



Title	熱応力割断問題における熱的境界の影響
Author(s)	才本, 明秀; 今井, 康文; 本村, 文孝
Citation	日本機械学会論文集. A編, 75(757), pp.1202-1208; 2009
Issue Date	2009-09-25
URL	http://hdl.handle.net/10069/23088
Right	

This document is downloaded at: 2019-03-22T23:21:42Z

熱応力割断問題における熱的境界の影響*

才本明秀*¹, 今井康文*², 本村文孝*²

Influence of thermal boundary on the problems of thermal stress cleaving

Akihide SAIMOTO*³, Yasufumi IMAI and Fumitaka MOTOMURA

*³ Graduate School of Science and Technology, Nagasaki University,
1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki, 852-8521 Japan

A closed-form expression of the stress intensity factor is derived for a problem of straight crack in an infinite plate under thermal stresses induced by a temperature rise at an infinitesimal area. The present solution is applicable to wide range of uncoupled thermoelastic problems and is especially useful to understand the mechanical behavior of cracks in thermal stress cleaving (TSC). For instance, the present solution is useful for the prediction of an optimal temperature distribution in TSC, which is a function of various conditions such as shape of the plate, crack path, cleaving velocity and so on. Some basic problems of TSC formerly analyzed by the use of thermoelastic fields induced by a heat source were examined to confirm the applicability of the present solution.

Key Words : Elasticity, Thermal Stress, Fracture Mechanics, Thermal Stress Cleaving, Uncoupled Problem, Complex Variable Method, Body Force Method

1. 緒 言

熱応力でき裂進展を制御して材料を切断したり、表面に浅いき裂を作成する工法(熱応力割断)⁽¹⁾が電子デバイスや液晶板などの高ぜい性材の加工に実用化されている。熱応力割断の特徴は、砥石や刃物が不要な非接触工法であり、適切な温度上昇の制御により微細き裂の少ない強じんな断面が得られる点にある⁽²⁾。熱源形状や加熱媒体など、温度変化の与え方には種々の選択肢があり、目的に応じて適切な加熱方法を選ぶことができる。最も基本的な熱応力割断の形態は移動する熱源を用いるものであり、熱源から離れた位置に生じる引張応力がき裂進展を駆動する一方で、熱源近傍の圧縮応力はき裂進展を制動する。そのためき裂先端は移動する熱源を後方から追従するように準静的に進展し、得られる割断形状は熱源の移動軌跡とほぼ同一となる。この事は移動熱源を用いた熱応力割断に限った特徴ではなく、加熱領域を線状に引き延ばした線割断の場合においても、得られる割断形状はほぼ加熱線に沿う直線となることが数値解析や実験で確認されている⁽³⁾。

与えられた熱エネルギーが弾性体の温度上昇のみに

寄与し、温度場とひずみ場の連成効果が無視できる準静的熱弾性状態では、温度場は熱収支方程式を温度境界条件のもとで解けば求められる。一方、温度変化に伴って生じる熱ひずみに対応する応力場は、一般には境界における力学的境界条件を満たさない。そこで熱ひずみに対応する応力場に適切な等温弾性解を重畳し、力学的境界条件を満たす解を求めるのが熱弾性問題の標準的な解法といえる。さて、境界形状が不変の準静的熱弾性問題では、時間依存性は温度場のみに見れる。数値解析により精度良く温度分布を求めるには十分小さい時間刻を用いる必要があり、熱応力問題の計算時間の大半は温度場計算に費される。熱源を用いた割断の問題に限れば、移動熱源がもたらす熱弾性場を効率的に評価することが、全体の計算時間の短縮化に大いに寄与する。そこで本研究では、き裂と熱源が種々の温度境界近傍に存在する場合の熱応力拡大係数を数値解析して、応力拡大係数に及ぼす温度境界条件の影響を調査した。温度境界条件が実際とは異なっても、応力拡大係数への影響が小さいならば、温度計算に既知の単純な解を利用するなどの近似計算が可能となり、計算時間を劇的に短縮できる。また熱源を追従するき裂の問題では、明確な温度上昇域は熱源とき裂先端を含む比較的狭い範囲に限られるので、き裂先端近傍の温度上昇のみを考慮して熱応力拡大係数を近似計算する場合の近似の精度についても検討した。

* 原稿受付 2009 年 3 月 28 日

*¹ 長崎大学大学院生産科学研究科 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

*² 長崎大学工学部機械システム工学科
Email: s-aki@nagasaki-u.ac.jp

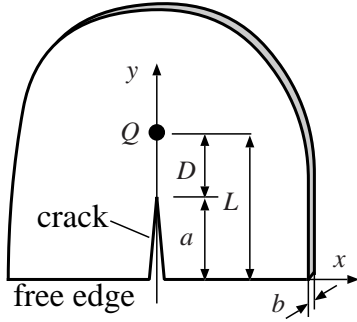


Fig. 1 Semi-infinite plate with edge crack heated by a point heat source

2. 縁き裂の熱応力拡大係数と自由縁の温度境界条件

2.1 無限板に生じた瞬間点熱源による熱弾性場
 厚み b の無限平板内の一点 (ξ, η) に強さ dq の瞬間点熱源が時刻 τ に生じるとき、点 (x, y) における時刻 $t (t > \tau)$ での熱弾性場は熱源の作用点に関して軸対称であり、距離 $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ を用いて以下のように表される⁽⁴⁾。

$$T(R, t) = \frac{dq}{4\pi b \lambda (t - \tau)} e^{-R^2/4\kappa(t-\tau) - 2\kappa\gamma(t-\tau)/b\lambda} \quad (1)$$

$$\sigma_r(R, t) = -\frac{\alpha E}{R^2} \int_0^R T(r, t) r dr \quad (2)$$

$$\sigma_\theta(R, t) = -\alpha E T(R, t) + \frac{\alpha E}{R^2} \int_0^R T(r, t) r dr \quad (3)$$

ここで $T(R, t)$, $\sigma_r(R, t)$, $\sigma_\theta(R, t)$ はそれぞれ板厚方向の平均をとった温度上昇、半径方向応力、周方向応力であり α は線膨張係数、 E は縦弾性係数、 γ は板表面から大気への放熱を表す熱伝達係数、 λ は熱伝導率、 κ は熱拡散係数である。 $dq = Qd\tau$ とし、これらを加熱時刻 τ で積分すれば持続固定熱源による熱弾性場が、また、 $\xi = \xi_0 + v_x\tau$, $\eta = \eta_0 + v_y\tau$ のように移動速度を考慮すると、等速移動する点熱源による熱弾性場を求めることができる。

さて、瞬間点熱源の熱弾性場を用いて自由縁から長さ a のき裂が生じた半無限板に、単位時間あたりの加熱エネルギー Q の点熱源が作用する問題 (図 1) を考える。き裂と熱源の作用点はともに自由縁と直交する y 軸上にあり、対称性からモード I の応力特異性のみが生じる。 $y = L$ の位置に固定熱源が作用する場合と、原点を始点とし、 $y = L$ まで等速度 v で移動する熱源が作用する場合について、自由縁の温度境界条件が (a) 断熱境界 ($dT/dy|_{y=0} = 0$)、(b) 等温境界 ($T|_{y=0} = 0$)、および (c) 温度境界を考慮しない場合について、き裂先端に生じる応力拡大係数を数値解析した。

条件 (a) では熱源作用点の x 軸に関する鏡像点と同

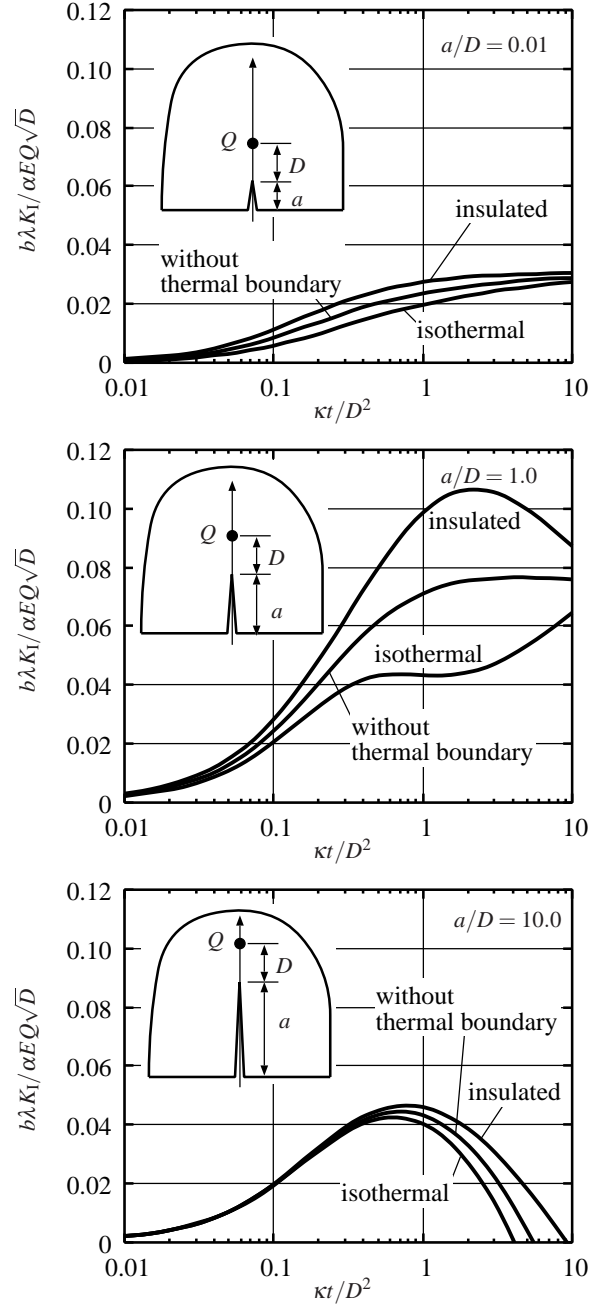


Fig. 2 Thermal stress intensity factor of edge crack due to a fixed point heat ($\gamma = 0.0$)

強度の発熱源が作用する無限板の熱弾性場を、条件 (b) では熱源作用点の x 軸に関する鏡像点に同強度で符号の異なる吸熱源が作用する無限板の熱弾性場を、また、条件 (c) では無限板の熱弾性場そのものを用いる。すなわち、それぞれの温度境界条件に応じて式 (2) および式 (3) から計算される熱応力場において、 $y = 0$ の面とき裂面に生じる表面力を同時に打ち消して自由表面とする等温弾性解を考えてき裂先端の応力拡大係数を求めた。なお、等温弾性問題の解析には体積力法⁽⁵⁾を用いた。

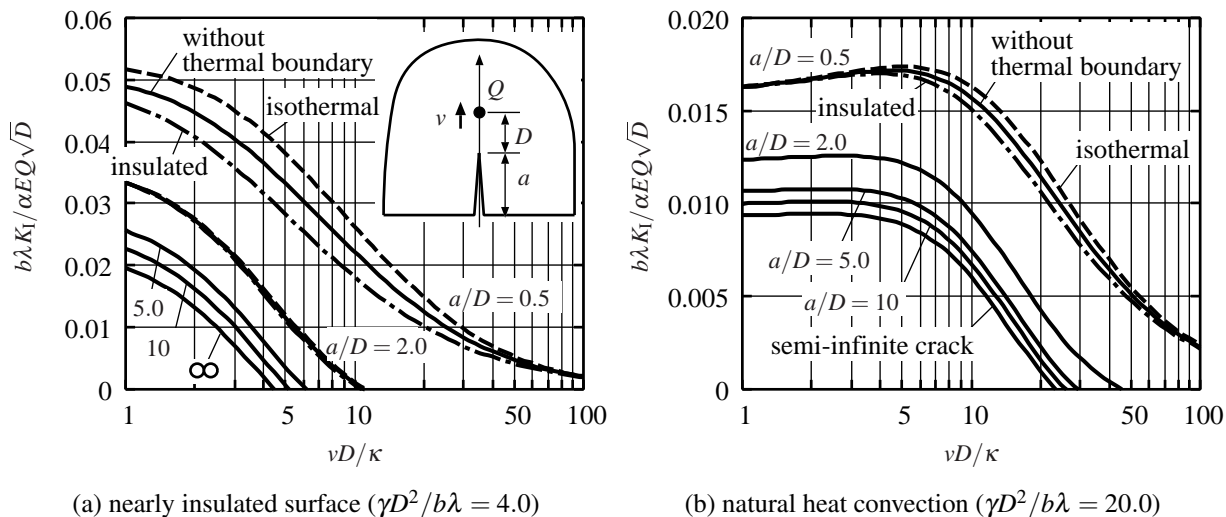


Fig. 3 Thermal stress intensity factor of edge crack due to a moving point heat

2.2 固定点熱源 図2に、固定熱源の場合における熱応力拡大係数と無次元加熱時間 $\kappa t/D^2$ の関係を、3種類の無次元き裂長さ (a/D) に対して整理した結果を示す。固定熱源問題では自由縁に導入した微小き裂が進展を始めるまでの短い時間範囲を対象とするので、温められた板表面からの自然放熱は簡単のため無視 ($\gamma = 0$) している。加熱開始直後の K_I は温度境界条件の違いによらずほぼ同じ傾向で徐々に増加するが、 K_I の最大値や、 K_I が最大となる加熱時間は、き裂長さや温度境界条件に依存する。特に $a/D \ll 1$ の場合、加熱時間が小さい範囲でも3種類の温度境界条件に対する K_I の相対差が大きく、温度境界条件を正確に指定しなければ得られる応力拡大係数の信頼性が低下する。なお、同一の加熱時間で比較すると、自由縁が断熱である場合が最大の、等温である場合が最小の K_I を与えていることが分る。

標準的なソーダガラスの熱拡散係数は $\kappa \approx 6.5 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ の程度であり、炭酸ガスレーザを熱源に用いる実験室の環境では $D = 5 \sim 30 \text{mm}$ 程の距離で割断が行われる。この場合、加熱時間は長くととも数十秒のオーダーであり、これらの条件は図2の横軸で、 $\kappa t/D^2 \approx 0.05$ 程度の値に対応する。図2で3種類の温度境界条件による差が明確に表れるのは $\kappa t/D^2 > 0.1$ 以降の範囲であることを考慮すれば、直線縁に垂直に発生するき裂の熱応力拡大係数を評価する際には、温度境界は存在しないとみなして近似計算しても誤差は小さいことが理解される。

2.3 移動点熱源 熱源の無次元移動速度 vD/κ をパラメータとし、前節と同様に種々のき裂長さに対する K_I を解析して図3を得た。なお、移動熱源問題では板表面からの放熱も重要なパラメータとなる。例えば

$D = 20 \text{mm}$ で板厚 $b = 1 \text{mm}$ のソーダガラスの割断では、 $\gamma D^2/b\lambda = 20$ は静止大気への自然対流 ($\gamma = 90 \text{W/m}^2\text{K}$) に、 $vD/\kappa = 10$ は移動速度 0.33mm/s に相当する。同一の a/D に対する応力拡大係数と温度境界条件との対応関係は固定熱源の場合とは逆になっており、等境界で最大の K_I を、断熱境界で最小の K_I を示した。しかし、き裂がある程度長く ($a/D > 2.0$) になると、 K_I に及ぼす温度境界条件の影響はほぼ無視できるようである。また、板表面からの放熱が小さいと K_I の最大値は増加する一方で、割断速度を大きくすることに伴う熱応力拡大係数の減少率が大きくなり、高い割断速度を実現することが困難になる。図3にはき裂長さが無限大の場合の応力拡大係数⁽⁶⁾もプロットした。 a/D が大きくなるに従い、無理なく半無限き裂の解に漸近している。

き裂先端が温度境界から十分に遠ざかれば、自由縁における温度境界条件の違いがき裂先端の応力拡大係数に及ぼす影響は当然小さくなる。またこのような場合には、き裂先端近傍の温度分布のみを用いて直接応力拡大係数を評価できる可能性があると考えた。そこで、き裂先端からどの程度離れた範囲までの温度分布を考慮すれば、十分な精度で熱応力拡大係数を近似計算できるかについて調査することとした。

3. 無限小の面積に生じた温度上昇による熱応力場

初期温度と初期応力がともにゼロの無限板を考え、ある領域 A のみに一様温度上昇 T_0 が生じた瞬間を考える(図4)。無限板から熱膨張する以前の領域 A を切り取り、領域 A の外周の変位を拘束した状態で温度を一定値 T_0 だけ上昇させる。領域 A の外周の変位を拘束するには、その外周に一定圧力 $p = \beta T_0$ を与える必要

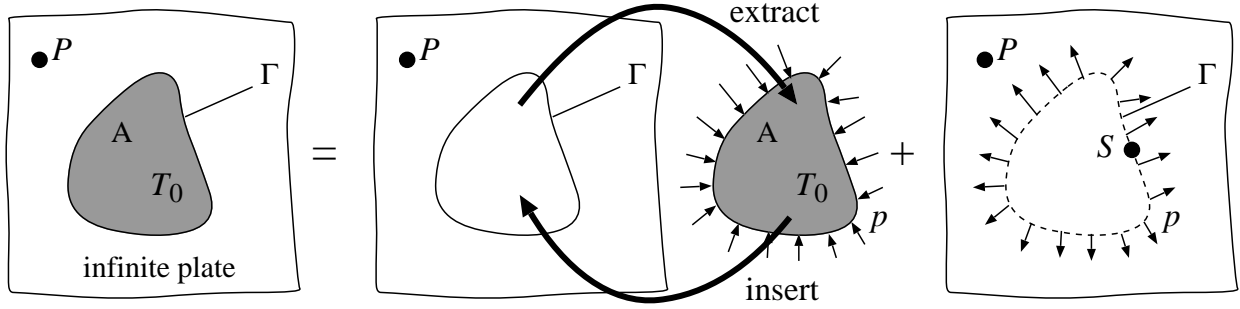


Fig. 4 Analysis of thermal stress by the method of shrink fitting

があり, その結果 A の内部に静水圧場 $\sigma_x = \sigma_y = -\beta T_0$ が生じる. ここに β は線膨張係数 α , 縦弾性係数 E およびポアソン比 ν からなる定数 $\beta = \alpha E / (1 - \nu)$ である. 次に領域 A を無限板に戻し, A の境界 Γ に生じている圧力 p を除去するために Γ に沿って一樣な大きさ p の体積力を作用させれば熱膨張ひずみに対応する熱応力場が得られる. すなわち, 参考点 $P(x, y)$ に生じる熱応力はテンソルの記号を用いて次のように表される.

$$\sigma_{ij}(P) = \beta T_0 \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_{ij}(P, S_{\xi}) \ell + \sigma_{ij}(P, S_{\eta}) m \right\} d\Gamma(S) - \beta T_0 \delta_{ij} \quad \dots (P \in A) \quad (4)$$

式 (4) の右辺第 2 項は拘束を受けながら温度上昇 T_0 を経験する領域 A 内の点 P に生じる静水圧場を表すから, 点 P が領域 A に属さない場合にはこの項が消滅して次のように表される.

$$\sigma_{ij}(P) = \beta T_0 \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_{ij}(P, S_{\xi}) \ell + \sigma_{ij}(P, S_{\eta}) m \right\} d\Gamma(S) \quad \dots (P \notin A) \quad (5)$$

δ_{ij} はクロネッカのデルタ記号であり, i, j は x または y を表す. 点 $S(\xi, \eta)$ は境界 Γ 上の動点であり, S の添字は力の作用方向を示す. また (ℓ, m) は S における境界 Γ の外向き単位法線ベクトルの x, y 成分である. 例えば $\sigma_{xx}(P, S_{\xi})$ は無限板中の一点 S に ξ 方向の単位集中力が作用するときに参考点 P に生じる σ_x を, また $\sigma_{xx}(P, S_{\eta})$ は無限板中の一点 S に η 方向の単位集中力が作用するときに参考点 P に生じる σ_x を意味する.

領域 A に生じている温度上昇が一定値 T_0 ではなく, 座標の関数 $T(x, y)$ である場合には, A をその内部で温度が一樣とみなせるほど小さい領域 δA に分割し, それらの影響を重ね合わせれば良い. このとき, 微小領域 δA の外周に作用する体積力は互いに接近して力対を形成する. そこで温度分布が存在するときの熱応力

の計算式 ($P \in A$) は以下のようなになる.

$$\sigma_{ij}(P) = \beta \int_A \left\{ \sigma_{ij,\xi}(P, S_{\xi}) + \sigma_{ij,\eta}(P, S_{\eta}) \right\} T(S) dA(S) - \beta T(P) \delta_{ij} \quad \dots (P \in A) \quad (6)$$

コンマに続く座標変数はその変数による偏微分を表し, 例えば, $\sigma_{ij,\xi}(P, S_{\xi}) = \partial \sigma_{ij}(P, S_{\xi}) / \partial \xi$ である. ここで

$$\sigma_{ij,k}(P, S_k) T(S) = \frac{\partial \sigma_{ij}(P, S_k) T(S)}{\partial k} - \sigma_{ij}(P, S_k) T_{,k}(S)$$

の関係 ($k = \xi, \eta$) を用い, 式 (6) の第 1 項に発散定理を適用すると, 次式が得られる.

$$\sigma_{ij}(P) = \beta \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_{ij}(P, S_{\xi}) \ell + \sigma_{ij}(P, S_{\eta}) m \right\} T(S) d\Gamma(S) - \beta \int_A \left\{ \sigma_{ij}(P, S_{\xi}) \frac{\partial T}{\partial \xi} + \sigma_{ij}(P, S_{\eta}) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} dA(S) - \beta T(P) \delta_{ij} \quad \dots (P \in A) \quad (7)$$

Duhamel の相似定理によれば, 温度上昇 $T(x, y)$ をうけた二次元平板内の熱応力は, 境界に仮想表面力 $t_x = \beta T \ell, t_y = \beta T m$ が, また, 領域内に仮想物体力 $f_x = -\beta (\partial T / \partial x), f_y = -\beta (\partial T / \partial y)$ が作用する等温弾性問題を解き, その結果に静水圧 $\sigma_x = \sigma_y = -\beta T$ を加えたものとして計算でき⁽⁷⁾, 式 (7) は Duhamel の相似定理そのものを表していることが理解される. ただし, 式 (7) を用いると温度とその勾配の分布が熱応力計算に必要なものに対し, 式 (6) では温度分布のみで熱応力が計算できることになる.

なお, 二次元問題における力対の応力場は注目点と観測点の距離 R に対して $1/R^2$ の特異性を持つので $P \in A$ の場合には式 (6) を次のように変形する.

$$\sigma_{ij}(P) = \beta \int_A \left\{ \sigma_{ij,\xi}(P, S_{\xi}) + \sigma_{ij,\eta}(P, S_{\eta}) \right\} \times \left(T(S) - T(P) \right) dA(S) + \beta T(P) \int_A \left\{ \sigma_{ij,\xi}(P, S_{\xi}) + \sigma_{ij,\eta}(P, S_{\eta}) \right\} dA(S) - \beta T(P) \delta_{ij} \quad \dots (P \in A) \quad (8)$$

そして式 (8) の右辺第 2 項に再び発散定理を適用して

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & \beta \int_A \left\{ \sigma_{ij,\xi}(P, S_\xi) + \sigma_{ij,\eta}(P, S_\eta) \right\} \\ & \times \left(T(S) - T(P) \right) dA(S) \\ & + \beta T(P) \int_\Gamma \left\{ \sigma_{ij}(P, S_\xi) \ell + \sigma_{ij}(P, S_\eta) m \right\} d\Gamma(S) \\ & - \beta T(P) \delta_{ij} \quad \dots (P \in A) \quad (9) \end{aligned}$$

式 (9) の右辺第 1 項では P と S が一致する場合の特異性が除去されており，観測点が温度上昇範囲にあって通常の数値積分により熱応力場が計算できる．なお，陳ら⁽⁸⁾ は弾塑性解析に拡張された体積力法において，力対の領域積分における特異性の処理方法に関して詳細な議論を展開している．

式 (6) の右辺第 1 項は，点 S に生じる単位大きさの膨張中心 (x および y 方向の強さが等しい力対) による応力場を，その点の温度 $T(S)$ を重みとして面積積分することを表している．従って，点 S を含む微小面積 δA に生じた一様温度上昇 T_0 が， δA に含まれない点 P に及ぼす熱応力の寄与分は，大きさ βT_0 の膨張中心による弾性場と同一で次のように表される．

$$\delta \sigma_{ij}(P) = \beta T_0 \left\{ \sigma_{ij,\xi}(P, S_\xi) + \sigma_{ij,\eta}(P, S_\eta) \right\} \delta A \quad (10)$$

二次元弾性問題の解は複素応力関数で表すと便利なことが多く， i を虚数単位とし，観測点 P を表す複素変数 $z = x + iy$ と，温度上昇点 S を表す複素変数 $z_0 = \xi + i\eta$ を導入すると，無限平板に対して式 (10) を与える Goursat 型の複素応力関数は式 (11) で与えられる．

$$\delta \Omega(z) = 0, \quad \delta \omega(z) = -\frac{\alpha E T_0 \delta A}{2\pi(z - z_0)} \quad (11)$$

但し，複素応力関数が与えられれば応力成分は次の関係から求められる⁽⁹⁾．

$$\delta(\sigma_x + \sigma_y) = 2 \left\{ \delta \Omega'(z) + \overline{\delta \Omega'(z)} \right\} \quad (12)$$

$$\delta(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2 \left\{ \bar{z} \delta \Omega''(z) + \delta \omega'(z) \right\} \quad (13)$$

無限小の面積の温度上昇による熱応力の寄与分を複素応力関数で表したことにより，例えば単純形状のき裂を有する無限板内の微小面積に温度変化が生じたことによる応力場の解析解を，解析接続の手法⁽¹⁰⁾により閉じた形で求めることができる．

例えば， x 軸上の範囲 $|x| < a$ に表面力自由なき裂を持つ無限板において，点 z_0 を含む微小面積 δA に生じた温度上昇 T_0 がき裂先端 $(+a, 0)$ に生じる応力拡大係数への寄与分は式 (14) のように，また， T ストレスへの寄与分は式 (15) のように求められる．

$$\delta(K_I + iK_{II}) = \frac{\alpha E T_0 \delta A \sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}(z_0 - a)\sqrt{z_0^2 - a^2}} \quad (14)$$

$$\delta \sigma_T = -\frac{\alpha E T_0 \delta A}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(z_0 - a)^2} + \frac{1}{(\bar{z}_0 - a)^2} \right\} \quad (15)$$

これらの式でき裂先端 $(a, 0)$ を原点とする極座標を用い，温度上昇位置を $z_0 = a + re^{i\theta}$ で表すと，

$$\delta(K_I + iK_{II}) = \frac{\alpha E T_0 \delta A e^{-3i\theta/2}}{2\sqrt{2\pi}r^{1.5}} \sqrt{\frac{2a}{2a + re^{i\theta}}} \quad (16)$$

$$\delta \sigma_T = -\frac{\alpha E T_0 \delta A}{\pi r^2} \cos 2\theta \quad (17)$$

半無限き裂の場合は式 (16) で $a \rightarrow \infty$ として，

$$\delta(K_I + iK_{II}) = \frac{\alpha E T_0 \delta A}{2\sqrt{2\pi}r^{1.5}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (18)$$

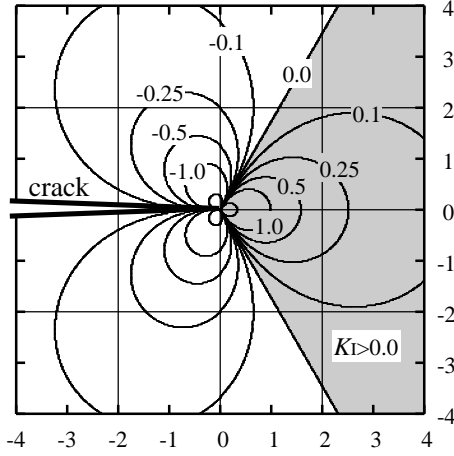
き裂先端近傍に任意の温度上昇 $T(r, \theta)$ が生じている場合は，温度を重みとして式 (16)，あるいは (18) を積分して応力拡大係数を概算することができる．例えば式 (16) に基づいて応力拡大係数を求める際は $\delta A = r dr d\theta$ において面積積分した式 (19) を用いる．

$$\begin{aligned} K_I + iK_{II} = & \int_A \delta(K_I + iK_{II}) = \frac{\alpha E}{2\sqrt{2\pi}} \times \\ & \lim_{R^* \rightarrow \infty} \int_0^{R^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T(r, \theta)}{\sqrt{r}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} \sqrt{\frac{2a}{2a + re^{i\theta}}} dr d\theta \quad (19) \end{aligned}$$

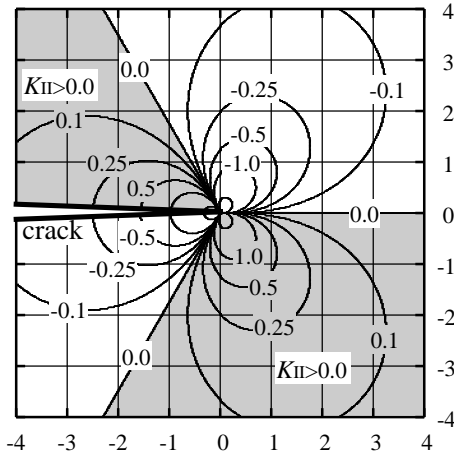
図 5 に式 (17)，(18) で表す応力拡大係数と T ストレスへの寄与分の等強度線図を示す．横軸は温度上昇点の x 座標に，縦軸は y 座標に対応し，同レベルの応力拡大係数と T ストレスが得られる温度上昇位置が曲線で結ばれている． K_I が正となる領域はき裂先端前方に存在し， x 軸を挟んで $\pm 60^\circ$ の間にある．逆にその他の領域では温度を低下させれば正の K_I が得られる．また， K_{II} はき裂面を境としてその符号が逆転している． K_I の場合と併せて考えれば，き裂先端前方の比較的狭い領域に高温域が，き裂面を含む広い領域に低温域が存在するよう温度分布を制御すれば大きな K_I が得られ，効率的な熱応力割断が行える．

図 5 から分るように熱応力拡大係数に強く影響する温度上昇範囲はき裂先端の近傍に限られる．また，熱源による温度変化の場合など温度上昇が狭い範囲に留まる問題では式 (19) で半径方向の積分上界を有限値に留めても誤差は少ないと考えられる．そこで式 (19) で R^* を有限に留めた近似解の精度について検討した．

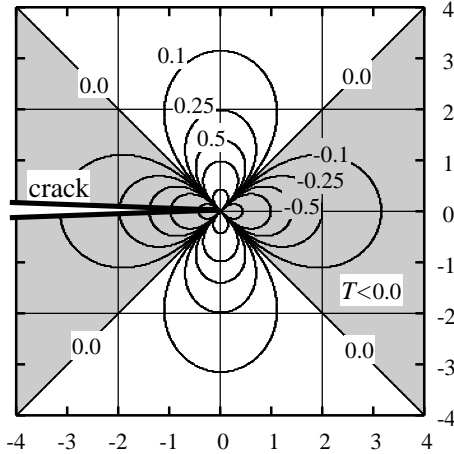
3.1 無限板の熱応力割断問題における熱応力拡大係数の近似計算 x 軸に沿って長さ $2a$ のき裂を持つ無限板が，き裂先端から D だけ離れた位置に固定された熱源によって t 秒間加熱される場合を考える．板



(a) Contour of $2\sqrt{2\pi}\delta K_I/\alpha E T_0 \delta A$

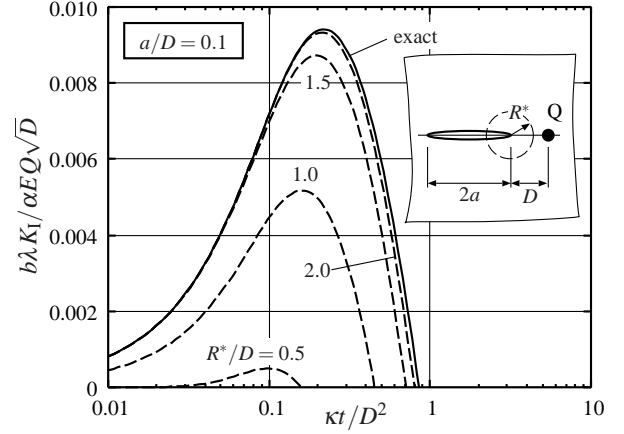


(b) Contour of $2\sqrt{2\pi}\delta K_{II}/\alpha E T_0 \delta A$

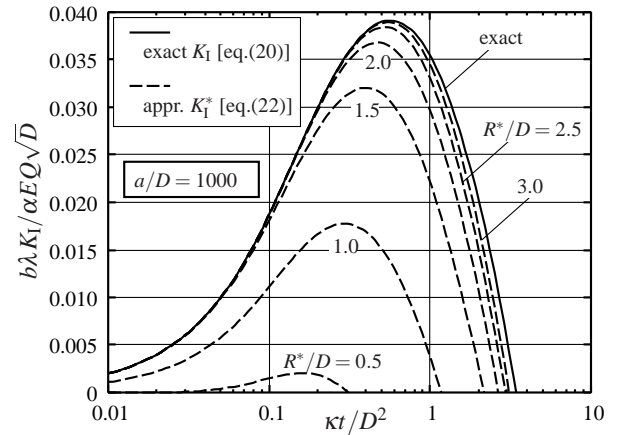


(c) Contour of $\pi\delta\sigma_T/\alpha E T_0 \delta A$

Fig. 5 Contour plots of stress intensity factors and T -stress for semi-infinite crack ($x < 0, y = 0$) due to a temperature rise T_0 at an infinitesimal area δA



(a) Short crack situation ($a/D = 0.1$)



(b) Long crack situation ($a/D = 1000$)

Fig. 6 Evaluation of approximated K_I formula for fixed heat source ($\gamma = 0$)

表面からの放熱を無視すると、式(3)で与えられる応力分布を考慮して、き裂面が表面力自由となる条件から求めたき裂先端(熱源側)の K_I の厳密解は式(20)で与えられる。

$$K_I = \frac{\alpha E Q}{8\pi b \lambda} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \left\{ \frac{1-e^{-S}}{S} - E_1(S) \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi a}} \quad (20)$$

ここで $S = (D+a-\xi)^2/4kt$ であり、 $E_1(S)$ は積分指数関数で

$$E_1(S) = \int_S^\infty \exp(-x) \frac{dx}{x} \quad (21)$$

で定義される。また Q は単位時間あたりの加熱エネルギーである。次に式(19)で R^* を有限とした近似解は次のように書ける。

$$K_I^* = \frac{\alpha E}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{R^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Re \left[\frac{T(r, \theta) e^{-3i\theta/2}}{\sqrt{r(1+re^{i\theta}/2a)}} \right] dr d\theta \quad (22)$$

4. 結 言

半無限板の自由縁と直交するき裂に対し、き裂先端近傍に熱源が作用する場合の応力拡大係数を解析した。自由境界の温度境界条件として断熱、等温、および温度境界条件が無視できる場合について考察し、移動熱源問題では温度境界条件を無視しても応力拡大係数に及ぼす影響が小さいことを示した。

さらに、直線き裂を有する無限板内の一点が温度変化した場合の弾性応力場を複素応力関数で表して、き裂先端に生じる応力拡大係数の理論解を導いた。また、き裂先端近傍の微小領域の温度上昇に着目し、温度上昇から直接応力拡大係数を求める近似式を提案した。

温度上昇に基づく応力拡大係数の近似式を数値的に検討した結果、静止熱源問題に対してはき裂先端を中心とし熱源とき裂先端との距離の2.5倍の半径内の温度上昇を、移動熱源問題ではき裂先端を中心とし熱源とき裂先端との距離の2.0倍の半径内の温度上昇をそれぞれ考慮すると、実用的に十分な精度で応力拡大係数が求まることが分った。

文 献

- (1) Imai, Y., Morita, H., Takase, T. and Koga, H., Possibility of Employing Thermal Stresses as a Cutting Device for Brittle Materials, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.55, No.509 (1989), pp.147-151.
- (2) Sawada, H., Imai, Y. and Saimoto, A., Thermal Stress Cleaving of a Thin Strip Using a Line Heat Source, Journal of the Japan Society of Precision Engineering, Vol.64, No.2 (1998), pp.302-306.
- (3) Saimoto, A., Imai, Y. and Motomura, F., Simulation of Crack Growth in Thermal Stress Cleaving Using Line Heat Source, JSME International Journal, Series A, Vol.42, No.4 (1999), pp.578-584.
- (4) Takeuchi, Y. and Noda, N., Analysis of Thermal Stresses (4th edition), Nissin Shuppan Ltd. (1989), pp.168-172.
- (5) Nisitani, H., The Two-Dimensional Stress Problem Solved Using an Electric Digital Computer, Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.70, No.580 (1967), pp.627-635.
- (6) Saimoto, A., Imai, Y. and Morita, H., Thermal Stress Intensity Factor of Semi-Infinite Crack due to Crack Face Heating, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.62, No.597 (1996), pp.1172-1179.
- (7) pp.41 of reference (4).
- (8) Chen, D.-H. and Nisitani, H., Extension of Body Force Method to Elastic-Plastic Problems, Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.51, No.462 (1985), pp.571-578.
- (9) England, A. H., Complex Variable Methods in Elasticity, John Wiley & Sons Ltd. (1971), pp.32-34.
- (10) pp.77-81. of reference (9).

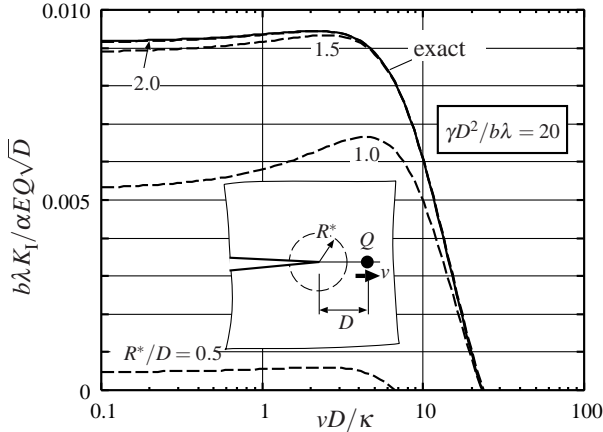


Fig. 7 Evaluation of approximated K_I formula for moving heat source ($\gamma D^2/b\lambda = 20$)

ここで \Re は実部を表し、 $T(r, \theta)$ は次式で与えられる。

$$T(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi b\lambda} E_1 \left(\frac{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}{4\kappa t} \right) \quad (23)$$

図6に式(20)および式(22)から得られる K_I の比較を示す。図中実線は式(20)の厳密解を表し、点線は式(22)において R^*/D を0.5刻で増加させながら近似解 K_I^* を求めたものである。極めて長い加熱時間では近似精度が悪くなるが、 $R^*/D > 2.5$ でき裂長さに依存せずほぼ正確な応力拡大係数が得られている。図6は板表面の熱伝達を無視した結果であるが、放熱を考慮すれば熱源から離れた位置での温度上昇が抑制されるため式(22)の近似精度はさらに向上する。

以上の議論は移動熱源にも適用できる。図7に x 軸上を等速度 v で移動する熱源から距離 D 後方の位置で熱源を追従する半無限き裂先端の応力拡大係数の解析例を示す。半無限き裂の問題では式(22)で $a \rightarrow \infty$ の極限をとり、 $T(r, \theta)$ として式(24)を用いれば良い。

$$T(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi b\lambda} \exp \left\{ \frac{v(D - r \cos \theta)}{2\kappa} \right\} \times K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{r^2}{D^2} + 1 - 2 \frac{r}{D} \cos \theta \right) \left(\frac{v^2 D^2}{4\kappa^2} + \frac{\gamma D^2}{b\lambda} \right)} \right) \quad (24)$$

ここで $K_0(x)$ はゼロ次の変形ベッセル関数であり、次式で定義される。

$$K_0(x) = \int_0^\infty \exp(-u - x^2/4u) \frac{du}{2u} \quad (25)$$

移動熱源問題では熱源が温度境界に極めて近い場合を除けば、応力拡大係数はほぼ温度境界条件と無関係となり、広い範囲の移動熱源問題で式(24)の温度場が利用できる。しかも、式(22)に基づいて得られる応力拡大係数の近似値は、き裂先端を原点として $R^*/D < 2.0$ の範囲の温度上昇を考慮すると実用上十分な精度に達する。