



| | |
|------------|---|
| Title | 任意軸線形状を有する変断面アーチの座屈解析 |
| Author(s) | 崎山, 毅; 栗原, 和夫; 相良, 治夫; 宗, 秀行 |
| Citation | 長崎大学工学部研究報告, (9), pp.15-24; 1977 |
| Issue Date | 1977-07 |
| URL | http://hdl.handle.net/10069/23885 |
| Right | |

This document is downloaded at: 2019-09-18T01:28:54Z

任意軸線形状を有する変断面アーチの座屈解析

崎山 毅*・栗原和夫*

相良治夫**・宗 秀行***

An Analysis of Buckling of Variable Cross
Sectional Arches with Any Shape

by

Takeshi SAKIYAMA, Kazuo KURIHARA

(Department of Structural Engineering)

Haruo SAGARA

(Graduate Student in Course of Structural Engineering)

Hideyuki SOU

(Taihei Kogyo Co. Ltd.)

In-Plane finite deformation theory of the rib arch as a main structure of arch bridge has been developed to require arbitrariness and generality in regard to loading condition, variable cross section, plane shape of the arch axis and boundary condition.

At the same time, the theory has been developed higher considering the effect of arch weight, initial imperfection, extensionality of arch axis and shear deformation.

In this paper, buckling problem of fixed arch, 1-hinged arch, 2-hinged arch and 3-hinged arch with arbitrary plane shape of arch axis were analyzed under arbitrary loading condition, considering the effect of extensionality of arch axis and shear deformation.

As the result of numerical analysis concerning the buckling load, the effect of span rise ratio, plane shape of arch axis, boundary condition and loading condition were clarified.

1. 序 言

アーチ系橋梁の主構として用いられるリブアーチの軸面内座屈耐力問題に関しては、古くから数多くの研究が行われてきている。1900年代の初期より30~40年

間においては、等分布水圧荷重を受ける円弧アーチあるいは鉛直分布荷重を受ける放物線アーチなどの pure buckling に関する次のような研究が主として行われた。

* 構造工学科

** 大学院構造工学専攻

*** 太平工業(株)

E. Gaber⁽¹⁾ は2 ヒンジアーチ、固定アーチおよび3 ヒンジアーチに関して、支間 180cm の模型による座屈実験を行い、既出の理論式との比較を試みた。F. Stüssi⁽²⁾ は鉛直等分布荷重を受ける固定放物線アーチの座屈性状を理論解析した。A. Nasarow⁽³⁾ は3 ヒンジ円弧アーチの座屈条件式を求め、これにもとづく座屈強度公式を提示し、E. Gaber の実験との比較を行っている。B. Busch⁽⁴⁾ は固定アーチに関する実験的研究を行い、アーチリブの断面の変化が座屈強度に大なる影響をおよぼすことを明らかにした。S. Woinowsky-Kyieger⁽⁵⁾ は3 ヒンジ円弧アーチの座屈強度を解析し、Nasarow と同様の結果を得ている。A. N. Dinnik⁽⁶⁾ は定断面および変断面の2 ヒンジ、固定、3 ヒンジおよび単ヒンジアーチの座屈性状を解析した。

1960年代に至ってアーチクラウンに作用する集中荷重に対する耐荷性能の解析問題を中心に、有限変形理論に基づく研究が、主として円弧アーチに関して盛んに行われるようになった。

A. Gjelsvik and S. R. Bodner⁽⁷⁾ はエネルギー法により拱矢比 $f/L < 0.05$ なる偏平な固定アーチの飛移り座屈を理論解析し、また、実験的な解析も行っている。H. L. Schreyer and E. F. Masur⁽⁸⁾ は偏平な固定アーチの分岐座屈を解析し、Gjelsvik らの実験結果との比較を行い、また、水圧荷重が作用する場合の耐荷性状をも解析している。

H. D. Conway and C. F. Lo⁽⁹⁾ は細長比 $\sqrt{AL^2/I} = 40.80$ なる2 ヒンジアーチの座屈耐荷力を拱矢比 $f/L = 0.0 \sim 0.5$ なる場合に関して算定し、部材軸の伸縮性の影響を明らかにした。J. V. Huddleston⁽¹⁰⁾ は方法論的立場から2 ヒンジアーチの分岐座屈について、two-point boundary-value problem としての解析法を提示している。D. A. DaDeppo and R. Schmidt⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ は自重に対する2 ヒンジアーチの安定性に関する研究を行い、集中荷重に対する耐荷性との比較から、自重の影響を無視しえないことを明らかにした。著者らの1人⁽¹³⁾ も部分的分布荷重に対する座屈耐荷性に関して、線形化有限変形方程式による解析を行い、座屈モードにおよぼす拱矢比と細長比の影響を明らかにした。

円弧以外の軸線を有するアーチに関して J. V. Huddleston⁽¹⁴⁾ は文献⁽¹⁰⁾ の方法を発展させ、集中荷重に対する任意形状の軸線を有するアーチの座屈耐荷力解析法を提示し、円形および放物線形の2 ヒンジアーチに関する解析を行った。またアーチの安定性におよぼす部材自重の影響について、J. S. Kennedy

and A. S. Aggarwal⁽¹⁵⁾ は偏平な固定円弧アーチの、集中荷重に対する座屈耐荷性能におよぼす部材自重の効果を理論的および実験的に解析し、偏平な固定円弧アーチの耐荷性に対して、部材自重が危険側の影響を与えることを明らかにした。

以上のごとくリブアーチの座屈耐荷力理論は荷重条件、変断面性、軸線形状あるいは境界条件などに関して任意性あるいは一般性を求める方向へ発展すると同時に部材自重の影響あるいはアーチ製作時等における軸線の初期不整、部材軸伸縮性、せん断変形性などの影響を含めた、より高度の理論へと発展しつつあることが観取される。

本研究は任意荷重の作用を受ける、変断面を有する任意軸線形状の、2 ヒンジ、固定、3 ヒンジおよび単ヒンジアーチに関して、部材軸伸縮性およびせん断変形を考慮した座屈耐荷力解析を行うものである。

2. 基礎方程式の誘導

1) 有限変形方程式

変形状態におけるアーチの弧長 ds^* および曲率半径 R^* を有する任意の微小部分に関する、平衡条件は図1を参照して、次の3式にて表わされる。

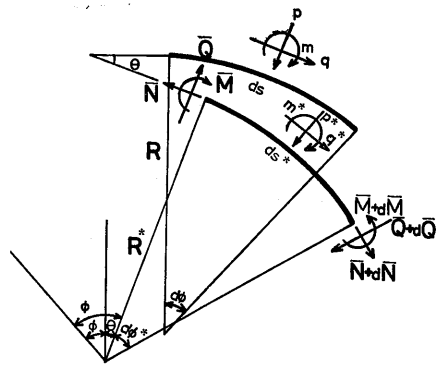


Fig. 1 Arch element

$$\frac{d\bar{Q}}{ds^*} + \frac{\bar{N}}{R^*} + p^* = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds^*} - \frac{\bar{Q}}{R^*} + q^* = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{d\bar{M}}{ds^*} - \bar{Q} - m^* = 0 \quad (1. c)$$

ここに \bar{M} 、 \bar{N} および \bar{Q} はアーチの任意断面における曲げモーメント、軸力およびせん断力であり p^* および q^* 、 m^* は微小部分 ds^* に作用する法線方向および接線方向の分布荷重強度、分布モーメント荷重強度である。

変形前のアーチの弧長および曲率半径をそれぞれ ds および R とし、はじめに微小部分 ds に作用している法線方向および接線方向荷重強度、分布モーメント荷重強度を p および q 、 m とすれば、 p^* 、 q^* 、 m^* と p 、 q 、 m との関係は、荷重方向が変形前後において変わらないものとして図1より次式のごとく求まる。

アーチ部材軸のたわみ角を θ として

$$p^* = p \cos \theta - q \sin \theta \quad (2. a)$$

$$q^* = p \sin \theta + q \cos \theta \quad (2. b)$$

$$m^* = m \quad (2. c)$$

任意形の軸線を有するアーチの変形状態での微小部分 ds^* は十分正確に円弧とみなすことができる。その中心角を $d\phi^*$ とすれば、変形アーチの任意点の曲率は

$$\frac{1}{R^*} = \frac{d\phi^*}{ds^*} = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{d\phi^*}{ds} \quad (3)$$

ここに、 ϵ はアーチ部材軸の歪を表わす。図1より、 $\phi^* = \theta + \phi$ であるゆえ

$$\frac{d\phi^*}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{R} \quad (4)$$

式(3)および(4)より、次の関係が誘導される。

$$\frac{R}{R^*} = \frac{1}{1+\epsilon} \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \quad (5)$$

また、変形前後の微小部分 ds および ds^* の中心角 $d\theta$ および $d\phi^*$ の間に $d\phi^* \doteq d\theta$ なる近似関係を認めれば、次の関係がえられる。

$$ds^* = \frac{R^*}{R} ds \quad (6)$$

式(2. a) ~ (2. c) および (3) ~ (6) を用いれば、平衡条件式(1. a) ~ (1. c) は次の諸式のごとく書き改められる。

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + \frac{\bar{N}}{R} + (p \cos \theta - q \sin \theta)(1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. = 0 \quad (7. a)$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} - \frac{\bar{Q}}{R} + (p \sin \theta + q \cos \theta)(1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. = 0 \quad (7. b)$$

$$\frac{d\bar{M}}{ds} - (\bar{Q} + m)(1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. = 0 \quad (7. c)$$

2) 有限変形方程式の線形化

平衡条件式(7. a) ~ (7. c) は $\theta \doteq 0$ および $\epsilon \ll 1$ であることより

$$1+\epsilon \doteq 1 \quad (8. a)$$

$$\cos \theta \cdot (1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. \doteq 1 - R \frac{d\theta}{ds} \quad (8. b)$$

$$\sin \theta \cdot (1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. \doteq \theta \quad (8. c)$$

$$(1+\epsilon) \left/ \left(R \frac{d\theta}{ds} + 1 \right) \right. \doteq 1 \quad (8. d)$$

なる近似関係を用いれば次式のごとく線形化される。

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + \frac{\bar{N}}{R} + p(1 - R \frac{d\theta}{ds}) - q\theta = 0 \quad (9. a)$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} - \frac{\bar{Q}}{R} + p\theta + q(1 - R \frac{d\theta}{ds}) = 0 \quad (9. b)$$

$$\frac{d\bar{M}}{ds} - \bar{Q} - m = 0 \quad (9. c)$$

3) 断面力と変形量との関係

変断面任意形アーチの断面力 \bar{Q} 、 \bar{N} 、 \bar{M} とたわみ角 θ およびアーチ軸法線方向、接線方向変位 \bar{u} 、 \bar{w} との間には、部材軸伸縮およびせん断変形を考慮して、次の関係が成立する。

$$\bar{M} = -EI(s) \frac{d\theta}{ds} \quad (10. a)$$

$$\bar{N} = EA(s) \left(\frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{\bar{u}}{R(s)} \right) \quad (10. b)$$

$$\bar{Q} = \frac{GA(s)}{\kappa} \left(\frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{\bar{w}}{R(s)} - \theta \right) \quad (10. c)$$

ここに $I(s)$ 、 $A(s)$ 、 E 、 G および κ はそれぞれ断面2次モーメント、断面積、弾性定数、横弾性定数およびせん断係数である。

4) 基礎微分方程式の無次元化

変断面任意形アーチの座屈耐荷力問題の基礎微分方程式(9. a) ~ (9. c) と断面力と変形の関係式(10. a) ~ (10. c) の無次元化を行う。

アーチ軸長、アーチ支間、基準断面2次モーメントおよび基準断面積をそれぞれ ℓ 、 L 、 I_0 および A_0 として

$$(11. a) \sim (11. f)$$

$$Q = -\frac{L^2}{EI_0} \bar{Q}, \quad N = -\frac{L^2}{EI_0} \bar{N}, \quad M = -\frac{L}{EI_0} \bar{M}$$

$$w = \frac{1}{L} \bar{w}, \quad u = \frac{1}{L} \bar{u}, \quad \eta = \frac{1}{\ell} s$$

なる無次元量を導入すれば式(9. a) ~ (9. c) および(10. a) ~ (10. c) は次式のごとく無次元表示される。

$$\frac{dQ}{d\eta} + \frac{\ell}{R(\eta)} N - \nu \left(1 - \frac{R(\eta)}{\ell} \frac{d\theta}{d\eta} \right) \frac{pL^3}{EI_0} + \nu \theta \frac{qL^3}{EI_0} = 0 \quad (12. a)$$

$$\frac{dN}{d\eta} - \frac{\ell}{R(\eta)} Q - \nu \theta \frac{pL^3}{EI_0} - \nu \left[1 - \frac{R(\eta)}{\ell} \frac{d\theta}{d\eta} \right] \frac{qL^3}{EI_0} = 0 \quad (12. b)$$

$$\frac{dM}{d\eta} - \nu Q + \nu \frac{mL^2}{EI_0} = 0 \quad (12. c)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \nu \frac{I_0}{I(\eta)} M \quad (13. a)$$

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{\ell}{R(\eta)} u - \frac{\nu}{a^2} \frac{A_0}{A(\eta)} N \quad (13. b)$$

$$\frac{du}{d\eta} = -\frac{\ell}{R(\eta)} w + \nu \theta - \frac{\nu}{\mu a^2} \frac{A_0}{A(\eta)} Q \quad (13. c)$$

$$\text{ただし } a^2 = \frac{A_0 L^2}{I_0}, \nu = \frac{\ell}{L}, \mu = \frac{G}{\kappa E}$$

3. 離散的な一般解

部材軸線形状および変断面性状に任意性を有するアーチについて、部材軸伸縮性およびせん断変形を考慮した座屈耐荷力問題に関する基礎微分方程式は一般に、アーチ部材の曲率半径 $R(\eta)$ 、アーチ軸接線の傾斜角 $\phi(\eta)$ 、部材断面積 $A(\eta)$ および部材断面2次モーメント $I(\eta)$ などに関する量を変数係数とする多元連立微分方程式となる。アーチ部材の幾何学的諸量および荷重形態に一般性を保持したまま、これらの変数係数連立微分方程式の解析解を一般的な形で求めることはできない。したがって、本研究においては、①微分方程式の積分方程式への変換、と②積分方程式の近似解法の応用とにより、変数係数多元連立微分方程式の、アーチ部材等分点における離散的な一般解を求めた。なお、各種平面曲線アーチの幾何学的諸量は本文末の Appendix に示す。

任意軸線形状を有する変断面アーチの座屈耐荷力方程式の m 等分点 i における離散的な一般解は次式となる。

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ N_i \\ M_i \\ \theta_i \\ w_i \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} & a_{5i} & a_{6i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} & b_{5i} & b_{6i} \\ c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & c_{4i} & c_{5i} & c_{6i} \\ d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{4i} & d_{5i} & d_{6i} \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} & e_{4i} & e_{5i} & e_{6i} \\ f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & f_{4i} & f_{5i} & f_{6i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_0 \\ N_0 \\ M_0 \\ \theta_0 \\ w_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{7i} \\ b_{7i} \\ c_{7i} \\ d_{7i} \\ e_{7i} \\ f_{7i} \end{pmatrix} \quad (14. a) \sim (14. f)$$

ただし、

$$a_{ki} = a_{k0} - \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \left\{ \frac{\ell}{R_j} b_{kj} + \nu^2 \frac{R_j}{\ell} \frac{I_0}{I_j} \right. \\ \left. - \frac{P_j}{P_0} \lambda^2 c_{kj} + \nu \frac{Q_j}{P_0} \lambda^2 d_{kj} \right\} \\ a_{10} = 1, a_{20} = -\alpha_{10} \frac{\ell}{R_0}, a_{30} = -\nu^2 \alpha_{10} \\ \frac{R_0}{\ell} \frac{P_0}{P_0} \lambda^2, a_{40} = -\nu \alpha_{10} \frac{Q_0}{P_0} \lambda^2, a_{50} = a_{60} = 0, \\ a_{70} = \nu \lambda^2 \sum_{j=0}^i \alpha_{1j} \frac{P_j}{P_0}$$

$$b_{ki} = b_{k0} + \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \left\{ \frac{\ell}{R_j} a_{kj} - \nu^2 \frac{R_j}{\ell} \frac{I_0}{I_j} \right. \\ \left. - \frac{Q_j}{P_0} \lambda^2 c_{kj} + \nu \frac{P_j}{P_0} \lambda^2 d_{kj} \right\} \\ b_{10} = \alpha_{10} \frac{\ell}{R_0}, b_{20} = 0, b_{30} = -\nu^2 \alpha_{10} \frac{R_0}{\ell} \\ \frac{Q_0}{P_0} \lambda^2, b_{40} = \nu \alpha_{10} \frac{P_0}{P_0} \lambda^2, b_{50} = b_{60} = 0, \\ b_{70} = \nu \lambda^2 \sum_{j=0}^i \alpha_{1j} \frac{Q_j}{P_0}$$

$$c_{ki} = c_{k0} + \nu \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} a_{kj} \\ c_{10} = \nu \alpha_{10}, c_{20} = 0, c_{30} = 1, c_{40} = c_{50} \\ = c_{60} = 0, c_{70} = -\frac{m_0 L^2}{EI_0} \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{1j} \frac{m_j}{m_0}$$

$$d_{ki} = d_{k0} + \nu \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \frac{I_0}{I_j} c_{kj} \\ d_{10} = d_{20} = 0, d_{30} = \nu \alpha_{10}, d_{40} = 1, \\ d_{50} = d_{60} = d_{70} = 0$$

$$e_{ki} = e_{k0} + \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \left\{ -\frac{\ell}{R_j} f_{kj} - \frac{\nu}{a^2} \frac{A_0}{A_j} b_{kj} \right\} \\ e_{10} = 0, e_{20} = -\alpha_{10} \frac{\nu}{a^2}, e_{30} = e_{40} = 0, \\ e_{50} = 1, e_{60} = \alpha_{10} \frac{\ell}{R_0}, e_{70} = 0$$

$$f_{ki} = f_{k0} - \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} \left\{ \frac{\ell}{R_j} e_{kj} - \nu d_{kj} + \frac{\nu}{\mu a^2} \right. \\ \left. - \frac{A_0}{A_j} a_{kj} \right\} \\ f_{10} = -\frac{\nu}{\mu a^2} \alpha_{10}, f_{20} = f_{30} = 0, f_{40} = \nu \alpha_{10}, \\ f_{50} = -\alpha_{10} \frac{\ell}{R_0}, f_{60} = 1, f_{70} = 0 \\ \lambda^2 = \frac{P_0 L^3}{EI_0}, \alpha_{ij}: \text{数値積分則の重み係数}$$

4. 座屈条件式

任意の境界条件を有する変断面任意形アーチの座屈条件式は、離散的な一般解を用いて、通常の境界値問題的手法で求めることができる。一例として、対称荷重が作用する場合、次の結果を与える。

(1) 固定アーチおよび2ヒンジアーチ

アーチクラウンが第 s 分割点にあるものとすれば、

a) 固定アーチ

i) 対称型

$$\theta_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad Q_s = \theta_s = w_s = 0$$

$$\text{座屈条件式} \quad \begin{vmatrix} a_{1s} & a_{2s} & a_{3s} \\ d_{1s} & d_{2s} & d_{3s} \\ e_{1s} & e_{2s} & e_{3s} \end{vmatrix} = 0$$

ii) 逆対称型

$$\theta_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad N_s = M_s = u_s = 0$$

$$\text{座屈条件式} \quad \begin{vmatrix} b_{1s} & b_{2s} & b_{3s} \\ c_{1s} & c_{2s} & c_{3s} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{3s} \end{vmatrix} = 0$$

b) 2 ヒンジアーチ

i) 対称型

$$M_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad Q_s = w_s = \theta_s = 0$$

$$\text{座屈条件式} \quad \begin{vmatrix} a_{1s} & a_{2s} & a_{4s} \\ d_{1s} & d_{2s} & d_{4s} \\ e_{1s} & e_{2s} & e_{4s} \end{vmatrix} = 0$$

ii) 逆対称型

$$M_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad N_s = M_s = u_s = 0$$

$$\text{座屈条件式} \quad \begin{vmatrix} b_{1s} & b_{2s} & b_{4s} \\ c_{1s} & c_{2s} & c_{4s} \\ f_{1s} & f_{2s} & f_{4s} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 3 ヒンジアーチおよび1 ヒンジアーチ

対称荷重に対する3 ヒンジアーチおよび1 ヒンジアーチの逆対称型の座屈耐荷力特性は、それぞれ2 ヒンジアーチおよび固定アーチの特性と全く同じであるゆえ、ここでは対称モードに関する座屈耐荷力を解析する。

中間ヒンジ断面が第s等分点にあるものとすれば、

a) 3 ヒンジアーチ

$$M_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad M_s = w_s = 0,$$

$$Q_s \cdot \cos\theta_s + N_s \cdot \sin\theta = 0$$

座屈条件式は次のごとく誘導される。s点における、曲げモーメント M_s 、接線方向変位 w_s 、およびたわみ角 θ_s は、一般式 (14.c) ~ (14.e) より次のごとく与えられる。

$$M_s = c_{1s} \cdot Q_0 + c_{2s} \cdot N_0 + c_{4s} \cdot \theta_0 + \overline{c}_{7s} \cdot \lambda^2 = 0 \quad (15. a)$$

$$w_s = e_{1s} \cdot Q_0 + e_{2s} \cdot N_0 + e_{4s} \cdot \theta_0 + \overline{e}_{7s} \cdot \lambda^2 = 0 \quad (15. b)$$

$$\theta_s = d_{1s} \cdot Q_0 + d_{2s} \cdot N_0 + d_{4s} \cdot \theta_0 + \overline{d}_{7s} \cdot \lambda^2 \quad (15. c)$$

連立方程式 (15. a) ~ (15. c) を解き、次のごとく Q_0 、 N_0 、 θ_0 を決定する。

$$Q_0 = a_{11} \cdot \lambda^2 + a_{12} \cdot \theta_s \quad (16. a)$$

$$N_0 = a_{21} \cdot \lambda^2 + a_{22} \cdot \theta_s \quad (16. b)$$

$$\theta_0 = a_{31} \cdot \lambda^2 + a_{32} \cdot \theta_s \quad (16. c)$$

ただし

$$a_{11} = \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} \overline{c}_{7s} & c_{2s} & c_{4s} \\ e_{7s} & e_{2s} & e_{4s} \\ \overline{d}_{7s} & d_{2s} & d_{4s} \end{vmatrix}, \quad a_{12} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & c_{2s} & c_{4s} \\ 0 & e_{2s} & e_{4s} \\ 1 & d_{2s} & d_{4s} \end{vmatrix}$$

$$a_{21} = \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & \overline{c}_{7s} & c_{4s} \\ e_{1s} & \overline{e}_{7s} & e_{4s} \\ d_{1s} & \overline{d}_{7s} & d_{4s} \end{vmatrix}, \quad a_{22} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & 0 & c_{4s} \\ e_{1s} & 0 & e_{4s} \\ d_{1s} & 1 & d_{4s} \end{vmatrix}$$

$$a_{31} = \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & \overline{c}_{7s} \\ e_{1s} & e_{2s} & \overline{e}_{7s} \\ d_{1s} & d_{2s} & \overline{d}_{7s} \end{vmatrix}, \quad a_{32} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & 0 \\ e_{1s} & e_{2s} & 0 \\ d_{1s} & d_{2s} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & c_{4s} \\ e_{1s} & e_{2s} & e_{4s} \\ d_{1s} & d_{2s} & d_{4s} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \overline{c}_{7s} \cdot \lambda^2 = c_{7s} \\ \overline{e}_{7s} \cdot \lambda^2 = e_{7s} \\ \overline{d}_{7s} \cdot \lambda^2 = d_{7s} \end{matrix}$$

一方、中間ヒンジ断面におけるせん断力 Q_s および軸力 N_s は、次式となる。

$$Q_s = a_{1s} \cdot Q_0 + a_{2s} \cdot N_0 + a_{4s} \cdot \theta_0 + \overline{a}_{7s} \cdot \lambda^2 \quad (17. a)$$

$$N_s = b_{1s} \cdot Q_0 + b_{2s} \cdot N_0 + b_{4s} \cdot \theta_0 + \overline{b}_{7s} \cdot \lambda^2 \quad (17. b)$$

式 (17. a) および (17. b) に式 (16. a) ~ (16. c) を代入し

$$\text{境界条件} \quad Q_s \cdot \cos\theta_s + N_s \cdot \sin\theta_s = 0$$

を書き換え次式をえる。

$$\lambda^2 (\delta_{11} \cdot \sin\theta_s + \delta_{12} \cdot \cos\theta_s) + \theta_s \cdot (\delta_{21} \cdot \sin\theta_s + \delta_{22} \cdot \cos\theta_s) = 0 \quad (18)$$

ただし、

$$\delta_{11} = a_{11} \cdot b_{1s} + a_{21} \cdot b_{2s} + a_{31} \cdot b_{4s} + b_{7s},$$

$$\delta_{12} = a_{11} \cdot a_{1s} + a_{21} \cdot a_{2s} + a_{31} \cdot a_{4s} + a_{7s},$$

$$\delta_{21} = a_{12} \cdot b_{1s} + a_{22} \cdot b_{2s} + a_{32} \cdot b_{4s}, \quad \overline{b}_{7s} \lambda^2 = b_{7s}$$

$$\delta_{22} = a_{12} \cdot a_{1s} + a_{22} \cdot a_{2s} + a_{32} \cdot a_{4s}, \quad \overline{a}_{7s} \lambda^2 = a_{7s}$$

ここで、たわみ角 θ_s は微小量であるゆえ、 $\cos\theta_s \doteq 1$ 、 $\sin\theta_s \doteq \theta_s$ とすれば、式 (18) より次式をえる。

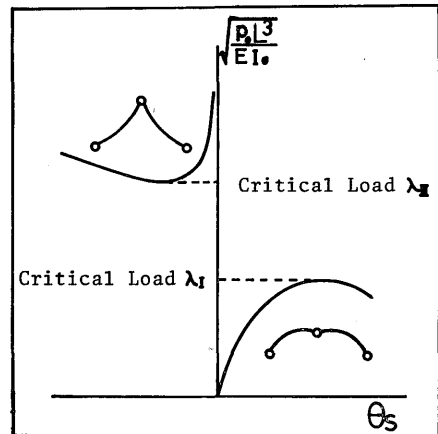


Fig. 2 Load-Deformation Curve

$$\delta_{21} \cdot \theta_s^2 + (\delta_{22} + \lambda^2 \delta_{11}) \cdot \theta_s + \lambda^2 \delta_{12} = 0 \quad (19)$$

これより

$$\theta_s = \frac{1}{2\delta_{21}} \left\{ -(\delta_{22} + \lambda^2 \delta_{11}) \pm \sqrt{(\delta_{22} + \lambda^2 \delta_{11})^2 - 4\lambda^2 \delta_{12} \delta_{21}} \right\} \quad (20)$$

をえる。

式 (20) は荷重パラメーター $\lambda = \sqrt{p_0 L^3 / EI_0}$ と中間ヒンジ点の左側断面におけるたわみ角 θ_s との間の図 2 に示すとき関係を与える。すなわち式 (20) の右辺の平方根の中の値を \bar{D} とすれば、 $\bar{D} > 0$ なる場合は図 2 における $(\lambda < \lambda_I, \lambda_{II} < \lambda)$ なる範囲 I に対応し、同一荷重に対して、安定なつり合い状態と不安定なつり合い状態が存在する。また $\bar{D} < 0$ の場合は、図 2 の $\lambda_I < \lambda < \lambda_{II}$ なる範囲 II に対応し、平衡状態は存在しない。そして、範囲 I と II との境界において、 $\bar{D} = 0$ となり、これに対する荷重 $\sqrt{p_0 L^3 / EI_0}$ は、広義の座屈荷重とみなされる。したがって、3 ヒンジアーチの座屈耐荷力は次の条件式

$$\bar{D} = (\delta_{22} + \lambda^2 \delta_{11})^2 - 4\lambda^2 \delta_{12} \delta_{21} = 0 \quad (21)$$

により算定されることとなる。

b) 1 ヒンジアーチ

$$\theta_0 = w_0 = u_0 = 0, \quad M_s = w_s = 0, \\ Q_s \cdot \cos \theta_s + N_s \cdot \sin \theta_s = 0$$

1 ヒンジアーチの座屈条件式は、3 ヒンジアーチの場合と同形の式 (21) にて与えられる。

ただし、

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= a_{11} b_{1s} + a_{21} b_{2s} + a_{31} b_{3s} + \bar{b}_{7s} \\ \delta_{12} &= a_{11} a_{1s} + a_{21} a_{2s} + a_{31} a_{3s} + \bar{a}_{7s} \\ \delta_{21} &= a_{12} b_{1s} + a_{22} b_{2s} + a_{32} b_{3s}, \\ \delta_{22} &= a_{12} a_{1s} + a_{22} a_{2s} + a_{32} a_{3s} \\ a_{11} &= \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} \bar{c}_{7s} & c_{2s} & c_{3s} \\ e_{7s} & e_{2s} & e_{3s} \\ \bar{d}_{7s} & d_{2s} & d_{3s} \end{vmatrix}, & a_{12} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & c_{2s} & c_{3s} \\ 0 & e_{2s} & e_{3s} \\ 1 & d_{2s} & d_{3s} \end{vmatrix} \\ a_{21} &= \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & \bar{c}_{7s} & c_{3s} \\ e_{1s} & \bar{e}_{7s} & e_{3s} \\ d_{1s} & \bar{d}_{7s} & d_{3s} \end{vmatrix}, & a_{22} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & 0 & c_{3s} \\ e_{1s} & 0 & e_{3s} \\ d_{1s} & 1 & d_{3s} \end{vmatrix}, \\ a_{31} &= \frac{-1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & \bar{c}_{7s} \\ e_{1s} & e_{2s} & \bar{e}_{7s} \\ d_{1s} & d_{2s} & \bar{d}_{7s} \end{vmatrix}, & a_{32} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & 0 \\ e_{1s} & e_{2s} & 0 \\ d_{1s} & d_{2s} & 1 \end{vmatrix} \\ D &= \begin{vmatrix} c_{1s} & c_{2s} & c_{3s} \\ e_{1s} & e_{2s} & e_{3s} \\ d_{1s} & d_{2s} & d_{3s} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5. 座屈耐荷力特性

得られた 3 ヒンジアーチ、2 ヒンジアーチ、1 ヒンジアーチおよび固定アーチの座屈条件式を用いて、図 3 に示すごとく荷重載荷形態 ①法線方向等分布荷重、②水平単位長当りに荷重強度 p_0 を有する等分布荷重、③単位弧長当りに荷重強度 p_0 を有する等分布荷重のもとで、カテナリー、サイクロイド、放物線および円弧を軸線とするアーチの座屈耐荷力を算定し

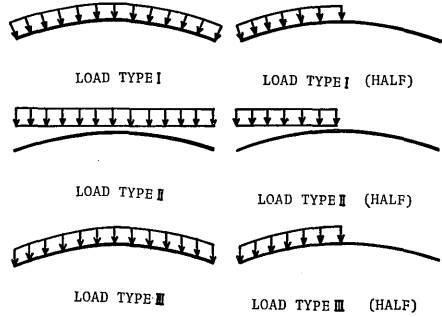


Fig. 3 Loading Condition

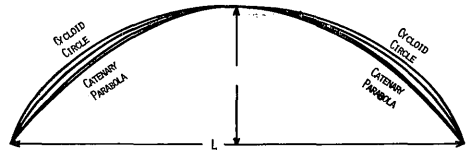


Fig. 4 Cycloid, Circle, Catenary and Parabola Curves

た。なお荷重載荷形態①、②および③を load type I, load type II, および load type III と称することにする。

また、円弧、放物線、サイクロイドおよびカテナリーの 4 平面曲線の外形比較を拱矢比 $f/L = 0.3$ の場合について、図 4 に示す。

図 5 は load type I, II および III の荷重を、全載する放物線アーチの座屈耐荷力 $\sqrt{p_0 L^3 / EI_0}$ と拱矢比 f/L との関係を示したものである。これより、

1) 固定アーチが最も座屈耐荷力が大きく、1 ヒンジ、2 ヒンジ、3 ヒンジアーチの順に小さくなり、拱矢比 $f/L = 0.2 \sim 0.3$ で各々のアーチにおける座屈耐荷力が最大となる。

2) 荷重形態が耐荷力におよぼす影響は拱矢比 $f/L = 0.1$ ではほとんどないが、拱矢比が大きくなるにつれ、その影響は大きく表われ、耐荷力は load type I が最も小さく、load type III, load type II の順に大きくなる。

図 6 (a) (b) は放物線、円弧、カテナリーおよびサイクロイドを軸線とする固定アーチ、2 ヒンジアーチ、3 ヒンジアーチおよび 1 ヒンジアーチに load type I の荷重が全載する時の座屈耐荷力 $\sqrt{p_0 L^3 / EI_0}$ と拱矢比 f/L との関係を示す。これより、

1) アーチ軸線の形状が座屈耐荷力におよぼす影響は、拱矢比 $f/L = 0.1$ ではほとんどないが、拱矢比 $f/L = 0.2 \sim 0.3$ においてはその影響は、2 ヒンジアーチが最も大きく表われ、固定アーチ、3 ヒンジ

一ち, 1 ヒンジアーチの順に小さくなる。

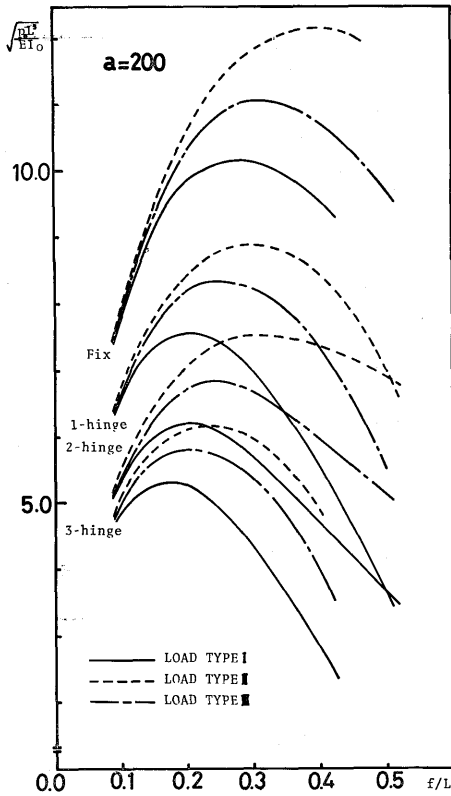


Fig. 5 Relation between Buckling Load $\sqrt{p_0 L^3/EI_0}$ and Span Rise Ratio f/L

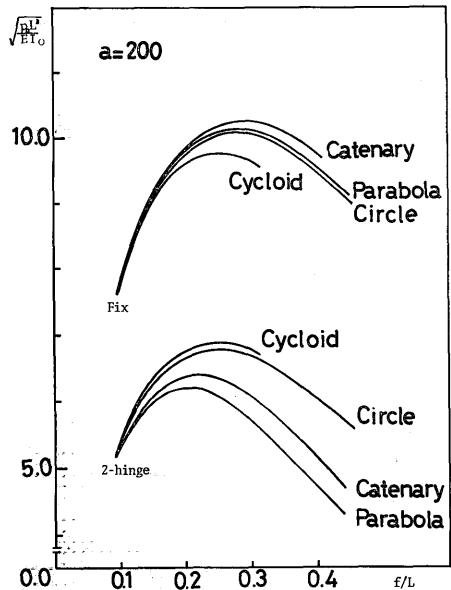


Fig. 6(a) Relation between Buckling Load $\sqrt{p_0 L^3/EI_0}$ and Span Rise Ratio f/L

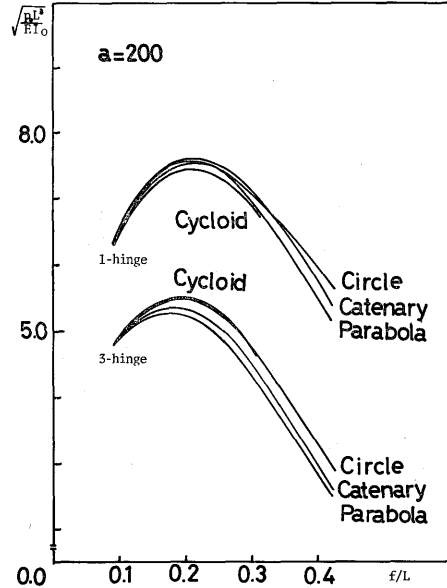


Fig. 6 (b) Relation between Buckling Load $\sqrt{p_0 L^3/EI_0}$ and Span Rise Ratio f/L

2) 拱矢比 $f/L=0.2\sim 0.3$ で 2 ヒンジアーチおよび 3 ヒンジアーチの耐荷力は, サイクロイドが最も大きく, 円弧, カテナリー, 放物線の順に小さくなり, 1 ヒンジアーチおよび固定アーチにおいては, カテナリーが最も大きく, 放物線, 円弧およびサイクロイドの順に小さくなる。

図7は, 円弧アーチに load type I, II および III の荷重が半載および全載する時の, 座屈耐荷力 $\sqrt{p_0 L^3/EI_0}$ と 拱矢比 f/L との関係を示したものである。これより,

1) 半載の時も, 全載と同様, 座屈耐荷力は 2 ヒンジアーチの方が大きく, また, $f/L=0.1$ においては荷重形態が耐荷力に与える影響はほとんどなく, 拱矢比が大きくなれば, その影響は一般的に大になる。

2) 拱矢比 $f/L=0.1$ においては, 2 ヒンジアーチおよび固定アーチともに耐荷力は半載が大きい, 2 ヒンジアーチにおいて拱矢比が大きくなるにつれ, 全載が大きくなる傾向がある。

3) 半載荷重を受ける固定アーチの座屈耐荷力は, 全載荷重を受ける場合と同様に load type I が最も小さく, load type III, load type II の順に大きくなる。また, 半載荷重を受ける 2 ヒンジアーチの座屈耐荷力は, 全載荷重を受ける場合とは異なり, load type III が最も小さく, load type I, load type II の順に大きくなり, 全載の場合における load type I

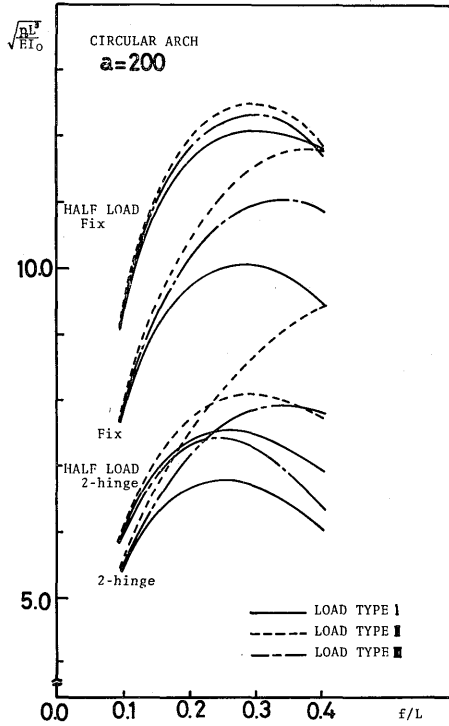


Fig. 7 Relation between Buckling Load $\sqrt{P_0 L^3 / EI_0}$ and Span Rise Ratio f/L

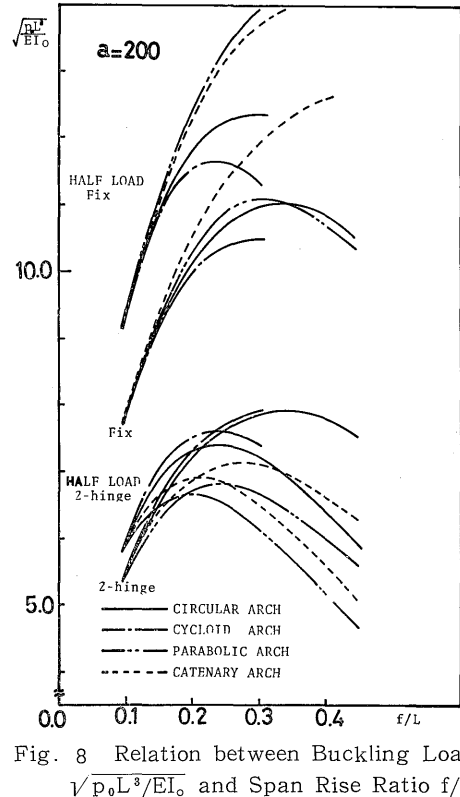


Fig. 8 Relation between Buckling Load $\sqrt{P_0 L^3 / EI_0}$ and Span Rise Ratio f/L

と load type III が入替ったものである。

図8は放物線、円弧、カテナリーおよびサイクロイドを軸線とする2ヒンジアーチおよび固定アーチに、load type II が半載および全載する時の座屈耐荷力 $\sqrt{P_0 L^3 / EI_0}$ と拱矢比 f/L との関係を示す。これより、

1) 半載の時も全載と同様、拱矢比 $f/L=0.1$ においては、軸線形状が座屈耐荷力に与える影響はほとんどなく、拱矢比が大きくなれば、一般的にその影響は大になる。

2) 拱矢比 $f/L=0.1$ においては、2ヒンジアーチ、固定アーチともに半載の場合が座屈耐荷力は大いだが、拱矢比が大きくなれば、2ヒンジアーチの場合、全載の耐荷力が大きくなる傾向がある。

3) 2ヒンジアーチの半載においては、全載と同様、耐荷力は放物線が最も小さく、カテナリー、円弧、サイクロイドの順に大きくなる。また、固定アーチの半載においては、全載の場合と異なり、拱矢比 $f/L=0.2\sim 0.3$ において、座屈耐荷力はサイクロイドが最も小さく、円弧、カテナリー、放物線の順に大きくなり、全載の場合の放物線とカテナリーが入替ったものである。

得られた結果を要約すれば、任意軸線形状を有する

アーチの耐荷力特性に関してつぎの事柄が明らかとなった。

1) 拱矢比 $f/L=0.1$ より小さい、いわゆる、偏平アーチにおいては、軸線形状および荷重載荷形態が座屈耐荷力におよぼす影響はほとんどない。この場合には、ヒンジ数の違い、つまり、アーチタイプの違いによる影響のみを受け、その耐荷力は固定アーチが最も大きく、1ヒンジアーチ、2ヒンジアーチ、3ヒンジアーチの順に小さくなる。

2) 高ライズアーチにおいては、耐荷力におよぼす軸線形状および荷重載荷形態の影響は大きく表われ、2ヒンジアーチおよび3ヒンジアーチにおいて、放物線が最も耐荷力が小さく、固定アーチ、1ヒンジアーチにおいて、サイクロイドが最も小さい。また、load type I の荷重が作用した時が、最も耐荷力は小さくなる。

3) ヒンジ端をもつアーチにおいては、端部の回転が自由なため、水平方向の変形が生じやすく、アーチクラウンにおいて、最も尖った形をもつ放物線アーチの耐荷力が最も小さく、また、固定端をもつアーチにおいては、端部の回転が拘束されるため、アーチの上下方向の変形が生じやすくなり、中央部分において平らなサイクロイドアーチの耐荷力が最も小さくな

る。

6. 結 語

任意荷重の作用を受ける任意軸線形状の3ヒンジアーチ, 2ヒンジアーチ, 1ヒンジアーチおよび固定アーチに関して, 部材軸伸縮性およびせん断変形を考慮した座屈耐荷力解析を行った。解析にあたっては, ①微分方程式の積分方程式への変換, と②積分方程式の近似解法の応用とにより, 変数係数多元連立微分方程式の, アーチ部材等分点における離散的な一般解を求めた。この離散的な一般解を用いることにより, 任意の境界条件を有する変断面任意形アーチの耐荷力問題を, 通常の境界値問題的手法で解析することができた。

数値計算は本学 FACOM 270-30 によった。

参考文献

(1) S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, p. 297, 1936
 (2) 平井 敦, 鋼橋Ⅲ, p. 784, 1967
 (3) A. Nasarow, Zur Frage der Knicksicherheit eines Bogens, Bautechnik, Jahr. 14, Heft 7, 1936, pp.114-115
 (4) 平井 敦, 鋼橋Ⅲ, p. 785, 1967
 (5) S. W. Krieger, Über die Stabilität des Kreisbogenträgers mit Zwischengeleichen, Stahlbau, Jahr. 10, Heft 24, 1937, pp. 185-188
 (6) S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, p. 300, 1936
 (7) A. Gjelsvik and S. R. Bodner, The Energy Criterion and Snap Buckling of Arches, Proc. ASCE, EM 5, Oct., 1962, pp.87-134
 (8) H. L. Schreyer and E. F. Masur, Buckling of Shallow Arches, Proc. ASCE, EM 4, Aug., 1966, pp.1-19
 (9) H. D. Conway and C. F. Lo, Further Studies on the Elastic Stability of Curves Beams, Int. Jour. Mech. Sci. Vol. 9, 1967, pp.707-718
 (10) J. V. Huddleston, Finite Deflection and Snap-Through of High Circular Arches, Jour. Appl. Mech., December, 1968, pp. 763-769
 (11) D. A. DaDeppo and R. Schmidt, Stability of Heavy Circular Arches with Hinged,

Ends, AIAA Jour. Vol. 9, No. 6, 1971, pp.1200-1201

(12) D. A. DaDeppo and R. Schmidt, Stability of Two-Hinged Circular Arches with Independent Loading Parameters, AIAA Jour. Vol. 12, No. 3, 1974, pp.385-386
 (13) 崎山 毅, 2ヒンジ円弧アーチの面内座屈特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第217号1973, 1~10頁
 (14) J. V. Huddleston, Nonlinear Analysis of Steep, Compressible Arches of Any Shape, Jour. Appl. Mech. Decem. 1971, pp. 942-946
 (15) J. S. Kennedy and A. S. Aggarwai, Effect of Weight on Large Deflections Arches, Proc. ASCE, EM 3, June, 1971, pp. 637-644

[Appendix]

各種平面曲線アーチの幾何学的諸量

各種の平面曲線を軸線とするアーチの解析においては, 任意点の曲率半径および水平軸と接線のなす角, すなわち傾斜角をあらかじめ求めておく必要がある。

図9に示すごとき, 円, サイクロイド, カテナリ

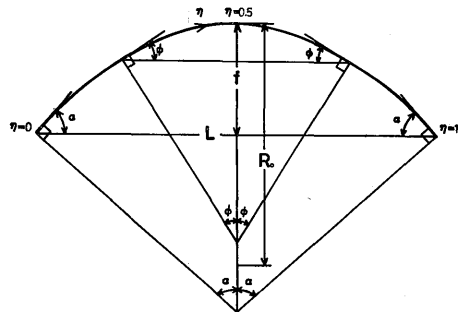


Fig. 9 Arch of Arbitrary Plane Shape

一および放物線を軸線とするアーチに関して, その幾何学的諸量は次の各式で与えられる。

(1) 円弧アーチ

$$\frac{\ell}{R(\eta)} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{4f/L}{1 - 4(f/L)^2} \right) = 2\alpha,$$

$$\phi(\eta) = \alpha(1 - 2\eta), \quad \ell = 2R_0\alpha, \quad L = 2R_0\sin\alpha,$$

$$f = R_0(1 - \cos\alpha)$$

円弧アーチにおける, 拱矢比 f/L と半開角 α お

Table 1 Geometrical Properties of Arch Axis (Circle)

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| α | 0.394791 | 0.761013 | 1.080839 | 1.349482 | $\pi/2$ |
| ℓ/L | 1.026457 | 1.103469 | 1.224951 | 1.383219 | $\pi/2$ |

よび弧長弦長比 ℓ/L との関係は表 1 に示すとおりである。

(2) サイクロイドアーチ

$$\frac{\ell}{R(\eta)} = (\eta - \eta^2 + \frac{1}{4} \cot^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\phi(\eta) = \cos^{-1} \left(2 \frac{R(\eta)}{\ell} \sin \alpha \right), \ell = 2R_0 \sin \alpha,$$

$$L = \frac{R_0}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha), f = \frac{R_0}{4} (1 - \cos 2\alpha)$$

サイクロイドアーチにおける、拱矢比 f/L と半開角 α および弧長弦長比 ℓ/L との関係は表 2 に示すとおりである。

Table 2 Geometrical Properties of Arch Axis (Cycloid)

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | $1/\pi$ |
| α | 0.400235 | 0.808651 | 1.314726 | $\pi/2$ |
| ℓ/L | 1.026602 | 1.105956 | 1.240447 | 1.273240 |

(3) カテナリアーチ

$$\frac{\ell}{R(\eta)} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + (2\eta - 1)^2 \tan^2 \alpha},$$

$$\phi(\eta) = \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{\ell}{R(\eta)} \frac{1}{2} \cot \alpha \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \ell = 2R_0 \tan \alpha,$$

$$L = R_0 \ell n \left[\frac{(1 + \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)} \right],$$

$$f = R_0 (\sec \alpha - 1)$$

カテナリアーチにおける、拱矢比 f/L と半開角 α および弧長弦長比 ℓ/L との関係は表 3 に示すとおりである。

Table 3 Geometrical Properties of Arch Axis (Catenary)

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| α | 0.384967 | 0.697707 | 0.921061 | 1.073698 | 1.178574 |
| ℓ/L | 1.026187 | 1.099718 | 1.209410 | 1.344189 | 1.495834 |

(4) 放物線アーチ

放物線アーチの場合には、前 3 種の平面曲線アーチの場合と異なり、 $\ell/R(\eta)$ および $\phi(\eta)$ を陽形式で表わすことができない。

$$\frac{g(\phi)}{g(\alpha)} = 2\eta - 1, \phi(\eta) = \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{g(\alpha)} \frac{\ell}{R(\eta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$\ell = 2R_0 \tan \alpha, L = R_0 g(\alpha), f = \frac{R_0}{2} \tan^2 \alpha$$

ここに、

$$g(\phi) = \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} + \frac{1}{2} \ell n \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right)$$

放物線アーチの拱矢比 f/L と半開角 α および弧長弦長比 ℓ/L との関係および $g(\alpha)$ 値は表 4 に示すとおりである。

Table 4 Geometrical Properties of Arch Axis (Parabola)

| | | | | | |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| α | 0.380506 | 0.674741 | 0.876058 | 1.012197 | 1.107149 |
| ℓ/L | 1.026061 | 1.098230 | 1.204347 | 1.333705 | 1.478943 |
| $g(\alpha)$ | 0.820848 | 1.757168 | 2.890433 | 4.267857 | 5.915771 |

Table 5 $\frac{\ell}{R_1}$ Value of Discrete Point (m=20)

| | | | | | |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 0 | 0.657016 | 0.836657 | 0.758360 | 0.635379 | 0.529122 |
| 1 | 0.682618 | 0.925537 | 0.872978 | 0.744943 | 0.625024 |
| 2 | 0.707443 | 1.024260 | 1.013010 | 0.885602 | 0.751159 |
| 3 | 0.730965 | 1.132410 | 1.184440 | 1.070260 | 0.922227 |
| 4 | 0.752728 | 1.247920 | 1.394390 | 1.315600 | 1.160330 |
| 5 | 0.772224 | 1.367220 | 1.647220 | 1.645790 | 1.503520 |
| 6 | 0.789024 | 1.484690 | 1.941300 | 2.090820 | 2.015170 |
| 7 | 0.802626 | 1.592200 | 2.261830 | 2.672720 | 2.788820 |
| 8 | 0.812639 | 1.679530 | 2.570680 | 3.362610 | 3.913250 |
| 9 | 0.818780 | 1.737100 | 2.802810 | 3.995890 | 5.234190 |
| 10 | 0.820847 | 1.757170 | 2.890430 | 4.267840 | 5.915760 |

Table 6 ϕ_1 Value of Discrete Point (m=20)

| | | | | | |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| f/L | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 0 | 0.380506 | 0.674741 | 0.876058 | 1.012200 | 1.107150 |
| 1 | 0.347042 | 0.630734 | 0.835328 | 0.977783 | 1.078390 |
| 2 | 0.312240 | 0.582034 | 0.788309 | 0.937222 | 1.044170 |
| 3 | 0.276269 | 0.528094 | 0.733610 | 0.888459 | 1.002500 |
| 4 | 0.239172 | 0.468626 | 0.669253 | 0.829127 | 0.950817 |
| 5 | 0.201085 | 0.403326 | 0.593337 | 0.755583 | 0.884817 |
| 6 | 0.162007 | 0.332035 | 0.503825 | 0.662724 | 0.797646 |
| 7 | 0.122188 | 0.254967 | 0.398850 | 0.544175 | 0.678873 |
| 8 | 0.081817 | 0.173129 | 0.277749 | 0.393403 | 0.512921 |
| 9 | 0.041017 | 0.087456 | 0.143017 | 0.208753 | 0.283732 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

拱矢比 $f/L=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ および 0.5 の 5 種の放物線アーチの、20 等分点における $\ell/R(\eta)$ および $\phi(\eta)$ の値を、左半分について表 5、表 6 に示す。