



Title	周期入力をもつ微分方程式の初期値の一決定法
Author(s)	長尾, 道彦
Citation	長崎大学工学部研究報告, (3), pp.42-46; 1972
Issue Date	1972-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10069/23792">http://hdl.handle.net/10069/23792</a>
Right	

This document is downloaded at: 2020-10-26T19:38:10Z

# 周期入力をもつ微分方程式の初期値の一決定法

長 尾 道 彦\*

## A Method to Determine the Initial Value of Equation by the Model of the Sample-and-Hold Device

by

Michihiko NAGAO

(Electrical Engineering)

A numerical solution of a linear differential equation with a periodic input is obtained by computing over the series of cycles.

When the inputs of the equations are piecewise constant, another method is proposed to obtain the numerical solution of the equations in this paper. We consider the piecewise constant input as the output of the sample-and-zero-order-hold device. This method gives first the initial value exactly and simply. Then we obtain the solution by computation on the interval of only one cycle.

### 1. ま え が き

シリコン制御整流素子の開発により、交流電動機の駆動用電源として、インバータが広く用いられるようになった。これと並行して、インバータで駆動される電動機、即ち、入力波形がPWM波形（区分的に連続な波形）で駆動される電動機の各特性も解析されてきた。この解析の基礎は、電動機の電圧・電流の関係であり、この関係はd-q変換法により定係数線形微分方程式で表わされる。この方程式の定常状態での解を求めるために、一般に行われている方法は、最初、初期値を零とし、収束するまで繰返し行うか、実測によりだいたいの初期値を知って繰返し計算によるか、あるいはアナログ計算機と並用する方法等である。

本論文では、区分的に連続な入力を、連続な入力をサンプリングし、零次ホールド回路を通過した出力と見なして、連続系を離散値系に変換する。そして初期値が半周期の値と符号が逆で、絶対値が等しいという条件を用いて、PWM波形のように、区分的に連続な入力の初期値を一意的に求める方法を示す。

最初に、連続系を離散値系に変換し、初期値が一意に定まるための必要十分条件を示す。この方法で、与微分方程式の初期値を求め、この初期条件のもとでの方程式を解き半周期後の解と比較する。

### 2. 定係数線形連続系より定係数線形離散値系への変換

#### <2.1> 定係数線形連続系

T: 時間集合;

U: 入力集合= $R^m$ = $m$ 次元実数ベクトル空間;

X: 状態集合= $R^n$ = $n$ 次元実数ベクトル空間,

A:  $X \rightarrow X$ , B:  $U \rightarrow X$

は線形作用素とする。

この時、定係数線形連続系は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$(x(t) = dx/dt, t \in T, x \in X, u \in U)$$

で表わされ、初期値  $\tau \in T$ ,  $x(\tau)$  をもつ(1)式の解は次のようになる。

$$x(t) = \phi(t-\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t \phi(t-s)Bu(s)ds (t \in T) (2)$$

ただし,

$$\phi(t) = \exp(At) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A)^k}{k!} (E: \text{単位行列}) \quad (3)$$

<2.2> 定係数線形連続系より定係数線形離散値系への変換  $u \in U$  を周期  $t_s$  でサンプリングし, 零次ホールド回路にくわえ, その出力を  $u_d \in U$  とする. この時, (2)式は次のように変換され, 定係数線形連続系より定係数線形離散値系が得られる<sup>(3)</sup>.

$$x_d[(k+1)t_s] = \phi(t_s)x_d(kt_s) + G(t_s)u_d(kt_s) \quad \dots\dots(4)$$

$(k=0, 1, 2, \dots; x_d \in X, t_s \in T)$

ただし,

$$G(t_s) = \int_0^{t_s} \phi[(k+1)t_s - s] B ds \quad \dots\dots(5)$$

そして(4)式の解は, 初期値  $k=0, x_d(0)$  とすると

$$x_d(kt_s) = \phi^k(t_s)x_d(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \phi^{k-i-1}(t_s)G(t_s)u_d(it_s) \quad \dots\dots(6)$$

となる<sup>(3)</sup>.

(4)式より

$$x_d[(k+1)t_s] - x_d(kt_s) = [\phi(t_s) - E]x_d(kt_s) + G(t_s)u_d(kt_s)$$

$$\lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{x_d[(k+1)t_s] - x_d(kt_s)}{t_s} = \lim_{t_s \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi(t_s) - E}{t_s} x_d(kt_s) + \frac{G(t_s)}{t_s} u_d(kt_s) \right]$$

$$x(t) = \lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{\phi(t_s) - E}{t_s} x(t) + \lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{G(t_s)}{t_s} u(t) \quad \dots\dots(7)$$

となる. また

$$\lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{\phi(t_s) - E}{t_s} = \lim_{t_s \rightarrow 0} \left( A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k t_s^{k-1}}{k!} \right) = A \quad \dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{G(t_s)}{t_s} &= \lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} \phi(t_s - s) B ds \\ &= \lim_{t_s \rightarrow 0} \frac{1}{t_s} \left[ E \cdot S - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (t_s - s)^{k+1}}{k!} \right]_0^{t_s} \\ &= B \quad \dots\dots(9) \end{aligned}$$

であるから,  $t_s \rightarrow 0$  のとき  $x_d = x$  となる.

以上のことにより, 連続系を離散値系で近以できる. また, サンプリング周期  $t_s$  を短くすることにより, 離散値系による連続系の近以度は増加する.

最初から入力が区分的に連続な場合は, 連続な入力が既に, サンプラー零次ホールド回路を通過したとみなせば, (6)式により真の解が得られる.

### 3. 定係数線形離散値系の周期解

インバータをサンプラー零次ホールド系とみなすと,

一般に, サンプリング周期  $t_s$  が, インバータの発振周波数の一周期内に異なっている. このために, 各サンプリング区間ごとに解を求めて, 初期値が一意に定まるための必要十分条件を求める.

サンプリング周期  $t_s$  のとりかたは, 4の具体例で述べる.

#### <3.1> サンプリング周期の異なる時の離散値系

連続入力  $u(t)$  を考え, 区間  $[0, Ts/2] \in T$  を  $n$  区間に分ける. 各区間において時間  $t_{si} (i=0, 1, \dots, n)$  でサンプリングし, 零次ホールド回路の出力  $u_{di}$  を得る

この時, 各区間  $[t_i, t_{i+1}]$ , 出力  $u_{di}$ , サンプリング周期  $t_{si}$  それに各境界条件等の関係は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq t_1; & u_d = u_{d0}, t_s = t_{s0}, x(0) = x_{d0}(0) \\ t_1 \leq t \leq t_2; & u_d = u_{d1}, t_s = t_{s1}, \\ x(0) = x_{d1}(0) &= x_{d0}(t_1) \\ & \vdots \\ t_{n-1} \leq t \leq t_n; & u_d = u_{dn-1}, t_s = t_{sn-1}, x(0) = \\ & x_{dn-2}(t_{n-1})x(0) \quad \dots\dots \end{aligned} \right\} (9)$$

これより, 各区間での  $x_{di}$  は(6)式より次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} x_{d0}(k_0 t_{s0}) &= \phi_0^{k_0} x_{d0}(0) + \sum_{i_0=0}^{k_0-1} \phi_0^{k_0-1-i_0} G_0 u_{d0} \\ x_{d1}(k_1 t_{s1}) &= \phi_1^{k_1} x_{d1}(0) + \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \phi_1^{k_1-1-i_1} G_1 u_{d1} \\ & \vdots \\ x_{dn-1}(k_{n-1} t_{sn-1}) &= \phi_{n-1}^{k_{n-1}} x_{dn-1}(0) \\ & + \sum_{i_{n-1}=0}^{k_{n-1}-1} \phi_{n-1}^{k_{n-1}-1-i_{n-1}} G_{n-1} u_{dn-1} \end{aligned} \right\} (10)$$

ただし,

$k_i$  は  $0 \leq k_i \leq (t_{i+1} - t_i) / t_{si} (i=0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n$  なる自然数.

$$\phi_i^{k_i} = \phi_i(k_i t_{si}), G_i = \int_0^{t_{si}} \phi(t_{si} - s) B ds \quad \dots\dots(11)$$

(9), (10)式より  $x_{dn-1}(k_{n-1} t_{sn-1})$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} x_{dn-1}(k_{n-1} t_{sn-1}) &= \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \phi_{n-2}^{k_{n-2}} \cdots \phi_1^{k_1} \phi_0^{k_0} \\ & x_{d0}(0) \\ & + \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \phi_{n-2}^{k_{n-2}} \cdots \phi_2^{k_2} \cdot \phi_1^{k_1} \sum_{i_0=0}^{k_0-1} \phi_0^{k_0-1-i_0} \\ & G_0 u_{d0} + \cdots \\ & + \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \phi_{n-2}^{k_{n-2}} \sum_{i_{n-3}=0}^{k_{n-3}-1} \phi_{n-3}^{k_{n-3}-1-i_{n-3}} G_{n-3} \\ & \times u_{dn-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \sum_{i_{n-2}=0}^{k_{n-2}-1} \phi_{n-2}^{k_{n-2}-1-i_{n-2}} G_{n-2} u_{dn-2} \\
 & + \sum_{i_{n-1}=0}^{k_{n-1}-1} \phi_{n-1}^{k_{n-1}-1-i_{n-1}} G_{n-1} u_{dn-1} \dots \dots \dots (12)
 \end{aligned}$$

<3.2> 交番周期

解定義(4)式の解  $x_d(k t_s)$  が、一つの数  $T_s$  が存在して

$$x_d(k t_s + T_s) = x_d(k t_s) \quad (k t_s, T_s \in T) \dots \dots \dots (13)$$

を満足する時、 $x_d(k t_s)$  は周期  $T_s$  をもつ系(4)の周期解という。さらに

$$x_d(k t_s + T_s/2) = -x_d(k t_s) \dots \dots \dots (14)$$

を満足する時、 $x(k t_s)$  は交番周期解  $T_s$  をもつ系(4)の交番周期解という。

いま、各不連続点  $t_i$  をとると

$$\begin{aligned}
 k_0 t_{s0} = t_1, k_1 t_{s0} = t_2 - t_1, \dots, k_{n-1} t_{sn-1} = t_n - t_{n-1} \\
 = T_s/2 - t_{n-1}
 \end{aligned}$$

なる関係がある。これより

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \dots \phi_0^{k_0} &= \phi(k_{n-1} t_{sn-1} + \dots + k_0 t_{s0}) \\
 &= \phi(T_s/2) \\
 \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \dots \phi_1^{k_1} &= \phi(k_{n-1} t_{sn-1} + \dots + k_1 t_{s1}) \\
 &= \phi(t_n - t_1) \\
 &\vdots \\
 \phi_{n-1}^{k_{n-1}} \phi_{n-2}^{k_{n-2}} &= \phi(t_u - t_{n-2}) \\
 \phi_{n-1}^{k_{n-1}} &= \phi(t_n - t_{n-1})
 \end{aligned} \right\} (15)$$

を得、(12)式は(15)式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x_{dn-1}(k_{n-1} t_{sn-1}) &= \phi(T_s/2) x_{d0}(0) + \phi(t_n - t_1) \\
 & \sum_{i=0}^{k_0-1} \phi_0^{k_0-1-i} G_0 u_{d0} \\
 & + \phi(t_n - t_2) \sum_{i=0}^{k_1-1} \phi_1^{k_1-1-i} G_1 u_{d1} + \dots \\
 & + \phi(t_n - t_{n-1}) \sum_{i=0}^{k_{n-2}-1} \phi_{n-2}^{k_{n-2}-1-i} G_{n-2} u_{dn-2} \\
 & + \sum_{i=0}^{k_{n-1}-1} \phi_{n-1}^{k_{n-1}-1-i} G_{n-1} u_{dn-1} \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

定義により  $x_d(k t_s)$  が交番周期解をもつためには、 $T_s$  を  $x_d(k t_s)$  の周期とすると、 $k=0$  のとき、 $x_d(T_s/2) = -x_d(0)$  である。これは、 $[0, T_s]$  を任意の区間に分けた時でも成り立つから、(16)式より次の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
 x_d(T_s/2) = x_{dn-1}(k_{n-1} t_{sn-1}) = -x_d(0) = -x_{d0}(0) \\
 [\phi(T_s/2) + E] x_{d0}(0) = - \left[ \phi(t_u - t_{n-1}) \sum_{i=0}^{k_0-1} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi_0^{k_0-1-i} G_0 u_{d0} + \dots \dots \dots \\
 & + \sum_{i=0}^{k_{n-1}-1} \phi_{n-1}^{k_{n-1}-1-i} G_{n-1} u_{dn-1} \\
 & = - \sum_{j=1}^n \phi(t_u - t_j) \sum_{i=0}^{k_{j-1}-1} \phi_{j-1}^{k_{j-1}-1-i} G_{j-1} u_{dj-1} \dots (17)
 \end{aligned}$$

これより  $x_{d0}(0)$  が一意に定まるための必要十分条件は  $\det [\phi(T_s/2) + E] \neq 0 \dots \dots \dots (18)$  である。

(17)式より、 $\det A \neq 0$  であれば

$$\begin{aligned}
 G_i &= \int_0^{t_{si}} \phi(t_{si} - s) B_{ds} = \phi(t_{si}) \int_0^{t_{si}} \phi(-s) ds B \\
 &= \phi(t_{si}) \int_0^{t_{si}} \{ E - As + \frac{(As)^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{(At)^n}{n!} \\
 & + \dots \} ds \cdot B \\
 &= \phi(t_{si}) \left[ - \{ -At_{si} + \frac{(At)^2}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(At)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \} A^{-1} \right] \cdot B \\
 &= -\phi(t_{si}) \{ \phi(-t_{si}) - E \} A^{-1} B = \{ \phi(t_{si}) - E \} \\
 & \times A^{-1} \cdot B \\
 &= A^{-1} \{ \phi(t_{si}) - E \} \cdot B \phi(t) \text{ と } A^{-1} \text{ は交換可能} (19)
 \end{aligned}$$

が得られ、(17)式は(19)式より

$$\begin{aligned}
 \{ \phi(T_s/2) + E \} x_{d0}(0) &= - \sum_{j=1}^n \phi(t_n - t_j) \sum_{i=0}^{k_{j-1}-1} \\
 & \phi_{j-1}^{k_{j-1}-1-i} \\
 & \times \left[ A^{-1} \{ \phi(t_{si}) - E \} B \right] u_{dj-1} \\
 &= -A^{-1} \sum_{j=1}^n \phi(t_n - t_j) \sum_{i=0}^{k_{j-1}-1} \phi_{j-1}^{k_{j-1}-1-i} \\
 & \left[ \phi(t_{sj-1}) - E \right] B u_{dj-1} \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

となる。(18)式と  $\det A \neq 0$  が成り立てば、初期値  $x_{d0}(0)$  は次のよう表わされる。

$$\begin{aligned}
 x_{d0}(0) &= - \left[ A \{ \phi(T_s/2) + E \} \right]^{-1} \sum_{j=1}^n \phi(t_n - t_j) \\
 & \sum_{i=0}^{k_{j-1}-1} \phi_{j-1}^{k_{j-1}-1-i} \{ \phi(t_s) - E \} \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

計算機によれば、 $\phi(t)$  や逆行列  $[A \{ \phi(T_s/2) + E \}]^{-1}$  は簡単に求めることができるので初期値  $x_{d0}(0)$  も簡単に求まる。次に、ある二相サーボモータに、TRC 電圧波形 (波形の面積が常に一定な波形) がくわわった時の初期値  $x_{d0}(0)$  を求める。

4. 具体例

初期値  $x_{d0}(0)$  は、第七有効数字を四捨五入して6桁で求める。この求め方は、(3) 式の項数  $k$  を順

次ふやしていき、ある  $k$  の時の  $x_{do}(0)$  が  $(k-1)$  の時の  $x_{do}(0)$  と、有効数字七桁で等しくなった時に計算を打ち切り、この時の  $x_{do}(0)$  を初期値とする。一方  $\phi(t)$  の各要素は、有効数字七けた以上で第  $(k-1)$  項までの  $\phi(t)$  と等しくなければならない。

そして、この初期値  $x_{do}(0)$  を用いて、(1) 式の  $t=Ts/2$  における解  $x(Ts/2)$  を求め、 $-x_{do}(0) = x(Ts/2)$  の関係を見る。

計算機の使用にあたって、初期値  $x_{do}(0)$  を求めるための全ての計算は倍精度で行った。そのうち逆行列は Sweep Out 法を用いた。そして微分方程式の解法は単精度 Runge Kutta Gill 法を用いた。

<4.1> 例題 1 Fig. 1 (a) のような入力がくわわった時の初期値を求める。

図において  $u_d^1, u_d^2$  の両入力を同時に、 $0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$  へと順次サンプリングしていくと考える。すると、半周期  $0, Ts/2$  のみを考え、次の関係が成り立つ。

$$0 \leq t \leq t_1 = Ts/4; u_d = u_{d0} = [u^1_{d0}, -u^2_{d0} \ 0 \ 0]',$$

$$t_s = t_{s0} = Ts/4$$

$$t_1 \leq t \leq t_2 = Ts/2; u_d = u_{d1} = [u^1_{d0} \ u^2_{d0} \ 0 \ 0]',$$

$$t_s = t_{s1} = Ts/4$$

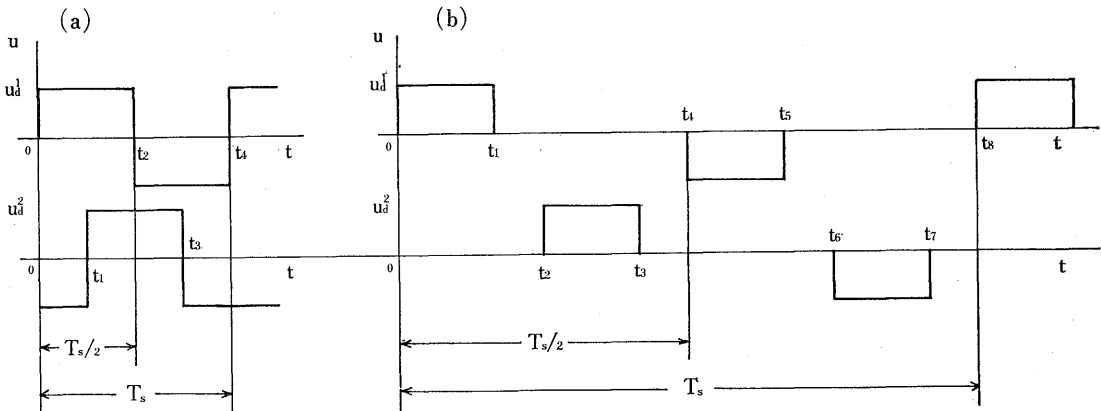


Fig. 1 Waveforms of input.

Table. 1 The computed values.

		$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$k$
例題 1	$x_{do}(0)$	-0.920392	$-0.985734 \times 10^{-1}$	0.257714	$0.840525 \times 10^{-2}$	35
	$x(Ts/2)$	0.920384	$0.985771 \times 10^{-1}$	-0.257712	$-0.841090 \times 10^{-2}$	
例題 2	$x_{do}(0)$	-0.448110	-0.561365	0.191682	-0.194888	72
	$x(Ts/2)$	0.448119	0.561325	-0.191667	0.194890	

ただし' 記号は転置を表わす。このとき、(21) 式における  $n, k_j-1$  は  $n=2, k_0=k_1=1$  であるから初期値  $x_{do}(0)$  は

$$x_{do}(0) = - [ \{ A \phi(Ts/2) + E \}^{-1} [ \phi(Ts/4) \{ \phi(Ts/4) \} - E ] B u_{d0} + \{ \phi(Ts/s) - E \} B U d_1 ] \dots \dots \dots (22)$$

となる。ここで、各数値を次のように与える。

$$T_s = 20.0 \times 10^{-3}, u^1_{d0} = u^2_{d0} = u^1_{d1} = u^2_{d1} = 100.0$$

$$A = \begin{pmatrix} -161.542 & 555.874 & 534.791 & 683.327 \\ -555.874 & -161.542 & -683.227 & 534.791 \\ 131.581 & -683.327 & -656.555 & -838.474 \\ 683.327 & 131.581 & 838.474 & -656.555 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4.405 & 0.0 & -3.588 & 0.0 \\ 0.0 & 4.405 & 0.0 & -3.588 \\ -3.588 & 0.0 & 4.405 & 0.0 \\ 0.0 & -3.588 & 0.0 & 4.405 \end{pmatrix}$$

<4.2> 例題 2 Fig. 1(b) の入力がくわわった時の初期値  $x_{do}(0)$  を求める。

ここでも前と同様に、 $0, t_1, t_2, \dots, t_8, \dots$  へと順

次  $u^1d, u^2d$  のサンプリングが同時に行われていく  
と考える。すると次の関係が成り立つ。

$$0 \leq t \leq t_1; u_d = u_{d0} = [u^1_{d0} \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t_s = t_{s0}$$

$$t_1 \leq t \leq t_2; u_d = u_{d1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t_s = t_{s1}$$

$$t_2 \leq t \leq t_3; u_d = u_{d2} = [0 \ u^2_{d2} \ 0 \ 0]^T, \quad t_s = t_{s2}$$

$$t_3 \leq t \leq t_4; u_d = u_{d3} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t_s = t_{s3}$$

この時、 $n=4, k_j-1=1$  であるから初期値  $x_{d0}(4)$

は

$$x_{d0}(0) = - \left[ A \{ \phi(T_s/2) + E \} \right]^{-1} \sum_{j=1}^4 \phi(t_4 - t_j)$$

$$\{ \phi(t_{sj-1}) - E \} B u_{dj-1}$$

となる。このうち、 $u_{d1} = u_{d2} =$  であるから

$$x_{d0}(0) = - \left[ A \{ \phi(T_s/2) + E \} \right]^{-1} \left[ \phi(t_4 - t_1) \{ \phi(t_{s0}) - E \} B u_{d0} + \phi(t_4 - t_2) \{ \phi(t_{s2}) - E \} B u_{d2} \right] \dots \dots \dots (23)$$

となる。ここで、各数値を次のように与える。

$$t_1 = 10.0 \times 10^{-3}, \quad t_2 = 15.0 \times 10^{-3}, \quad t_3 = 25.0 \times 10^{-3}, \\ t_4 = 30.0 \times 10^{-3}, \quad u^1_{d0} = u_{d2} = 100.0$$

$$A = \begin{pmatrix} -161.542 & 185.291 & 534.791 & 227.776 \\ -185.291 & -161.542 & -227.776 & 534.791 \\ 131.581 & -227.776 & -656.555 & -279.491 \\ 227.776 & 131.581 & 279.491 & -657.555 \end{pmatrix}$$

Bは例題1と同じである。

<4.3> 計算結果 例題1, 2の結果を Table 1  
に示す。この例題は、二相サボモータの電圧方程式  
を  $d-q$ 変換により得たものである。Table 1の  $x_{d0}(0)$   
は(22), (23)式より得た初期値であり、 $x(T_s/2)$ は、こ  
の  $x_{d0}(0)$  を用いて微分方程式を解いた時の、半周期  
 $T_s/2$  での解である。この表より、例題1の  $x^4$  を除  
いて第4有効けたまで  $x_{0d} = -x(T_s/2)$  の関係を満足  
していることが分る。初期値  $x_{d0}(0)$  をこの節で述べ

た方法で求め、この  $x_{d0}(0)$  を使用すれば、一周期の  
みの計算で微分方程式の解は求まる。

### 5. あとがき

以上、区分的に連続な交番周期入力をもつ、定係数  
線形微分方程式の初期値を求める一方法を述べた。こ  
の方法は、区分的連続な発生源をサンプラー—零次ホ  
ールド系とみなし、計算機を使用することによって、  
多次元入力の初期値を簡単に、一意的に求め得る。特  
に、インバータを使用している系の解析に応用出来る  
と思われる。チョップ等の直流周期入力をもつ場合に  
は、(13)式の関係より初期値を求めることができる。

計算にあたって留意すべきことは、第  $(k-1)$  項まで  
の  $\phi(t)$  と第  $k$  項までの  $\phi(t)$  とが必要な精度で等しく  
ならないうちに、求めている初期値がある有効けたで  
等しくなることである。例題2において、 $k=37$  で第  
7有効桁まで等しくなった。即ち、 $\phi(t)$  の収束性に  
対し十分注意する必要がある。

初期値を零とし、微分方程式の解を、繰返し計算に  
よって求めるのに用いる計算時間と、ここで述べた方  
法によって初期値を求めて、微分方程式を解くのに用  
する計算時間との比較については、検討が必要である。

例題1, 2に用いた計算時間は、入力カード読取りか  
ら行列A, B, ベクトル  $B \cdot u$  それに解  $x_{d0}(0)$  を書き  
出すまで、各々3分0.9秒, 4分19.9秒であった。こ  
こで使用した計算機は本学の FACOM270—20 である。

最後に、日頃ご指導いただいている本学東助教授に  
謝意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) S. A. Nar : Electromagnetic Energy Conversion  
Devices and Systems, Prentice-Hall, INC. (1970)
- 2) E. A. Coddington, N. Levinson : Theory of Ordinary  
Differential Equations, McGraw-Hill (1955)
- 3) B. C. Kuo : Automatic Control Systems, Prentice-  
Hall, INC. (1967)