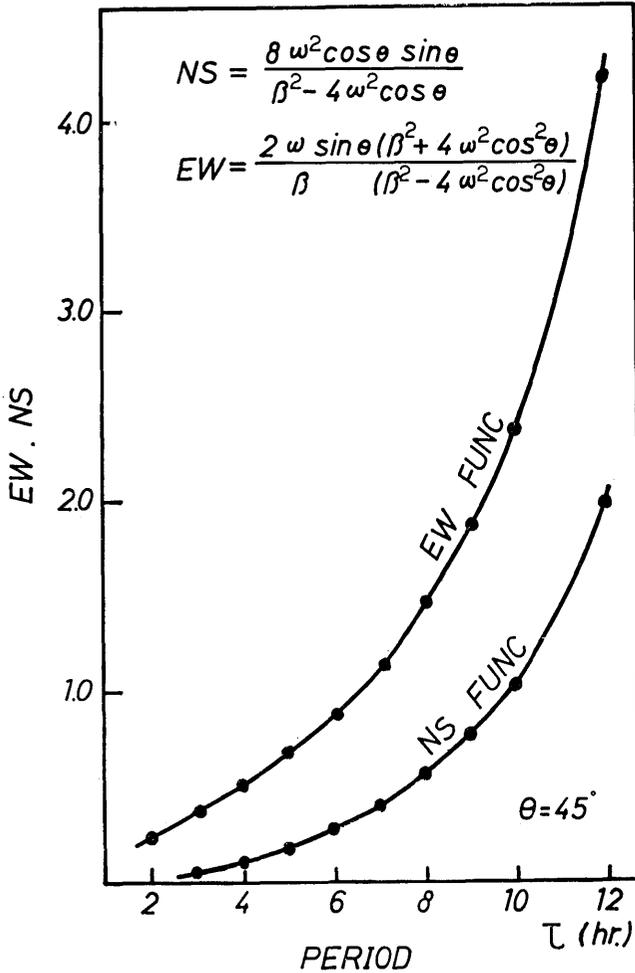
$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\partial}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\
 & + \frac{1}{a} \cdot \left( \tan \theta - \frac{8\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\omega \sin \theta}{i\beta a} \cdot \\
 & \left. \cdot \frac{(\beta^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta)}{(\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

したがって，地球の自転，曲率の影響は，係数  $(\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta)$ ，および，中括弧の第二，第三項から生じることがわかる。当然のことながら，自転の影響は  $\beta^2$  と  $4\omega^2$  との兼合いから決まり，曲率の影響は極に近づく程大きくなることもわかる。また，第二項より，波数  $k_\theta(\theta)$  は実数とはなり得なく，したがって，南北方向では波の反射，屈折がおきよう。このことは，Matsuno の研究とも一致している (Matsuno, 1966)。さらに，地球の自転が無視できないよ

うな振動で、しかも、波長が地球の半径に比べて無視できる短波長領域については、 $F(\theta)$ は次式のように近似できる。

$$\frac{1}{4a^2\omega^2} \cdot \bar{F}(\theta) = \frac{1}{\beta^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \cdot \left( \frac{\omega^2}{a^2 \omega \theta^2} + \frac{\omega^2}{a^2 \sin^2 \theta \lambda^2} \right) \quad (23)$$

したがって、この場合でさへ、地球の自転のために、もはや解は三角関数にはなりえない。



また、地球の自転と曲率の影響が交錯した第二項、第三項の係数は、周期が12時間以下では、振動の周期が大きくなると共に増大することがわかる。第4図は緯度45°の場合でこれらの事情を示している。

#### IV 波の垂直伝播を統一的に示す式と中間波長領域について

地上200km程度の高さで、波の垂直伝播を議論する限りでは、振動する解を持つかどうかを問題にすればよいので、 $r = a + z \approx a$ と近似できる。さらに、最後の項で、 $1/r$ がかかっている項は省略でき、結局次式のようになる。

第4図： 曲率の効果が周期の増大と共に大きくなる傾向を示す（緯度45°の場合）。

$$\beta^4 \alpha - \left( \frac{k_h^2 \alpha}{a^2} + k_r^2 \right) \cdot C^2 \beta^2 + \frac{(r-1) g^2 k_h^2}{a^2} - \frac{g^2 r^2 \beta^2}{4C^2} = 0 \quad (18)'$$

したがって、この式が全波長領域で、波の伝播を記述する式である。特に、垂直方向の式には地球の自転、曲率の効果は固有値  $k_h^2$  を通してのみ入っていることに注意すべきである。したがって、この式より、これらの効果を議論することはできない。

(1) 低い振動数で長波長領域： 潮汐のような長波長領域では、静力学的平衡が仮定でき

るので、 $\alpha=0$ とおけば(18)'式は次のように簡単になる。

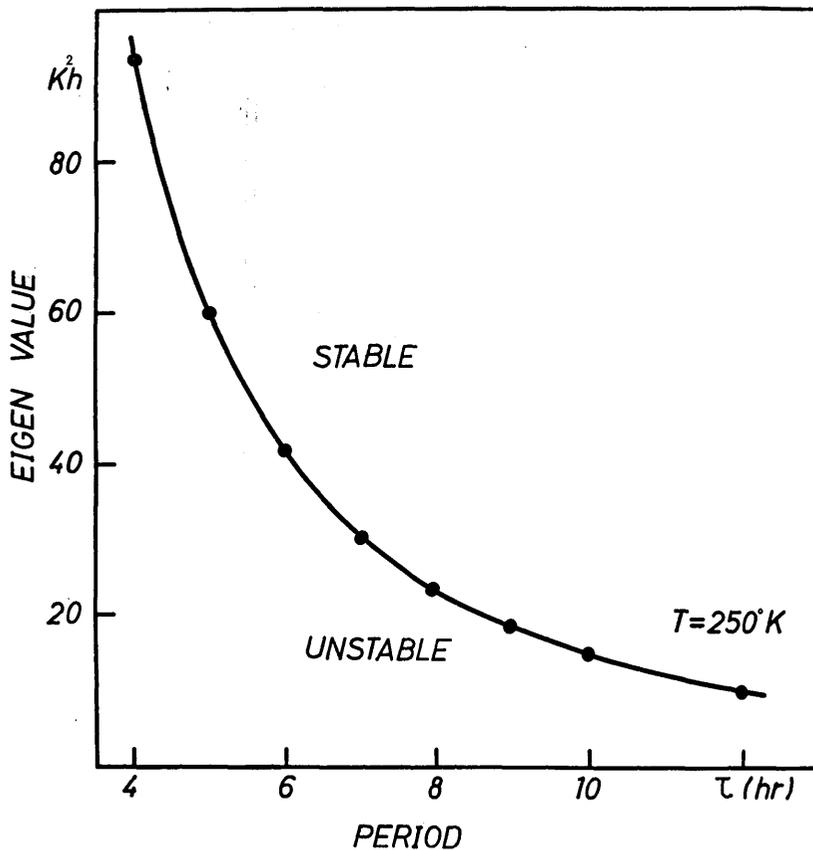
$$\left( C^2 k_r^2 + \frac{g^2 \gamma^2}{4C^2} \right) \cdot \beta^2 - \frac{(\gamma-1)g^2 k_h^2}{a^2} = 0 \quad (24)$$

一様大気の深さ  $h = a^2 \beta^2 / g k_h^2$  を用いて上式をかき直せば、直ちに潮汐の垂直分布を定める式になる。

(2) 高い振動数で短波長領域：この領域では勿論、静力学的平衡は成立たない。さらに、地球の自転、曲率が無視できる領域では、角波数のわかりに長さの逆数の次元をもつ波数を用いて表現する。そのさい、前節の議論より、 $k_h/a$ が水平方向の波数 $k_L$ に置きかえられるべきである。その結果(18)'式は次のようになる。

$$\beta^4 - (k_r^2 + k_L^2) \cdot C^2 \beta^2 + (\gamma-1) \cdot g k_L^2 - \frac{g^2 \gamma^2 \beta^2}{4C^2} = 0 \quad (25)$$

したがって、上式は全く Hines の式と一致する (Hines, 1960)。



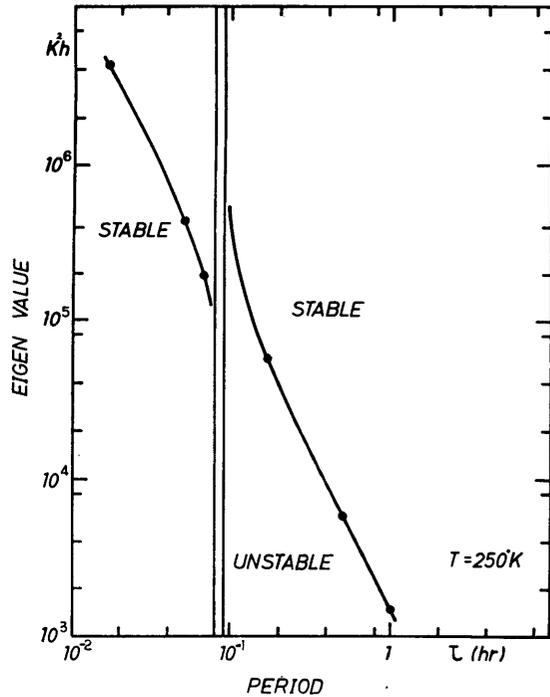
第5図：波のエネルギーが垂直に伝播可能な領域を示す。曲線より上の部分が伝播可能な領域であり、下の部分が不可能な領域である。

中間領域についての一つの目安として、静力学的平衡が成立しない領域を求めよう。(18)式より、 $k_r^2 \leq k_h^2/a^2 \equiv k_L^2$ か、あるいは、 $\beta^2 \leq g^2\gamma^2/4C^2$ を満足する殆ど全ての場合、静力学的平衡は成立しないことがわかる。この結果は小倉の研究結果と一致している(小倉義光, 1966)。

垂直方向の地球の自転、曲率の効果は、(18)'式において、固有値 $k_h^2$ を通して表われる。すなわち、 $k_h^2$ は最早連続的な値を取り得ないことを既に述べた。しかし、仮りに連続的な値を取り得るとして、 $k_L^2 = k_h^2/a^2$ で置き換えれば、(18)式は全く Hines の式と一致する。したがって、不連続性を一応除外して考えれば、垂直方向に関しては Hines の式を全波長領域まで拡張できるとみなすことができる。しかし、水平方向の解に関しては、その解は既に述べたように異ってくる。また、エネルギーの垂直伝播の可能性についても、Hines の結果を全波長領域まで拡張できよう。第5図、第6図は(18)式より求めたエネルギー伝播の可能な領域を示し、第5図では曲線より上の部分が垂直伝播可能な領域である。第6図は短周期領域をさらに詳しく示したが、Hines の結果と一致している。すなわち、周期5、6分の所に、いかなる周期の波も上方伝播が不可能な領域、すなわち、禁止帯があり、それを境に、より短い周期の部分では曲線より下の部分が、長い部分では曲線より上の部分が伝播可能な領域である(Hines, 1960)。

## V 結 言

等温大気中での内部重力波の垂直方向の伝播を統一的に記述する式を求めた。この式は波数 $k_L (=k_h/a)$ の不連続性を問題にしなければ、Hines の式を全波長領域まで拡張できることを示す。しかし、水平方向については、短波長以外の波長領域で固有値の不連続性が大きくなり、また、その固有関数も、Hines の解である三角関数とは異なる。そのほか、潮汐理論で一樣大気の深さと考えられていた変数分離の定数は、振動の mode を表わすパラメーターであることがわかった。さらに、Yanowitch が指摘した鉛



第6図：短周期近辺で、波のエネルギー伝播が可能な領域を示す。周期5、6分の所にいかなる波長の波も伝播不可能な領域があり、この禁止帯を境に、短い周期の部分では曲線より下の領域が伝播可能であり、長い周期の部分では曲線より上の領域が伝播可能である。

直座標を地球の半径で近似することの妥当性も調べられ、地上約200km程度の高さまででは、波の垂直伝播を議論するかぎり、この近似が成立つことが分かった。

## 文 献

- Hines, C. O., 1960 : Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. Canadian Journ. Phys., 38, 1441—1481.
- Hough, S. S., 1898 : On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. Part II On the general integration of Laplace's dynamical equations. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., 191, 139—185.
- Matsuno, T., 1966 : Quasi-geostrophic motion in the equatorial area. J. Meteor. Soc. Japan, 44, 25—43.
- Pekeris, C. L., 1937 : Atmospheric oscillations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 158, 650—671.
- Sawada, R., 1954 : The atmospheric lunar tides. Meteor. Paper, New York Univ., 2, No. 3.
- , 1955 : On the role of thermal excitation in the atmospheric tides. Geophys. Mag., 26, 267—281.
- Sawada, R. and Matsushima, A., 1964 : Thermally driven annual atmospheric Oscillations as a cause of dynamic heating of the winterpole upper mesosphere. J. Meteor. Soc. Japan, 44, 97—108.
- Silberman, I., 1953 : A matrix method for computing atmospheric oscillations. Dep. of Met. and Oceano., Sci. Report, No. 3.
- Weekes, k., and M. V. Wilkes, 1947 : Atmospheric oscillations and the resonance theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 192, 80—99.
- Yanowitch, M., 1963 : The problem of free oscillations in the theory of atmospheric tides. Bertrage zur Phys. der Atm., 36, 213—225.