連立方程式の解法とそのグラフ表現

清　木　泰　式*

A Solution of Simultaneous Equations and Its Graphical Representation.

by

Yasukazu SEIKI

(Electrical Engineering)

Problem Solving is an important theme of Information and Systems. As an example of Problem Solving, a graphical representation of simultaneous equations with solutions is discussed in this paper.

Simultaneous equations are represented by signal flow graph. Elimination is a general method to solve the problems which contain some unknown variables.

A solution graph as the system which deals with information about unknown variables can be constructed by the graphical representation of elimination.

1. まえがき

最近，Problem Solving というテーマが情報とシステムに関する研究の分野において重要な意味をもってきた．"問題を解く"ということ自体は当然重要な課題であるが，解が得られるまでの過程の表現形式を確立することは，Problem Solving の一般的な研究にとってさらに重要なことであると思われる．問題を解くことの第一段階として，与えられた問題をどのような形式で表現するかということを考えねばならない．問題の表現形式が与えられて，はじめて解法の形式も与えられる．多くの表現形式の中でも，幾何学的表現は解法に対する手がかりを直観的に求めやすいという点でしばしば用いられる．本稿でも問題の表現形式としてグラフ理論を用いる．そして問題表現の例として，シグナルフローグラフによる連立方程式の表現を考えてみる．連立方程式のように未知数を含む問題に対する解法としては，未知数の数を減らしていく消去法が最も一般的である．問題のグラフ表現と共にその解法もグラフ表現することにより，問題と解法との結びつきが同一の空間で表わされる．

問題を解くということを情報とシステムの立場から考察することが本稿の主旨であるが，その一例としての連立方程式の解法のグラフ表現は，未知数という情報の流れに関するシステム構成を試みたものである．解法のグラフ表現から，問題に対する解は単に表現形式の面からのみでなく，演繹を通しての情報とシステムの立場から考察することにより，その真の構造が明らかにされることがわかる．

2. 連立方程式のグラフ表現および解法グラフ

シグナルフローグラフ（以下単にグラフという）は次のような表現形式をもつ．

Fig. 1 は y=ax を表わし，Fig. 2 は

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n$$

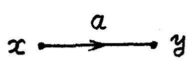

Fig. 1

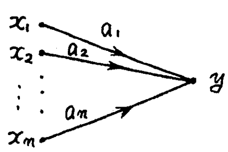

Fig. 2

を表わす．また Fig. 3 は次のように変形できる．

$$z = ax,\ y = bz \rightarrow y = (ab)\ x$$

したがってこれは Fig. 1 のように表わされる．

* 電気工学教室

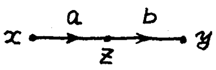

Fig. 3

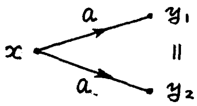

Fig. 4

Fig. 4 のような場合

$y_1 = ax,\ y_2 = ax \rightarrow y_1 = y_2 = ax$

であるから，これも Fig. 1 と同形になる．

以上のグラフの性質を用いて，次のような連立方程式をグラフ表現してみよう．（Fig. 5）

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = c_1 & (1) \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 = c_2 & (2) \end{cases}$$

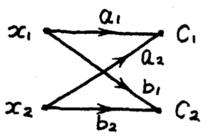

Fig. 5

一般に連立方程式を手計算で解く場合，未知数を順次消去していく方法が用いられる．1つの未知数を消去するためには2つの関係式が必要である．上記の例において x_1 だけを含む関係式を求めるための操作を示してみよう．

$(1) \times b_2 + (2) \times (-a_2)$

これをグラフ表現したものが Fig. 6 である．ここ

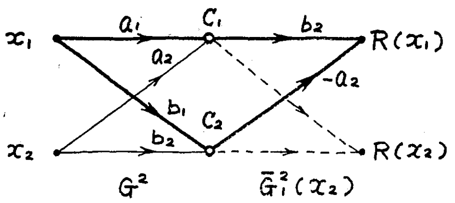

Fig. 6

に，G^2 は2元連立方程式のグラフ表現を表わし，$R(x_1)$ は x_1 だけを含む関係式であることを表わす．このグラフにおける x_1 および x_2 に関する情報の流れを考えてみよう．シグナルフローグラフの性質により，$R(x_1)$ は x_1 と x_2 との1次結合により表わされるが，$R(x_1)$ は x_1 のみを含む関係式であるので x_2 の項の係数の和は0になるはずである．x_2 の項の係数は x_2 から $R(x_1)$ に到る径路により与えられる，Fig. 6 から，径路 $x_2\,c_1\,R(x_1)$ は $a_2\,b_2$ なる係数をもちかつ径路 $x_2\,c_2\,R(x_1)$ は $b_2(-a_2)$ なる係数をもつことがわかる．2つの径路の係数の和をとれば，

$a_2\,b_2 + b_2\,(-a_2) = 0$

となり，x_2 の項が消去されていることが確かめられる．$\bar{G}_1^2\,(x_2)$ を x_2 に対する消去グラフという．

Fig. 6 を $G^2 \triangleright \bar{G}_1^2\,(x_2)$ と表わす．ここに ▷ は消去法によるグラフの結合を表わす．問題のグラフと消去グラフとの結合が解を与えるとき．これを解法グラフという．Fig. 6 において $R(x_1)$ の値を求めるとき，x_2 の項は存在しないので太線の部分のみを考えればよい．G^2 の太線部分を$G_0^2\,(x_1)$ と表わせば，

解法グラフ $G_0^2\,(x_1) \triangleright \bar{G}_1^2\,(x_2)$ から x_1 が得られる．実際径路 $x_1\,c_1\,R(x_1)$ および径路 $x_1\,c_2\,R(x_1)$ から

$$R\,(x_1) = (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,x_1 \qquad (3)$$

が得られる．一方，c_1 および c_2 から $R\,(x_1)$ を求めれば次のようになる．

$$R\,(x_1) = c_1\,b_2 - c_2 a_2 \qquad (4)$$

（3）および（4）から $R(x_1)$ を消去して x_1 が得られる．x_2 についても同様の方法を適用すればよい．x_1 を求めるための解法グラフを $G^2(x_1)$ と表わす．Fig. 6 を完成させれば $G^2(x_1)\ \mathrm{U}G^2\,(x_2)$ が得られる．一般に，解法グラフを同一の構成により同時に表わすことができるのは2つの未知数に対してのみである．

次に3元連立方程式を考えてみよう．

$$\begin{cases} a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = d_1 & (5) \\ b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + b_3\,x_3 = d_2 & (6) \\ c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_3 = d_3 & (7) \end{cases}$$

まず x_3 を消去するためのグラフ$\bar{G}_1^3\,(x_3)$ を構成する．3元連立方程式の場合，x_3 を消去して得られる式は全部で3つ存在する．これらを $R_1^1\,(x_1,\ x_2)$，$R_2^1\,(x_1,\ x_2)$，$R_3^1\,(x_1, x_2)$ と表わす．Fig. 7 に示

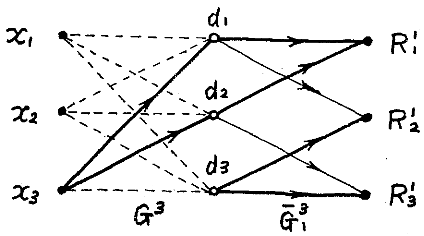

Fig. 7

すように，x_3 から R_1^1 へ到る径路を考えると，$x_3\,d_1\,R_1^1$ および $x_3\,d_2\,R_1^1$ の2つが存在する．これらの係数の和が 0 となるためには $d_1\,R_1^1 = b_3$ かつ $d_2\,R_1^1 = -a_3$ とすればよいことがわかる．R_2^1 に対しては $x_3\,d_1\,R_2^1$ および，$x_3\,d_3\,R_2^1$，また R_3^1に対して

は $x_3 d_2 R_3^1$ および $x_3 d_3 R_3^1$ を考えれば $\bar{G}^3(x_3)$ のすべての係数が決まる.

次に R_i^1 (x_1, x_2) から x_2 を消去するためのグラフ $\bar{G}_2^3$ (x_2) を構成する. x_2 を消去すれば x_1 のみを含む関係式が得られる. 今これを R_1^2 (x_1) とする. x_2 を消去する方法は Fig. 8 の如く3つ存在する. その

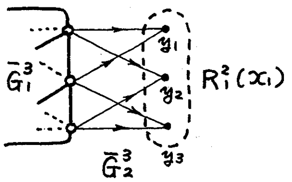

Fig. 8

1つを y_1 とし x_2 から y_1 へ到る径路を考える. y_1 には x_2 の項は含まれないので, そのすべての径路の係数の和は0になる. いま $d_2 R_1^1$ および $d_3 R_2^1$, $d_1 R_1^1$, および $d_3 R_3^1$, $d_1 R_2^1$, および $d_2 R_3^1$ のように, 係数が同一もしくは符号のみが異なる2つの径路を考えるとき, これらの各々を通る径路の係数の和は0になる. したがって, 例えば Fig. 9 の太線部分のよう

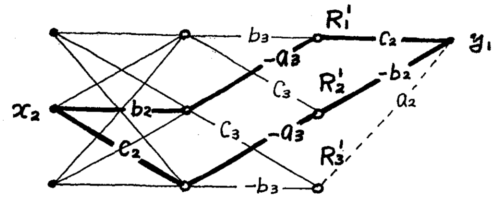

Fig. 9

な径路を考えるとき, $R_1^1 y_1 = c_2$ および $R_2^1 y_1 =$ $= b_2$ と与えられることは明らかである. y_2, y_3 についても同様のことを行なったとき, 結局これらが同一の点 R_1^2 (x_1) となることがわかる. Fig. 10 はこうして得られた x_1 に対する解法グラフである.

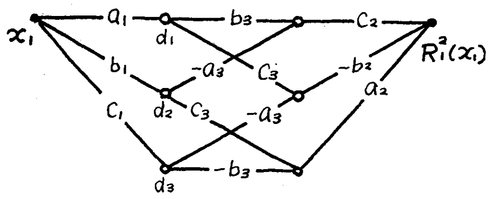

Fig. 10 G_0^3 (x_1)

このグラフから実際に x_1 を求めてみよう. まず, x_1 から R_1^2 (x_1) へ到るすべての 径路の係数の和Dを求める.

$$D = c_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) - b_2(a_1 c_3 - a_3 c_1) + a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1)$$

この値が未知数の係数行列式であることは容易に確かめられる. 次に d_1, d_2, d_3 を用いて R_1^2 (x_1)を求める. $R_1^1 = d_1 b_3 - d_1 a_3$, $R_2^1 = d_1 c_3 - d_3 a_3$, $R_3^1 = d_2 c_3 - d_3 b_3$

$$R_1^2\ (x_1) = c_2 R_1^1 - b_2 R_2^1 + a_2 R_3^1 \tag{8}$$

$$R_1^2\ (x_1) = D x_1 \tag{9}$$

(8) (9) より R_1^2 (x_1) を消去して x_1 が求められる.

最後の例として, 4元連立方程式の x_1 に対する解法グラフを Fig. 11 に示す.

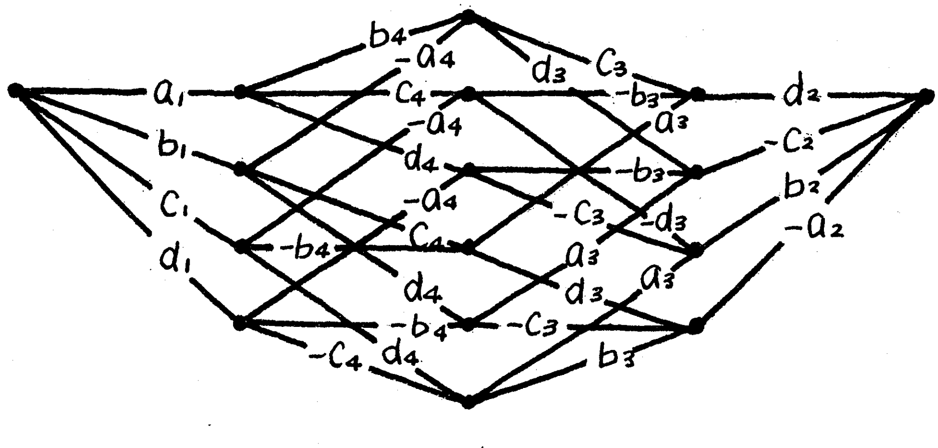

Fig. 11 G_0^4 (x_1)

3．解法グラフの基本的性質

本節において，連立方程式およびその解法のグラフ表現に関する形式化を行ない，いくつかの基本的な命題を導く．

（定義１） Gn ： n元連立方程式のグラフ表現．

（定義２） $\bar{G}^n_k(x_i)$ ： k番目に構成された消去グラフ（未知数 x_i を消去することを表わす）．

（定義３） R^k_i ： $\bar{G}^n_k$ に現われる点（ i は $\bar{G}^n_k$ における i 番目の点であることを表わす）

$R^k_i(x_j)$ は x_j のみに関する関係式であることを表わす．一般に，$R^k_i(X_j)$ は未知数の集合 X_j のみに関する関係式で，X/X_j（／は集合の差を表わし，X は全未知数を表わす）の要素は含まないことを表わす．$R^k_i(X_j)$ は解法グラフの構成においては，未知数の存在に関する情報を提示するのみである．

（定義４） $G^n_0(x_i)$： Gn 中の x_i のみに関する部分グラフ． これを用いて Gn を表わせば次のようになる． $Gn=G^n_0(x_1) \cup G^n_0(x_2) \cup \cdots \cup G^n_0(x_n)$

（定義５） $G_n(x_i)$： n 元連立方程式の x_i に対する解法グラフ．

解法グラフは Gn に消去グラフを結合させて得られるが，グラフ結合を次のように表わす．

$$G^n_0(x_i) \triangleright \bar{G}^n_1(x_{j1})$$

$\triangleright$ は消去法によるG^n_0 と $\bar{G}^n_1$のグラフ結合を表わす．一般に$G^n_0 \triangleright \bar{G}^n_1 \triangleright \bar{G}^n_2 \triangleright \cdots \triangleright \bar{G}^n_{n-1}$ と表わされる．未知数を消去する順序は任意であるから， x_i に対する解法グラフは次のように与えられる．

〔命題１〕 $Gn(x_i)=G^n_0(x_i) \triangleright \bar{G}^n_1(x_{j1}) \triangleright \cdots \triangleright \bar{G}^n_{n-1}(x_{jn-1})$

ここに，$(j_1, j_2, \cdots, j_{n-1})$ は $(1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$ の任意の置換である．

すでに消去された x_i に対する消去グラフを構成することは無意味であるから次のことがいえる．

〔命題２〕 $(G^n_0 \triangleright \bar{G}^n_1 \triangleright \cdots \triangleright \bar{G}^n_k(x_i) \triangleright \cdots \triangleright \bar{G}^n_r)\ \overline{\triangleright}\ \bar{G}^n_{r+1}(x_i)$

ここに $\overline{\triangleright}$ は $\triangleright$ の否定を表わす．

（定義５） ＜G＞：グラフGの径路の係数集合．

（定義６） $\langle G^n_0(x_i) \rangle = K^0_i$

ただしK^0_i の要素はすべて相異なるものとする．また $K^0_i \fallingdotseq K^0_j \ (i \fallingdotseq j)$ とする．

次に消去グラフにおける演算系を定義する． Fig. 12 における x_i からRに到る２つの径路の係数の和が0になるとき，次のように k_1，k_2 を定める．

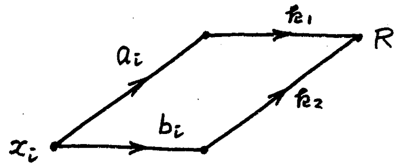

Fig. 12

$$a_i k_1 + b_i k_2 = 0 \iff \begin{cases} k_1=b_i,\ k_2=-a_i & \text{or} \\ k_1=-b_i,\ k_2=a_i \end{cases}$$

これを単に $\dot{k}_1=b_i$，$\dot{k}_2=a_i$ と表わすことにする．

$a_i, b_i \in K^0_i$ とすれば， $\dot{k}_1, \dot{k}_2 \in K^0_i$ となることがわかる．上式の両辺に A_j を掛けると次式を得る．

$$a_i A_j k_1 + b_i A_j k_2 = 0$$

これを形式的にグラフ表現すれば Fig. 13 の如くなる．消去グラフにこのような径路が存在することは，次のようにして証明される．

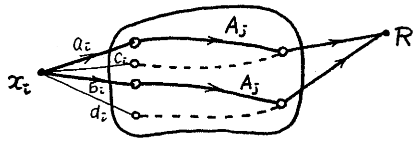

Fig. 13

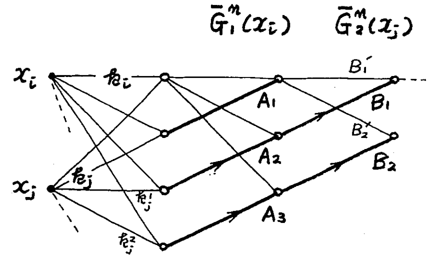

Fig. 14

Fig. 14 において $\bar{G}^n_1(x_i)$ を考える．A_1，A_2，A_3 に対して $\dot{A}_1=\dot{A}_2=\dot{A}_3=k_i$ となることはグラフから明らかである．また，このような径路に対して $\bar{G}^n_2(x_j)$ を考えるとき，$k_jA_1B'_1 + k^1_j A_2B_1=0$ より $(k_jB'_1 + k^1_j B_1)k_i=0 \iff \dot{B}_1=k_j$ また $k_j A_1 B'_2 + k^2_j A_3 B_2=0$ より $\dot{B}_2=k_j$ を得る．したがって上記の例では $\dot{A}_2 \dot{B}_1=\dot{A}_3 \dot{B}_2=k_i k_j$ なる係数をもつ径路が存在することが示される．またこのような径路においては図の破線部分のように，異なる２点から出発した径路が他の径路と２点で一致するということは起こらない．実際，このようなことが起こると仮定すれば，

$\dot{k}_1=b_i=d_i$, $\dot{k}_2=a_i=c_i$ となり, $a_i \neq c_i$, $b_i \neq d_i$ と矛盾する.

この性質から次の命題が導かれる.

〔命題3〕 Gn において R_k^{n-2} の数はn個である.

〔命題4〕 $\langle G^n_{n-1}(x_i)\rangle = K_i^0$

さらに次の命題が成立する.

〔命題5〕 解法グラフ Gn (x_i) において, x_i から $R^{n-1}(x_j)$ に到るすべての径路の係数の和は $i=1,2 \cdots, n$ に対して一定である. ただし $i \neq j$ とする.

(証明) 2つの解法グラフ $G^n(x_i)$ および $G^n(x_j)$ $(i \neq j)$ を同時に考える. この2つの解法グラフは次のような消去グラフを共通の部分グラフとしてもつ.

$$\bar{G}_1^n(x_{j1}) \triangleright \bar{G}_2^n(x_{j2}) \triangleright \cdots\cdots \triangleright \bar{G}_{n-2}^n(x_{jn-2})$$

ここに, $(j_1, j_2, \cdots\cdots, j_{n-2})$ は $(1, 2, \cdots\cdots, i-1, i+1, \cdots\cdots, j-1, j+1, \cdots\cdots, n)$ の任意の置換である. この消去グラフにおける径路の係数集合をSとする. 定義6および命題4により, $G_{n-}(x_i)$ の径路の係数は

$$\langle G_0^n(x_i)\rangle S \langle G^n_{n-1}(x_j)\rangle = K_i^0 \ SK_j^0$$

として与えられる. 同様にして $G_n(x_j)$ に対して $K_j^0 \ SK_i^0$ が得られる. 命題3から $G_0^n(x_i)$ の径路の数と $G^n_{n-1}(x_j)$ の径路の数はいずれもnであることがわかる. したがって $K_i^0 \ SK_j^0$ と $K_j^0 \ SK_i^0$ は同等となり, 各々の係数の総和は等しくなる. (QED)

4. 解法グラフの情報およびシステム論的考察

連立方程式のグラフ表現から解法グラフが得られるまで基本的な考えとなっていたのは, 未知数に関する情報の流れとそれを処理する消去グラフであった. 解法グラフの出発点は $G_0^n(x_i)$ であるが, これ自体は Gn の部分グラフではあっても関係式としての表現をもたない意味のないものである. しかし, 情報の流れを考慮しながら各消去グラフを構成する場合には, 重要な役割りを果している. 具体的な数式の展開による解の求め方は, 各段階において等式として意味のある形での表現が要求される. 一方, グラフによる解法では未知数そのものすら扱わず, それに関係した情報の処理のみを考えればよい. その上, 解法グラフを構成するに当って, 各消去グラフ中の点は情報の内容を示すための媒体として用いられるだけで, 具体的な計算には一度も用いられていない. 径路およびその係数のみが計算の対象となっている. しかしその反面, ある未知数に関する情報をすべて取り出すため, 操作が多くなるという欠点もある.

解法グラフを形成するためには Gn における各未知数を情報源と考えればよいが, 解法グラフから実際に解を求める場合, Gn における未知数 x_i と定数 e_i の2つの情報源に対するネットワークを考えることになる. この2つの情報の流れが同一の終端点に到るとき, 未知数が既知数により表わされ解が得られる. 解法グラフ Gn (x_i) は, x_i 以外の未知数に関する情報はすべて消去してしまうシステムであるともいえる.

本稿で得られた結果は, 本質的には消去という操作をグラフ表現することに帰着される. このように, problem solving のテーマを扱う場合には, 解を求めるための基本的なアルゴリズムにもとずく表現形式を与えることが重要である.

5. あとがき

問題を解くということを情報とシステムの立場から考察する例として, 連立方程式の解法をグラフ表現することを試みた. 問題を解くためのアルゴリズム (ここでは消去法) そのものをグラフ表現することにより, そして未知数という情報の流れを考察することにより, 解法グラフというシステムが得られた.

本稿で用いたシグナルフローグラフは変数の1次関係を表わすには有効な方法であるが, その他の形式の方程式や問題を考察する場合には, 別の演算形式をもったグラフを考える必要があると思われる.