Title	ひとつのレンマ - 解の存在 -
Author(s)	村田, 省三; 橋口, 真理子
Citation	經營と經濟, vol.89(4), pp.17-26; 2010
Issue Date	2010-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/23420
Right	

ひとつのレンマ
── 解の存在 ──

村田省三
橋口真理子*

Abstract

In this paper, we consider the extended game of action commitment in Hamilton & Slutsky(1990) with mixed strategy. In the quantity setting duopoly games of this action commitment, there may be some mixed strategy equilibria. This paper gives a lemma as an answer to this existence problem.

Keywords: action commitment game, mixed strategy, duopoly game

1　はじめに

コミットメントゲーム（The Extended Game of Action Commitment）の支配されない純戦略均衡は，２つのシュタッケルベルグ均衡である。Hamilton & Slutsky(1990)（以下，HS(1990)）によるこの定理は，数理解析的条件に依拠しないから，基本ゲームが数量戦略ゲーム，価格戦略ゲームのいずれでも成立する。一方，Pastine & Pastine(2004)（以下，PP(2004)）は，同定理の基本ゲームが，右上がり最適反応曲線の価格戦略ゲームで，プレイヤー利得関数に大きな非対称性がなければ，混合戦略均衡はないことを証明した。この対称性条件は，村田・橋口(2009)により緩められた。この論法は，最適反応曲線の傾きが異符号となる場合についても，適用可能である。

*　九州大学大学院博士後期課程

これにたいして，本稿では，右下りの最適反応曲線をもつゲーム混合戦略均衡が存在するための条件を与える。これまで，誰も証明し得なかったひとつの Lemma の証明である。

混合戦略均衡には，両方のプレイヤーが共にコミットする場合，共に Wait 戦略をとる場合の利得定義に関する問題がある。両方コミットの場合，Dowrick(1986)および PP(2004)は，そのコミットメント戦略値が実現される（Stackelberg Walfare）とみており，混合戦略均衡の存在可能性が指摘される。HS(1990)では，最適反応曲線以外の点が実現されるのは不合理，仮に発生するなら何かの錯誤(error)によると考えている。

共に Wait 戦略のときには，後続期にどの戦略値がとられるかモデル設定によっては決定しにくい。Dowrick(1986)および PP(2004)は，基本ゲームにおける同時手番均衡が実現されると仮定するのに対し，HS(1990)は，展開形ゲームであることから，共に Wait の第２期は Wait 戦略のない部分ゲームとなり，間接的に，同時手番均衡が仮定される。ただし，混合戦略において，共にコミットが同時手番均衡を確定させるわけではない。

2　コミットメントゲーム

―***The Extended Game of Action Commitment***―

プレイヤー A，B のコミットメント値（制御変数）を x,y，$\pi_A(x,R_B(x))$，$\pi_B(R_A(y),y)$を最大にするコミットメント値を x^L, y^L，プレイヤーA,B の最適反応関数を $R_A(*),R_B(*)$ とする。q_A,q_B はコミットメント確率（制御変数），(x^S,y^S)は基本ゲームの同時手番均衡である。各プレイヤーは，コミットメントか Wait のいずれかを同時に選択，同時手番均衡と２つのシュタッケルベルグ均衡は R^2_+ に一意存在（相互に異なる），同時手番均衡に対応する戦略値以下となる領域とシュタッケルベルグ先手による戦略値を超える領域に undominated 領域はない基本ゲーム（戦略変数定義域は $X\subset R^2_+$）であ

る[*1]。プレイヤーA,Bの期待利潤は以下となり，混合戦略均衡は，次の4極値条件を満たす。

$$E\pi_{A(x,y)}=q_Aq_B\pi_A(x,y)+qA(1-q_B)\pi_A(x,R_B(x))+(1-q_A)q_B\pi_A(R_A(y),y)$$
$$+(1-q_A)(1-q_B)\pi_A(x^S,y^S)$$
$$E\pi_{B(x,y)}=q_Bq_A\pi_B(x,y)+q_B(1-q_A)\pi_B(R_A(y),\ y)+(1-q_B)q_A\pi_B(x,R_B(x))$$
$$+(1-q_B)(1-q_A)\pi_A(x^S,y^S)$$

$$\frac{\partial E\pi_A}{\partial x}=0,\ \frac{\partial E\pi_A}{\partial q_A}=0,\ \frac{\partial E\pi_B}{\partial y}=0,\ \frac{\partial E\pi_B}{\partial q_B}=0$$

このゲームについて，以下のLemmaが成立する。

補題1 利潤関数$\pi_A(x,\ y)$，$\pi_B(x,\ y)$は$X(\subset R^2_+)$で解析的関数，相手最適反応曲線上で2次導関数は負値定数，自己最適反応曲線上で2次導関数は正値定数とする。戦略値に関する極値条件から得られる最適確率$q_A,\ q_B(\in(0,1))$のもとで，確率に関する極値条件を満たす曲線（各プレイヤーの区分曲線)[*2]は，シュタッケルベルグ先手に対応する値を除いて連続とする。また，

$$\frac{\partial^2\pi_A}{\partial x^2}=Const<0$$

---

*1　通常例で成立する条件，$x^L>R_A(y^L)$，$y^L>R_B(x^L)$を仮定し，さらに，基本ゲームにおける同時手番ナッシュ均衡と同等利得を得られる等利潤線が相手最適反応曲線との交点をもつと仮定すれば十分。線形モデルでは容易に成立しやすい条件である。

なお，基本ゲームにおける同時手番ナッシュ均衡点を原点とする直交座標系において，パレート優位集合が出現する象限，undominated領域が出現する象限，一方が先手のシュタッケルベルグ均衡点が出現する象限，他方が先手のシュタッケルベルグ均衡点が出現する象限については，すべて同一象限に集中するか，すべて異なる象限に出現するか，さもなくば，パレート優位集合と一方のシュタッケルベルグの組が出現する象限とundominated領域と他方のシュタッケルベルグの組が出現する象限が隣り合わせに配置されるかのいずれかである。HS(1990)における定理5と定理7の関連を示す配置である。

*2　以下，とくに断らなければ，区分曲線は最適反応曲線を除く。

$$\frac{\partial^2\pi_B}{\partial y^2}=Const<0$$

$$\frac{\partial^2\pi_A}{\partial x\partial y}=Const<0$$

$$\frac{\partial^2\pi_B}{\partial x\partial y}=Const<0$$

$$\frac{\partial^2\pi_A}{\partial y^2}=Const=0$$

$$\frac{\partial^2\pi_B}{\partial x^2}=Const=0$$

とする。

基本ゲームの同時手番均衡点の右上あるいは左下に undominated 領域があるとすると，A の区分曲線の傾きのほうが小さければ，真正な混合戦略均衡がある。

証明．混合戦略均衡が存在すれば，それは undominated 領域になければならない。それ以外では，純戦略による逸脱が発生する。一方，undominated 領域は同時手番均衡点と２つのシュタッケルベルグ点で囲まれる矩形領域になるが，コミットメントが最適条件を満たすときには，$\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}$ と $\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}$ の符号が異なる必要があり（異符号領域），x^L, y^L を含まない。

undominated 領域内の異符号領域において，最適コミットメント確率は以下のふたつの条件を満たしているから，最適反応曲線が右下がりであるかどうかに関係なく，q_A, $q_B\in(0,\ 1)$[*3]。

$$q_A=\frac{\dfrac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}}{\dfrac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}-\dfrac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial y}}$$

*3　undominated 領域内の異符号領域以外では，少なくとも q_A，q_B の一方は非正値あるいは１以上になる。自己の最適反応曲線上では，相手プレイヤー設定の確率は１である。

$$q_B=\frac{\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dy}}{\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}-\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}}$$

これら最適確率を，確率変数についての極値条件に代入して，プレイヤーAの区分曲線とプレイヤーBの区分曲線が得られる。区分曲線が$(x^S,\ y^S)$を通ることは自明。通過しないとすると，仮定より，たとえば，プレイヤーBによる最適反応が$(x^S,\ y^S)$となるようなプレイヤーAの区分曲線上の点をとれることになり，以下が不成立。

$$q_B(\pi_A(x,\ y)-\pi_A(R_A(x),y))-(1-q_B)(\pi_A(x^s,\ y^s)-\pi_A(x,R_B(x)))$$

ところで，各プレイヤーの最適反応曲線はひとつの区分曲線になるため，それ以外の区分曲線の傾きをみるには，プレイヤーAについて$\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}$，プレイヤーBについて$\dfrac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial y}$で除したものを対象としなければならない。結局，プレイヤーA,Bの区分曲線の傾きは，各々，(1),(2)になる。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\pi_A(x,\ y)-\pi_A(R_A(y),y))\left(\dfrac{d^2\pi_A(x,R_B)}{dx^2}\cdot\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}-\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}\cdot\dfrac{\partial^2\pi_A(x,y)}{\partial x^2}\right)}{\left(\left(\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial\pi_A(R_A,y)}{\partial y}\right)\dfrac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}-(\pi_A(x,\ y)-\pi_A(R_A(y),y))\dfrac{\partial^2\pi_A(x,y)}{\partial x\partial y}\right)\cdot\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\left(\dfrac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial\pi_B(x,R_B)}{\partial x}\right)\dfrac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial y}-(\pi_B(x,\ y)-\pi_B(x),R_B(x))\dfrac{\partial^2\pi_B(x,y)}{\partial x\partial y}\right)\cdot\dfrac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}}{(\pi_B(x,\ y)-\pi_B(x,R_B(x)))\left(\dfrac{d^2\pi_B(R_A,y)}{dy^2}\cdot\dfrac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial y}-\dfrac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}\cdot\dfrac{\partial^2\pi_B(x,y)}{\partial y^2}\right)} \quad (2)$$

横軸にプレイヤーAの戦略値をとるとき，(1)については（原点側から）x^Lに近づけば傾きは無限大に発散，(2)については（原点側から）y^Lに近づけば傾きはゼロに収束する。コンパクト集合上の連続関数は有界であることから，$\dfrac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}$以外の項の絶対値は同時手番ナッシュ均衡点からシュタ

ッケルベルグ点までの間，ある正数以下となる。このため，シュタッケルベルグ点に近づけば，これらグラフは undominated 領域内にとどまることができない。

最適反応曲線がともに右下がりの数量戦略を基本ゲームとする場合，同時手番均衡点の右上に undominated 領域があるとすれば，プレイヤー A,B の区分曲線はともに右上がりになる。これは，以下の４不等式成立により，undominated 領域内の異符号領域で，(1)分母を $\frac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}$，(2)分子を $\frac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}$ で除したものが正値確定するためであり，(1)分子，(2)分母の符号が確定することによる。また，同時手番均衡点で，(1)分母＝0，(2)分子＝0が成立するためである。これら４不等式のうち，前半２不等式が(1)分母に，後半２不等式が(2)分子に対応する。

$$\left(\frac{\partial\pi_A(x,\ y)}{\partial y}-\frac{\partial\pi_A(R_A,\ y)}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\pi_A(x,\ y)}{\partial x^2}>0$$

$$\left(\frac{\partial^2\pi_A(x,\ y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\pi_A(R_A,\ y)}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\pi_A(x,\ y)}{\partial x}>0$$

$$\left(\frac{\partial\pi_B(x,\ y)}{\partial x}-\frac{\partial\pi_B(x,R_B)}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\pi_B(x,\ y)}{\partial y^2}>0$$

$$\left(\frac{\partial^2\pi_B(x,\ y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\pi_B(x,R_B)}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\pi_B(x,\ y)}{\partial y}>0$$

同時手番均衡点の左下に undominated 領域があるとしても，やはり，区分曲線は右上がりになる。これら４不等式が，ことごとく逆の不等号で成立するためであり，同時に，(1)，(2)における $\frac{\partial\pi_A(x,y)}{\partial x}$，$\frac{d\pi_A(x,R_B)}{dx}$，$\frac{\partial\pi_B(x,y)}{\partial y}$，$\frac{d\pi_B(R_A,y)}{dy}$ の符号も逆転するためである。

したがって，基本ゲームの同時手番均衡において，プレイヤー A，Bの区分曲線の傾きが共に正で，その方向に undominated 領域（したがって，シュタッケルベルグ点）があるとき，A の区分曲線の傾きのほうが小であれ

ば，これら区分曲線は，同領域内で交点をもつ。このとき，真正な混合戦略均衡がある。■

また，最適反応曲線がともに右上がりの基本ゲームあるいは，一方が右上がり他方が右下がりの最適反応曲線となる基本ゲームの場合にも，同様の方法によって，(1)分母，(2)分子の符号特定ができる。右下がりの区分曲線は，一方が右下がり他方が右上がりの最適反応曲線となる基本ゲームに特有である。したがって，undominated 領域内の異符号領域が同時手番均衡点の左下に位置しているならば，そもそも，同領域内に区分曲線の交点はなく，他の追加的条件によることなく, 真正な混合戦略均衡がないことを確認できる。混合戦略均衡の不存在証明には，PP(2004)簡便法もあるが，区分曲線形状は不明のままになる。

なお，補題１の証明には，簡単な別証明がある。しかし，一般証明への見通しを得るため，あえてこの形式とした。

―例―

通常の数量戦略線型複占ゲームに，真正な混合戦略均衡はない。以下の数量戦略ゲームで，これを確認する。

$$\pi_A(x, y) = (a - b(x+y))x$$
$$\pi_B(x, y) = (a - b(x+y))y$$

極大条件の縮約により，プレイヤー A,B の区分曲線は，各々，

$$(a^2 - 9aby + 18b^2xy)(a - 2bx - by) = 0$$
$$(a^2 - 9abx + 18b^2xy)(a - 2by - bx) = 0$$

となる。この双曲線の(x^S, y^S)における傾きは，プレイヤー A については２になり，最適反応曲線の傾きは－２となる。プレイヤー B については$\frac{1}{2}$と$-\frac{1}{2}$になる。(x^S, y^S)以外の undominated 領域で交点を保有しない。

3　おわりに

４極大条件から得られるプレイヤー A, B についての２つの区分曲線は，HS(1990)のコミットメントゲームでは，必ず基本ゲームの同時手番ナッシュ均衡点において交差する。また，各プレイヤーのシュタッケルベルグ先手のコミットメント値で傾きが無限大に発散するか０に収束するから，undominated 領域で，これら２条件を満たす２曲線がどこかに交点をもつ可能性を否定できない。ふたつのシュタッケルベルグ均衡点は，undominated 領域にあり，純戦略での均衡がこの２つだけであることから，混合戦略均衡の存在を予想するのは当然といえる。ところが，混合戦略の範囲では，これらふたつのシュタッケルベルグ点は，ある種の特異点になっており，同時手番ナッシュ均衡点以外の交点を保有するためには，外部経済などによる特殊な非対称の想定を必要とする。

最適反応曲線が共に右上がりである価格戦略ゲームにおいて，（自己の）シュタッケルベルグ先手価格が（自己の）シュタッケルベルグ後手価格より大きいという条件があれば，真正な混合戦略均衡がないことはPP(2004)により証明されている。この条件に依拠しなくとも，同様な結論が得られることは村田・橋口(2009)で示されている。同様の論法により，一方が右下がりの最適反応曲線，他方が右上がりの最適反応曲線をもつ場合，やはり，undominated 領域に真正な混合戦略均衡は存在しないことは自明。いずれの論法も，真正な混合戦略均衡が undominated 領域内に存在すれば，Wait 戦略と Commit 戦略とが無差別になることを利用して，この利得を上回る Commit 戦略値の存在を指摘し，矛盾を導くという簡便法である。

２つに縮約された極大条件式のグラフは，実は，同時手番ナッシュ均衡点以外にも交点を有する。これは，たとえば，同点の左下に広がるパレート優位集合内にある。ただし，q_A, q_B の値は１を越え，もはや確率ではない。

参 考 文 献

[1] Amir,.R.(1995).“Endogenous Timing Two-Player Games: A Counter Example” *Games and Economic Behavior*. **9**. 234−237.

[2] Dowrick,S.(1986).“von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles,” *Rand Journal of Economics*.**17**.251-260.

[3] Hamilton,J.,andS,Slutsky.(1990).“Endogenious Timing in Duopoly Games:Stackelberg or Cournot Equilibria,” *Games and Economic Behavior*.**2**.29-46.

[4] Pastine,I., and E,Pastine.(2004).“Cost of Delay and Endogeneous Price Leadership,” *International Journal of Industorial Organization*.**22**.135-145.

[5] 村田省三・橋口真理子(2009)「２つのコミットメントゲーム-Hamilton & Slutsky (1990) 定理７の構造-」九州経済学会報告論文。