



Title	砂の弾塑性挙動について
Author(s)	棚橋, 由彦; 内藤, 秀信; 永尾, 光也; 東川, 一則
Citation	長崎大学工学部研究報告, (15), pp.79-86; 1980
Issue Date	1980-07
URL	http://hdl.handle.net/10069/23988
Right	

This document is downloaded at: 2019-04-24T16:18:27Z

砂の弾塑性挙動について

棚橋 由彦* ・内藤 秀信**
永尾 光也*** ・東川 一則****

On the Elasto-plastic Stress Strain Behaviours of a Sand

by

Yoshihiko TANABASHI

(Department of civil engineering)

Hidenobu NAITO

(Oyo chishitsu cyosa jimusho Co., Ltd.)

Mitsuya NAGAO

(Taisei doro Co., Ltd.)

Kazunori HIGASHIKAWA

(Obayashi doro Co., Ltd.)

Abstract

A Sand is such a complex material that is initiated dilatancy with loading and is largely influenced by stress histories.

In the previous paper, an incremental stress-strain relationship was proposed which was given in terms of tensor considering the subsequent anisotropy of Sands. But it had a tendency to over-estimate observed extensive dilatancy and it could not calculate stress strain behaviour of Sands under both unloading and reloading.

So newly in this paper, an elasto-plastic stress strain relationship (constitutive equation) is proposed considering a Sand as strain hardening material not only for shear but for compression, by adopting stress-dilatancy equation which is widely admitted in the field of soil engineering.

And some stress path tests of Toyoura Sand are carried out for the verification of the proposed equation. As the results of the comparison of both observed and calculated values of the strains along with some stress paths subjected complex stress histories, it was ascertained that the proposed equation estimates reasonably the elasto-plastic stress strain behaviour of Sands.

昭和55年6月16日受理

*土木工学科

**応用地質調査事務所(株)

***大成道路(株)

****大林道路(株)

1. まえがき

従来土質工学の分野では、地盤や土構造物の破壊のみを取り扱う安定解析がその主流を占めてきた。

しかし近年立地条件の悪い所での土木工事が多くなり、また動態観測の有効性が認められるにつれて、破壊およびそれに至るまでの挙動を取り扱う変形解析が重要視されるようになってきた。

ところで砂はその性質が極めて複雑な工学材料であり、負荷に伴い生じるダイレタンシーと応力に対する履歴依存性の顕著な材料である。したがって実用的でしかも精度のよい変形解析を行うためには、このような砂の特性を考慮し、さらに所要のパラメーターを簡単な試験で決定でき、また変形解析に適用可能な形式での応力ひずみ関係式(構成方程式)を確立することが重要である。著者らは先に簡単な室内三軸試験から応力ひずみテンソルの異方増分関係を誘導し、砂地盤の変形解析に適用して地盤内部のダイレタンシー特性を表現しうることを確かめている^{1), 2)}。しかしながらそれはダイレタンシーを応力比の不連続な双曲関数で近似したため体積ひずみを過大に評価する傾向があり、一般に認められているストレス・ダイレタンシー式とも矛盾するものであった。また掘削や潮の干満に伴う有効応力の増減など除荷・再載荷過程の計算も不可能なものであった。

本報告では上記の欠点を改良し、砂を圧縮とせん断に対するひずみ硬化材料とみなし、新たに応力履歴とひずみ硬化特性を考慮した砂の具体的な弾塑性応力ひずみ関係式を提案した。また試料として豊浦砂を用い、

$$L = \begin{bmatrix} l_{11}l_{11} & l_{12}l_{12} & l_{13}l_{13} & 2l_{12}l_{13} & 2l_{11}l_{13} & 2l_{11}l_{12} \\ l_{21}l_{21} & l_{22}l_{22} & l_{23}l_{23} & 2l_{22}l_{23} & 2l_{23}l_{21} & 2l_{21}l_{22} \\ l_{31}l_{31} & l_{32}l_{32} & l_{33}l_{33} & 2l_{32}l_{33} & 2l_{33}l_{31} & 2l_{31}l_{32} \\ l_{21}l_{31} & l_{22}l_{32} & l_{23}l_{33} & l_{22}l_{33} + l_{23}l_{32} & l_{23}l_{31} + l_{21}l_{33} & l_{21}l_{32} + l_{22}l_{31} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} & l_{33}l_{13} & l_{32}l_{13} + l_{33}l_{12} & l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13} & l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11} \\ l_{11}l_{12} & l_{12}l_{22} & l_{13}l_{23} & l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22} & l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23} & l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21} \end{bmatrix}$$

ここに l_{ij} は固有方程式 $|d\sigma_{ij} - d\sigma| = 0$ の固有ベクトル(主応力増分軸の方向余弦)であり、固有値(主応力増分値)を $d\sigma_i (i=1, 2, 3)$ とすると次式で与えられる。

$$l_{ij} = \pm s_{ij} / \{s_{i1}^2 + s_{i2}^2 + s_{i3}^2\}^{1/2}$$

$$s_{i1} = \det \begin{bmatrix} d\tau_{xy} & d\tau_{zx} \\ d\sigma_y - d\sigma_i & d\tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$s_{i2} = \det \begin{bmatrix} d\tau_{zx} & d\sigma_x - d\sigma_i \\ d\tau_{yz} & d\tau_{xy} \end{bmatrix}$$

種々の応力径路に沿うひずみ(増分)の実測値と計算値との比較から提案式の妥当性について検討を加えたものである。なお先の異方増分関係との比較もあわせて行っている。

2. 弾塑性応力ひずみ関係式

その基本的な考え方や式の誘導については、既報^{3), 4), 5)}に詳しいので、ここでは主応力増分軸の回転を伴う最も一般的な弾塑性応力ひずみ関係式を掲げるとどめる。

$$\{d\epsilon\}' = L' C' L \{d\sigma\}' \tag{1}$$

ここに

$$\{d\epsilon\}' = \{d\epsilon_x \ d\epsilon_y \ d\epsilon_z \ d\gamma_{yz} \ d\gamma_{zx} \ d\gamma_{xy}\}$$

$$\{d\sigma\}' = \{d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\sigma_z \ d\tau_{yz} \ d\tau_{zx} \ d\tau_{xy}\}$$

$$C' = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{12} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(C_{33} - C_{31}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \{(S_c + 3S_s) + \sqrt{2}S_d\}/9$$

$$C_{22} = (S_c + 3S_s)/9$$

$$C_{33} = \{(S_c + 3S_s) - \sqrt{2}S_d\}/9$$

$$C_{23} = \{(2S_c - 3S_s) - 2\sqrt{2}S_d\}/18$$

$$C_{31} = \{(2S_c - 3S_s) + 2\sqrt{2}S_d\}/18$$

$$C_{12} = (2S_c - 3S_s)/18$$

$$s_{i3} = \det \begin{bmatrix} d\sigma_x - d\sigma_i & d\tau_{xy} \\ d\tau_{xy} & d\sigma_y - d\sigma_i \end{bmatrix}$$

なお上式中の S_c, S_d, S_s は全ひずみに関する正八面体異方変形係数であり、それぞれ圧縮による体積ひずみ v_c 、ダイレタンシー v_d 、正八面体せん断ひずみ γ_d 各増分のフレキシビリティを意味している。 S_c, S_d, S_s の代わりに弾性変形係数 S_c^e, S_d^e, S_s^e 、塑性変形係数 S_c^p, S_d^p, S_s^p を代入すれば(1)式はそれぞれ弾性、塑性ひずみテンソルの増分関係になる。砂の具体的な弾塑性変形係数式は次章で与える。

降伏条件式は

圧縮に対して $\xi = \xi_m$
 せん断に対して $\eta = \eta_m$ (2)

ここに ξ は平均有効主応力 p を大気圧 $p_0 = 98 \text{ kN/m}^2$ で除した量, η は正八面体せん断応力 q を p で除した量すなわち正八面体応力比であり, ξ_m, η_m はそれぞれ応力履歴によりいままでに経験した ξ, η の最大値を意味する。

したがって $\xi = \xi_m$ かつ $d\xi > 0$ のときのみ, 圧縮による塑性体積ひずみ増分 dv_c^p が生じ, $\eta = \eta_m$ かつ $d\eta > 0$ のときのみ塑性ダイレタンスー増分 dv_d^p , 塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_d^p$ が生じる。上記の条件を満足しない場合は弾性ひずみ増分 $dv_c^e, dv_d^e, d\gamma_d^e$ のみ生じる。

なお本報告における応力はすべて有効応力を意味し, 応力・ひずみともに圧縮を正と約束する。

3. 砂の具体的な変形係数の決定法

砂の具体的な弾塑性正八面体変形係数の式の誘導, および提案式に用いるパラメーターの決定方法を以下に示す。

- i) 応力制御, 排水条件で飽和砂の除荷・再載荷過程を含む等方圧縮試験(以下 RC テスト)と平均主応力一定試験(以下 RD テスト)を行う。
- ii) Hertz の理論的考察⁶⁾をはじめ, 砂の圧縮による体積ひずみ v_c は平均主応力 p の指数関数となることが既往の実験によっても認められているので RC テスト結果から $p-v_c$ 関係を再対数紙にプロットし(3)式の S_c に用いる 2 つのパラメーター ν_1, ν_2 を決定する (Fig. 1)。

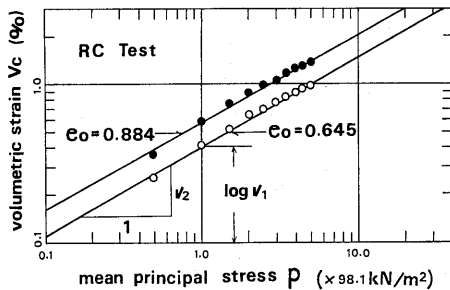


Fig. 1 Diagram to determine parameters ν_1 and ν_2 .

$$v_c = \nu_1 p^{\nu_2}$$

$$S_c = dv_c/dp = \nu_1 \nu_2 p^{\nu_2-1} \quad (3)_1$$

- iii) 正八面体せん断ひずみ γ_d は Fig. 2 (c)からも明らかのように η の双曲関数で近似できる。RD テストの結果から $\gamma_d/\eta - \gamma_d$ 関係をプロットし, S_s 項に

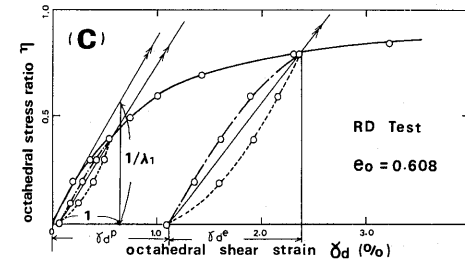
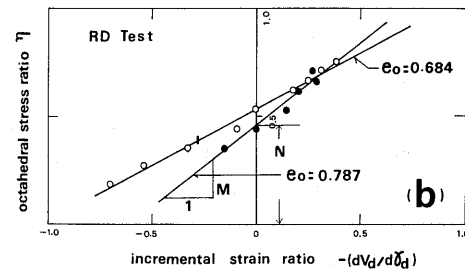
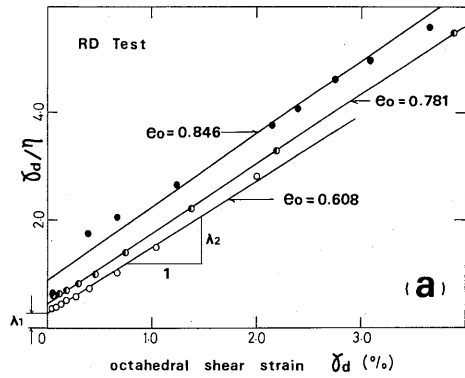


Fig. 2 Diagrams to determine parameters λ_1, λ_2, M and N .

する 2 つのパラメーター λ_1, λ_2 を Fig. 2 (a) に従い決定する。

$$\gamma_d = \lambda_1 \eta / (1 - \lambda_2 \eta)$$

$$S_s = d\gamma_d/dq = \lambda_1 / (1 - \lambda_2 \eta)^2 \quad (3)_2$$

- iv) 正八面体面上においてストレスダイレタンスー式の成立を認め^{7), 8)}, RD テストの結果から $\eta - (dv_d/d\gamma_d)$ 関係をプロットし, 直線近似から(3)₂式の S_s 項に関する 2 つのパラメーター M, N を Fig. 2 (b) に従い決定する。

$$\eta = M - N (dv_d/d\gamma_d)$$

$$S_a = dv_d/dq = \{(M - \eta)/N\} \cdot (d\gamma_d/dq)$$

$$= \lambda_1 (M - \eta) / \{N(1 - \lambda_2 \eta)^2\} \quad (3)_3$$

v) RC テストの除荷・再載荷過程において生じるヒステリシスループを一本の直線で近似し, S_c^e に用いるパラメーター ν_3 を決定する (図省略).

$$\begin{aligned} v_c^e &= \nu_3 p \\ S_c^e &= dv_c^e/dp = \nu_3 \end{aligned} \quad (3)_4$$

vi) 弾性正八面体せん断ひずみ γ_d^e は Fig. 2 (c) に示すように η - γ_d 関係の初期立ち上がり勾配 $1/\lambda_1$ とヒステリシスループの中線との間に平行性が認められるので γ_d^e は $\lambda_1 \eta$ で表わされ, 正八面体せん断ひずみの弾性変形係数 S_s^e は (3)₅ 式で与えられる.

$$\begin{aligned} \gamma_d^e &= \lambda_1 \eta \\ S_s^e &= d\gamma_d^e/dq = (d\gamma_d^e/d\eta) \cdot (d\eta/dq) = \lambda_1/p \end{aligned} \quad (3)_5$$

vii) ダイレクシーは本来土の非可逆的な変形に伴い生じるものとされているから⁷⁾, ダイレクシーの弾性成分 dv_d^e はゼロとみなしてよい.

$$\begin{aligned} v_d^e &= 0 \\ S_d^e &= dv_d^e/dq = 0 \end{aligned} \quad (3)_6$$

以上, 砂の具体的な弾塑性正八面体変形係数の式(3)₁~(3)₆を行列表示で整理すると次式となる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_c & S_d \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^e &= \begin{bmatrix} \nu_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1/p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_c & S_d \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^p &= \begin{bmatrix} \nu_1 \nu_2 p^{\nu_1-1} - \nu_3 & (M-\eta)\lambda_1/\{N \cdot p(1-\lambda_2\eta)^2\} \\ 0 & \lambda_1/p(1-\lambda_2\eta)^2 - \lambda_1/p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_c & S_d \\ 0 & S_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_c & S_d \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} S_c & S_d \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^p \end{aligned} \quad (4)$$

vi) の(3)₅式を認めると, 平均主応力一定試験は除荷再載荷過程を含む必要がなく, 所要の試験がさらに簡単になり (D テスト) 実用的である. 現場における初期間隙比 e_0 を有する試料に対し, RC テストと D テスト各一回で Fig. 1, 2 の整理方法により, 提案式に所要の7個のパラメーター $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \lambda_1, \lambda_2, M, N$ が決定できる. (1)~(4)式を用いて任意の応力履歴をうける任意の応力径路に沿う砂の弾塑性応力ひずみ挙動を計算することができる. また(1)式は主応力 (増分) 軸の回転を許すテンソル増分関係だから, 既存のFEM増分法のプログラムに組み入れ容易に砂地盤の変形解析を行うことが可能である.

検証用に用いた試料は豊浦砂 ($G_s = 2.65, U_c = 1.46$) であるが, 各パラメーターと初期間隙比 e_0 のと相関はあまりよくない. 一例としてパラメーター M と e_0 のと相関を示すと Fig. 3 のようである. とりあえず本報告では各パラメーターを e_0 の一次式で近似した.

豊浦砂のそれを(5)式に示す.

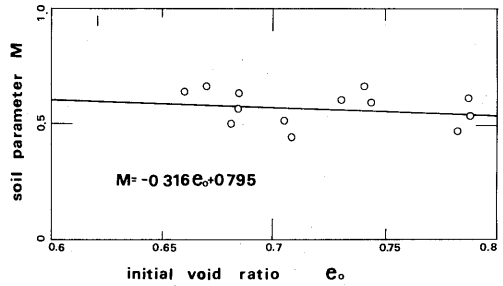


Fig. 3 Correlation between parameter M and initial void ratio e_0 .

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0.681e_0 - 0.044 \\ \nu_2 &= -0.022e_0 + 0.587 \\ \nu_3 &= 0.118 \\ \lambda_1 &= 1.094 \\ \lambda_2 &= 1.979e_0 - 0.365 \\ M &= -0.316e_0 + 0.795 \\ N &= 2.372e_0 - 0.863 \end{aligned} \quad (5)$$

4. 計算値と実測値の比較

新旧増分関係の比較

(a) D字型径路試験

Fig. 4 の湾曲した径路 Path 2 と直線径路 Path 1 の応力ひずみ曲線をそれぞれ Fig. 5 (a), (b) に示す. 図中黒のプロット点は実測値, 2 点鎖線は先の異方増分関係, 実線は本提案式の計算値である. 特に体積ひずみに注目すると, (a)(b)両図ともに本提案式が旧増分関係のダイレクシーを過大評価する傾向を改善しているのが読みとれる.

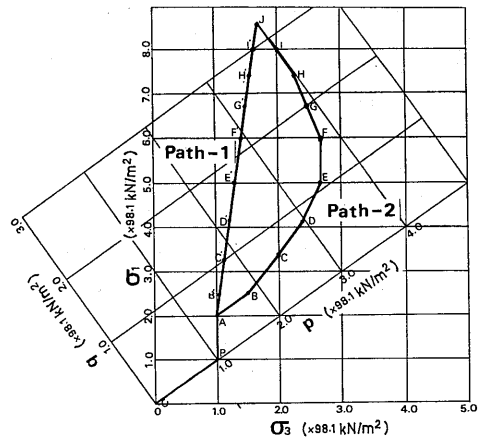


Fig. 4 D-shaped stress paths.

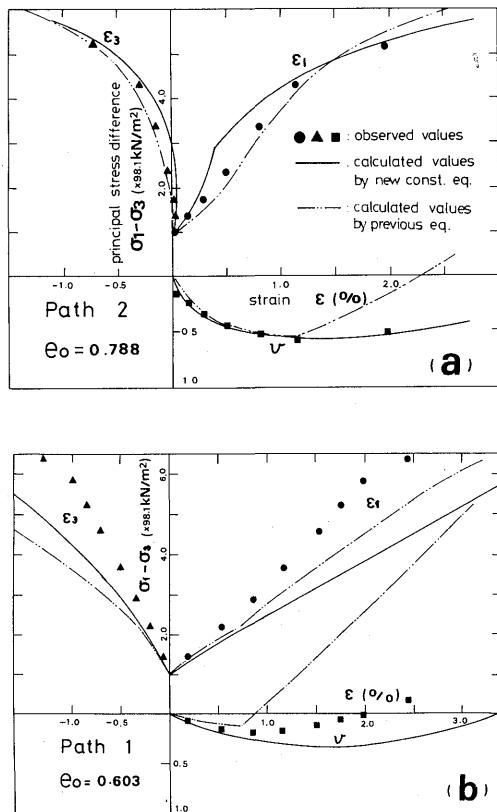


Fig. 5 Stress strain behaviour along with D-shaped stress paths.

(b) 多軸試験

Fig. 6 に示すように正八面体面上を半径方向に直線的に変化させる平均主応力一定径路を採用した。θ は σ₁ 軸の正八面体面への投影から時計まわりに測ったふれの角である。θ=0° は三軸圧縮、θ=30° は中間主応力一定、θ=60° は三軸伸張各試験に対応する。計算値を Fig. 7 (a)~(e) に示す。計算は p=98 KN/m², e₀=0.620 の条件で行い、実線、二点鎖線がそれぞれ新・旧増分関係の計算値である。松岡ら⁹⁾ の行った豊浦砂の実測結果を Fig. 8 (a)~(e) に示す。ただし松岡らの実測は p=196 KN/m² であり、縦軸には主応力比 σ₁/σ₃ を採用しており定量的な比較はできない。なお図中の実線は松岡らの提唱する SMP 面上の関係式に基づく計算値である⁹⁾。

旧増分関係では平面ひずみ状態すなわち中間主ひずみ ε₂ がゼロとなるのは θ=30° であった。一方本提案式では θ=15° では ε₂ は負、θ=30° では正、したがって平面ひずみ状態は θ=15~30° の間に存在すること

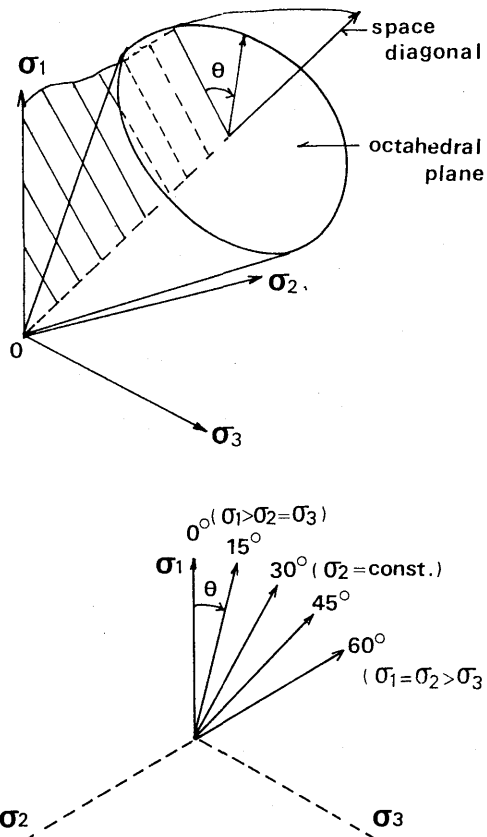


Fig. 6 Radial stress pathes on the octahedral plane.

になり、市原ら¹⁰⁾の平面ひずみ試験の実測結果や、松岡らの実測とも一致している。また θ=45° のとき、旧増分関係ではダイレタンシー過大評価のため ε₂ が η の増大に従い負になろうとする傾向がみられるが、本提案式では正に単調増大し Fig. 8 (6) の実測の傾向をよく説明している。以上から本提案式の方が旧増分関係より、ダイレタンシー量評価の点で優れていると結論づけてよいと考える。

提案式の検証

(c) φ字型径路試験

本提案式が砂の弾塑性挙動を説明しうるかを吟味するために、Fig. 9 に示す複雑な応力履歴をうける φ字型の径路試験を行った。なお図中 A F は側圧一定三軸圧縮の径路であり、B 点をひずみ原点としている。Fig. 9 の下段に示した 6 種類の径路のうち、Path 2~5 についてせん断ひずみの挙動を γ-η 関係でプロットしたのが Fig. 10 (a)~(d) である。図中白丸を細実線で結んだのが実測値、太実線が計算値である。いずれもせん断ひずみの硬化およびリバウンドの特性を計算値が適

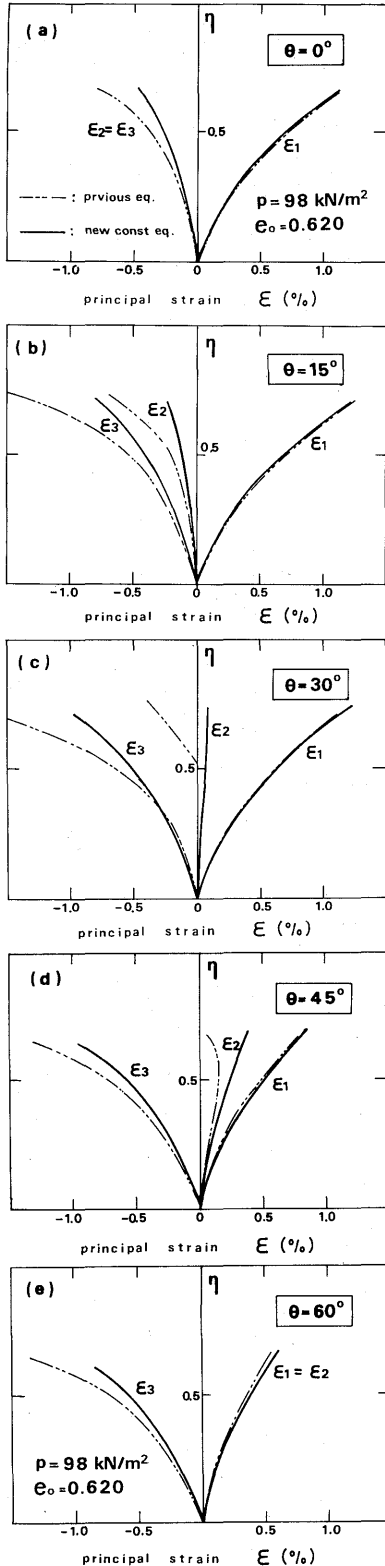


Fig. 7 Calculated values of the principal strains under the condition of Fig. 6.

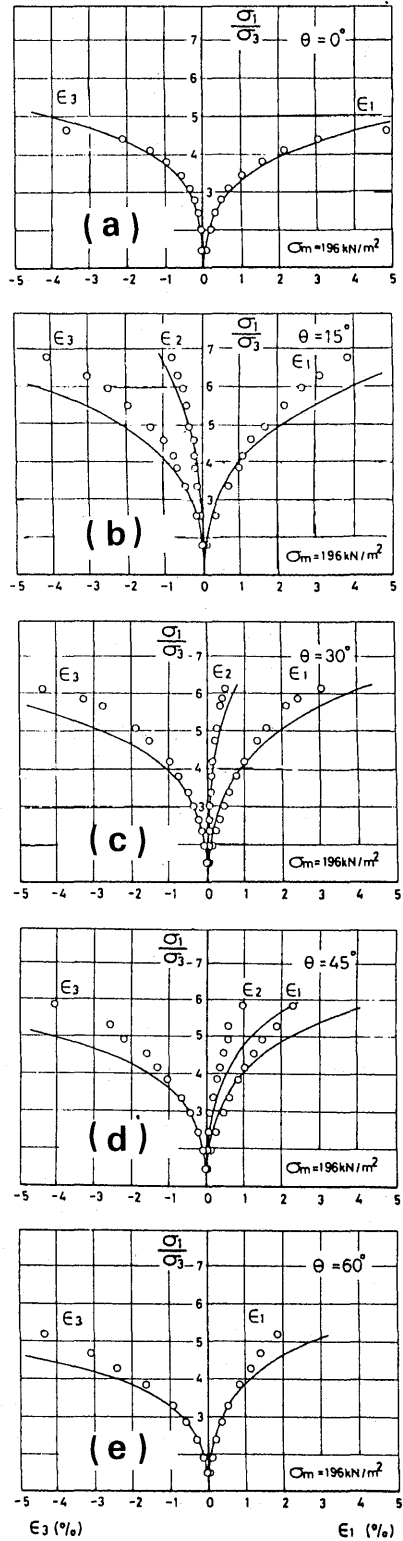


Fig. 8 Observed values of the principal strains (after Nakai, Matsuoka et al.)

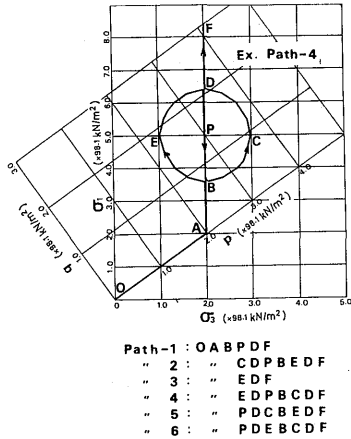


Fig. 9 ϕ -shaped stress paths.

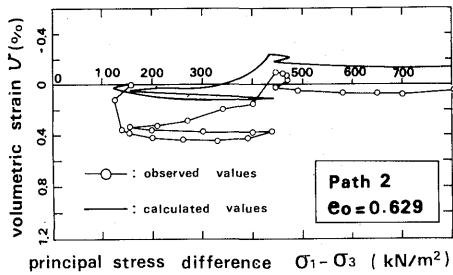


Fig. 11 Behaviour of volumetric strain along with Path-2.

確に把えているのがうかがえる。特に Path 4 では実際のヒステリシスループがねじれる現象を計算値がよく説明しており興味深い。最後に紙数の都合上、一例として Path 2 に関してのみ、軸差応力・体積ひずみ関係 (Fig. 11) と、一般表現の応力ひずみ挙動すなわち $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1, \epsilon_3$ 関係と $\epsilon_1 - v$ 関係を同時にプロットした図 (Fig. 12) を示しておく。Fig. 11 からせん断ひずみに較べて多少精度がおちるが、体積ひずみの複雑な弾塑性挙動の特徴をよく把えているのが読みとれる。

5. あとがき

簡単な室内三軸論験である RC テストと D テスト各 1 回で、このような砂の複雑な弾塑性挙動、すなわち応力履歴依存性や硬化・リバウンド特性を本提案式が忠実に把えていることは、本提案式の工学的な利用価値を高めるものと考えられる。

今後、複雑な履歴を径る多軸応力下の径路試験を行い、本提案式の妥当性についてさらに検討を加えて行

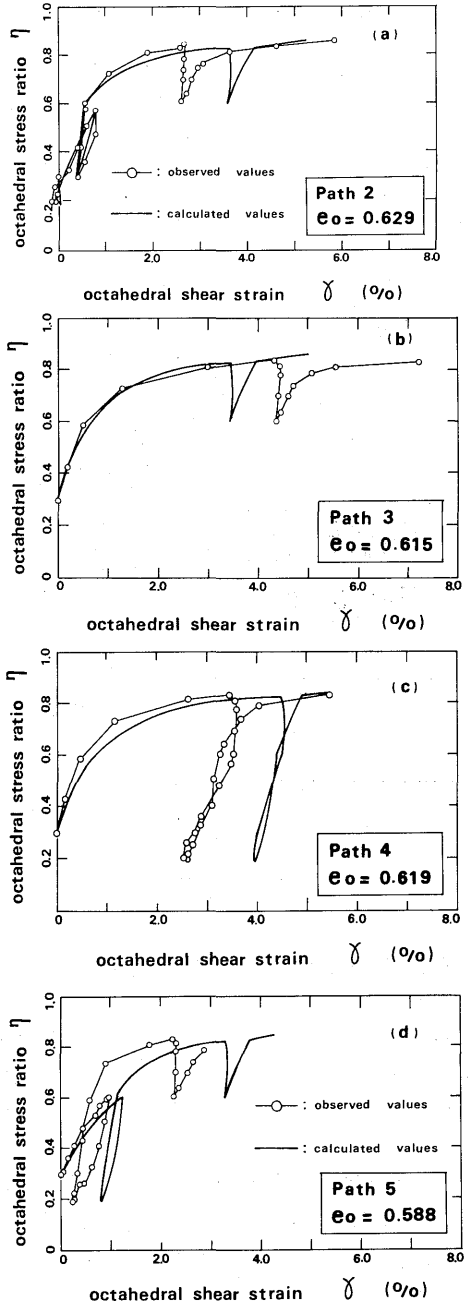


Fig. 10 Behaviour of the octahedral shear strains along with ϕ -shaped stress paths.

きたい。また現在、本提案式の砂地盤の変形解析への適用例を計算中であり、いずれ機会を改めて報告する予定である。末筆ながら本研究に対し貴重な助言を頂いた本学松原茂教授、同伊勢田哲也教授、同落合英俊助教授に感謝の意を表します。なお本研究の計算と図化には九州大学大型計算機センター FACOM-M200 と長崎大学情報処理センター FACOM M-180 AD II を

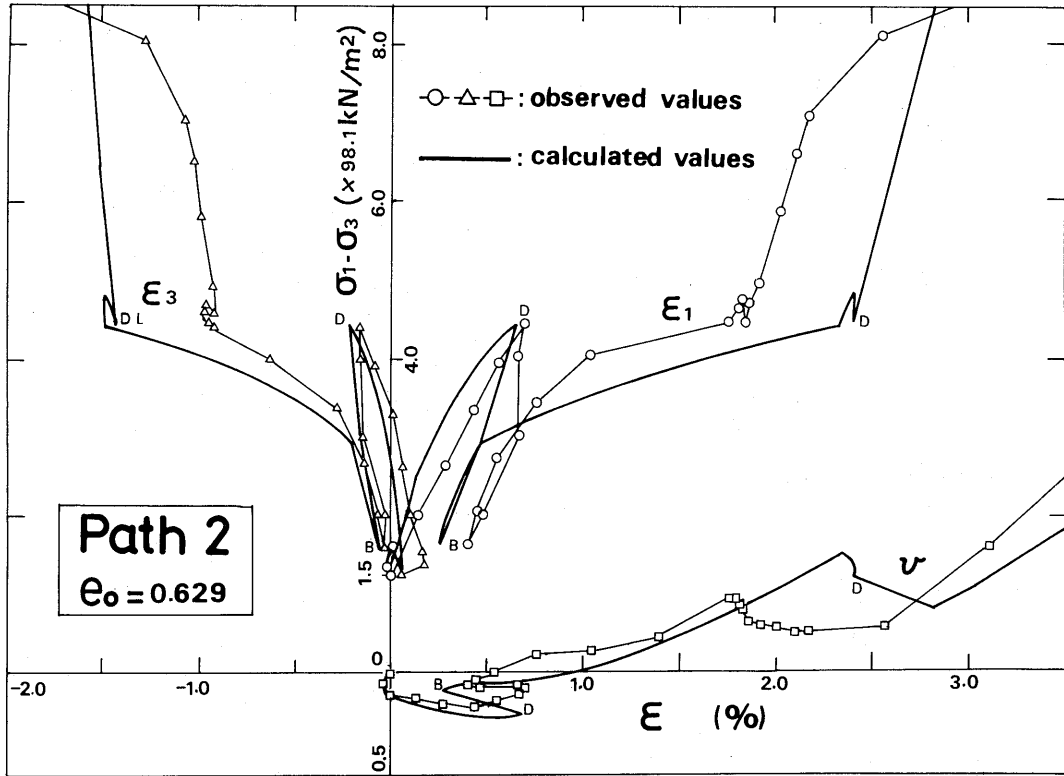


Fig. 12 Stress strain behaviour along with Path-2.

利用したことを附記する。

- 1) 棚橋：第32回土木学会年講概要Ⅲ, pp. 165-166, 1977.
- 2) 棚橋：第13回土質工学研究発表会概要, pp. 385-388, 1978.
- 3) 棚橋：長崎大学工学部研究報告第10号, pp. 47-56, 1978.
- 4) 内藤・棚橋：第33回土木学会年講概要Ⅲ, pp. 61-62, 1978.
- 5) 棚橋・内藤：長崎大学工学部研究報告第11号, pp.

97-105, 1978.

- 6) 例えば最上編“土質力学”第8章, pp. 940-945, 技報堂, 1969.
- 7) Frydman. S et al : C. G. J, vol. 10, pp. 341-362, 1973.
- 8) H. Ohta et al : J. S. S. M. F. E, vol. 15, No. 4, pp. 61-79, 1975.
- 9) 中井・松岡他2名：第14回土質工学研究発表会概要, pp. 385-388, 1979.
- 10) 市原・松沢：土木学会論文報告集第173号, pp. 47-59, 1970.