



Title	非等温乱流場の熱伝達問題における渦拡散係数について
Author(s)	福地, 信義
Citation	長崎大学工学部研究報告, 13(21), pp.187-194; 1983
Issue Date	1983-08
URL	http://hdl.handle.net/10069/24112
Right	

This document is downloaded at: 2020-10-22T08:35:32Z

非等温乱流場の熱伝達問題における 渦拡散係数について

福地信義*

On the Heat Convection with Approximate Eddy Diffusivity in the Non-Isothermal Turbulent Flow

by Nobuyoshi FUKUCHI*

The flow in enclosed non-isothermal space such as air-conditioned room is considered desirably as non-isotropic turbulent flow due to gravitational effects. In this case, the Reynolds stresses and the heat flux terms in the transport equations induced by time-mean should be treated as non-isotropical values including buoyant effects of a gravitational field.

The approximate method based on the expression by Launder et al^{1) 2)} is used in the analyses of this paper. Namely, the Reynolds stresses and the heat flux terms are expressed algebraically by the use of buoyant effects in addition to eddy kinematic viscosity and eddy diffusivity of isotropic turbulent flow³⁾.

In order to investigate the justice of this method, the calculation about free shear flow, jets and turbulent flow in pipe are carried out. The calculated flow velocity and air temperature by three dimensional analyses of finite element method are compared with the measured values in air conditioning chamber of container type.

1. はじめに

空調時の室内のように、乱流状態の空気流によりその温度環境をコントロールする閉鎖空間において、気流速が比較的遅いなどの理由により空間内の空気が完全に混合されない場合には非等温空間となり、浮力の影響を含めた非等方性乱流場の熱伝達問題として解析する必要がある。

乱流場の解析を行うための基礎式として一般に運動量と温度の輸送方程式に時間平均を施して用いるが、この操作により輸送方程式の中にレイノルズ応力と乱流熱流に関する項が現われる。Launder ら¹⁾²⁾はこれらを求めるために、浮力の影響を含めた近似化された輸

送方程式である連立方程式を直接解く複雑な方法を提案している。

本論文では解法の簡易化を図るためにレイノルズ応力と乱流熱流を、いわゆる2方程式モデル³⁾を解いて求めた、等方性乱流の渦動粘性係数 ν_t と渦拡散係数 κ_t に非等温のための浮力の影響を代数的に付加することにより表わし、乱流場の解析に用いる。この乱流熱流の項により浮力の影響を考慮した近似的な渦拡散係数を得ることができる。

これらの近似式の妥当性を調べるために、自由せん断流、噴流および管内流について計算を行い、近似式のもつ問題点について検討する。また、これらの近似

昭和58年4月30日受理

*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

式を用いて熱伝達解析を行い、コンテナ型の恒温室で行った流速分布および温度分布に関する計測値との比較を行う。

2. 非等温乱流場の理論的解析

速度、圧力および温度をそれぞれ時間に関する平均値(記号“ $\bar{\quad}$ ”で示す)と変動成分(記号“ \prime ”で示す)の和で表わし、次のように書く。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u_i' \quad (i=1, 2, 3) \\ p &= \bar{p} + p', \quad \theta = \bar{\theta} + \theta' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

以下に示す諸式は tensor 表示とし、添字については総和規約に従うものとする。

2. 1 レイノルズ応力と乱流熱流

非等温乱流場の解析を行う基礎式として運動量と温度の輸送方程式を時間平均した式を用いるが、この平均流の輸送方程式の中にはレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ と乱流熱流 $\overline{u_i \theta}$ の項が現われる。この両者は浮力の影響のため分子サイズでは等方性でも大きいスケールでは非等方性となる。

Lauder¹⁾はレイノルズ応力および乱流熱流の輸送方程式において生産項と消散項が平衡している仮定と消散運動が等方的である仮定を行い次式を導いている。

$$\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} q \delta_{ij} \right) / q = \phi \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) / \varepsilon \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\overline{u_i \theta'} &= \phi_T \frac{q}{\varepsilon} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \\ &+ \phi_T' \frac{q}{\varepsilon} \overline{u_k \theta'} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - c_{T\beta} g_i \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\phi = (1 - c_2) / c_1$, $\phi_T = 1 / c_{1T}$, $\phi_T' = \phi_T (1 - c_{2T})$

$$\begin{aligned} P_{ij} &\equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \\ &- \beta \left(\overline{u_i \theta'} g_j + \overline{u_j \theta'} g_i \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$P \equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \beta \overline{u_i \theta'} g_i \right) \quad (5)$$

ただし、 q は乱流エネルギー、 ε はエネルギーの粘性消散率、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また β は流体の体積膨張率であり、 g を重力の加速度とし x_1, x_2 を水平方向、 x_3 を鉛直方向(上向きを正)の座標とすると $g_1 = g_2 = 0, g_3 = -g$ である。

なお、 P_{ij} と P は流れのせん断と浮力による $\overline{u_i u_j}$ と q の生産を表わしている。Lauder は上式中の各定数を経験的に次のように定めている¹⁾。

$$c_1 = 2.0, c_2 = 0.6, c_{1T} = 1.6, c_{1T}' = 3.2, c_{2T} = 0.5$$

平均流の流速、温度、乱流エネルギーおよび粘性消散率が決まれば、9元の連立方程式(2)、(3)を解くこと

により、レイノルズ応力と乱流熱流の大きさは決定される。この方法は計算が複雑であり、計算点の多い空間内の熱伝達解析には適さないで、ここでは(2)式および(3)式に基づき、等方性の渦動粘性係数 ν_t および渦拡散係数 χ_t を主体として、これに浮力の影響を表わす項を付け加える。これに平均流の流速勾配と温度勾配とを結びつけることで、レイノルズ応力と乱流熱流を陽な形に表現して、乱流場の解析に用いる。

等方性の乱流におけるレイノルズ応力と乱流熱流は次のように表わされる³⁾。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} q \delta_{ij} \quad (6)$$

$$-\overline{u_i \theta'} = \chi_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$\nu_t = c_D q^2 \varepsilon^{-1}, \quad \chi_t = \nu_t / Pr \quad (8)$$

ここに、 c_D は定数 ($\cong 0.09$)、 Pr は乱流プラントル数であり、ここでは $Pr = 1.0$ とする。

完結のため、(2)、(3)式の中に浮力の影響が陽の形で現われる項 (βg を含む項) のみを考慮し、 $\overline{u_i u_j}$ の中に陰に含まれる項を無視する⁴⁾。さらに(6)~(8)式を用いると次式が得られる。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} q \delta_{ij} - \phi \frac{q}{\varepsilon} p_{ij} \quad (9)$$

$$-\overline{u_i \theta'} = \chi_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} - \phi_T c_{T\beta} g_i \frac{q^2}{\varepsilon^2} \overline{u_k \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \quad (10)$$

ここに、

$$p_{ij} \equiv -\beta g_i \overline{u_j \theta'} - \beta g_j \overline{u_i \theta'} + \frac{2}{3} \beta g_k \overline{u_k \theta'} \delta_{ij} \quad (11)$$

2. 2 渦拡散係数

温度成層をなす可能性のある非等温空間では、一般に鉛直方向の温度勾配が水平方向のそれより大きいことを考慮して、比例係数 μ を用いて次のように表わす。

$$\overline{u_k \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} = \mu \cdot \overline{u_3 \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} \quad (12)$$

(10)式より鉛直方向の乱流熱流は次のようになる。

$$-\overline{u_3 \theta'} = \chi_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} + \mu \phi_T c_{T\beta} g \frac{q^2}{\varepsilon^2} \overline{u_3 \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} \quad (13)$$

これより

$$-\overline{u_3 \theta'} = \frac{\chi_t}{1 + \mu \phi_T c_{T\beta} B} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} \quad (14)$$

$$\text{ただし、} B \equiv \beta g \frac{q^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} \quad (15)$$

したがって、浮力の影響を考慮した鉛直方向の渦拡散係数は次式で表わされる。

$$\chi_{t3} = \chi_t / (1 + \mu \phi_T c_{T\beta} B) \quad (16)$$

水平方向の乱流熱流は(10)式より、

$$-\overline{u_1\theta} = \chi_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1}, \quad -\overline{u_2\theta} = \chi_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} \quad (17)$$

と与えられるので、これらと(12)式および(14)式より次の関係が成り立つ。

$$-\chi_t \left[\left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{1 + \mu \phi' r C_r B} \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right)^2 \right] = -\mu \frac{\chi_t}{1 + \mu \phi' r C_r B} \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right)^2 \quad (18)$$

これより、乱流熱流の生産項の水平/垂直方向の比であ

る μ は次のようになる。

$$\mu = (1+H)/(1 - \phi' r C_r B H) \quad (19)$$

$$\text{ここに、} H = \left[\left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} \right)^2 \right] / \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right)^2 \quad (20)$$

(19)式による $B-\mu$ の関係および(16)式による $B-\chi_t/\kappa_{t3}$ の関係を Fig. 1 に破線で示す。レイノルズ応力らに関する輸送方程式の中ではその生産項と消散項が平衡するという仮定があるが、実際の計算において B の絶対値または H の値が極端な値をとると、必ずしもこの仮定が成り立たないと考えられるため実線のように修正して計算に用いている。

2. 3 q および ε の輸送方程式

浮力の影響がない場合の渦動粘性係数に相当する(8)式で与えられる ν_t は、平均流の流速と温度が与えられると、次の乱流エネルギー q と粘性消散率 ε に関する輸送方程式を解くことにより求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (q \overline{u_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_{tj}}{\sigma_q} + \nu \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} \\ &+ \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon \\ &- \phi \frac{q}{\varepsilon} p_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \beta g \chi_{t3} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon \overline{u_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_{tj}}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \\ &+ c_1 \frac{\varepsilon}{q} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\ &- c_2 \phi p_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_2 \frac{q \varepsilon}{\nu_t} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{ここに、} \nu_{t1} = \nu_{t2} = \nu_t \equiv Pr \cdot \chi_t, \quad \nu_{t3} \equiv Pr \cdot \chi_{t3} \quad (23)$$

t は時間、 ν は動粘性係数である。式中の各定数は実験より求めた次の値を用いる³⁾。

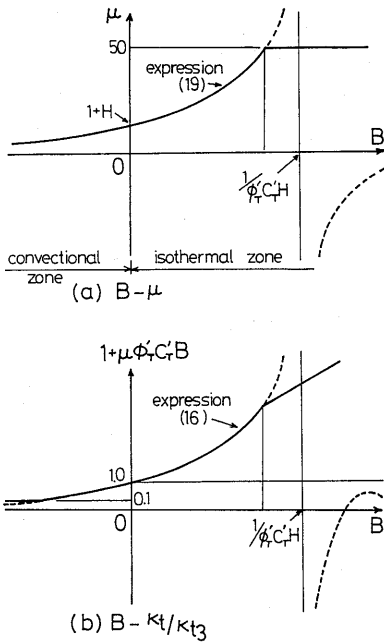


Fig. 1 Relations between B and μ or χ_t/χ_{t3}

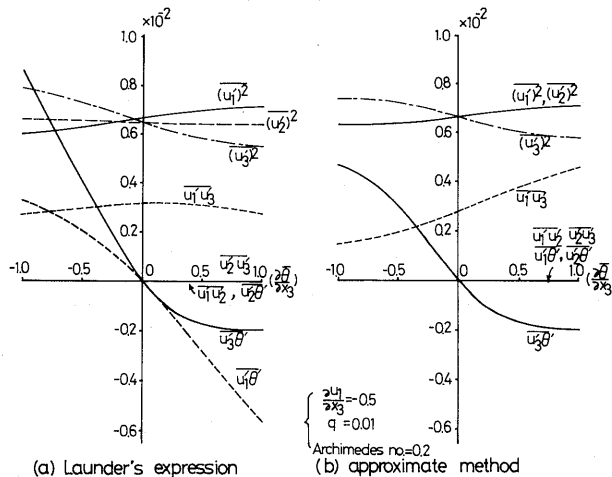


Fig. 2 Reynolds stresses and heat fluxes of free shear flow

$$\sigma_x \cong 1.0, \sigma_e \cong 1.3, c_1 \cong 1.5, c_2 \cong 0.18$$

2. 4 近似式の精度

(1) せん断流

基準の長さ, 流速, 温度差を1とした, 平均流の流速と温度勾配が鉛直方向のみ変化する自由せん断流では $H=0, \mu=1$ となるが, 流速勾配を一定とし温度勾配を変化させた場合のレイノルズ応力と乱流熱流の値を Launder の式と近似式(9), (14), (17)により求め, Fig. 2 に示す. x_1 方向に温度勾配がないものと仮定しているため0となる $\overline{u_1 \theta'}$ を除いて両者はほぼ一致している.

この場合の乱流エネルギーの生産率は次式で表わされる.

$$P = -\overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + \beta g \overline{u_3 \theta'} \quad (24)$$

この P の値は粘性消散率 ϵ と等しいと仮定しているが, 等温流の場合 $\overline{u_3 \theta'} = 0, \overline{u_1 u_3} > 0$ であるため, 速度勾配 $(\partial \overline{u_1} / \partial x_3) > 0$ の場合には P, ϵ が負となる不都合が起る.

2 方向に同じ速度勾配をもつ環状せん断流について計算した結果を Fig. 3 に示す. 近似式と Launder の式による解は $\overline{u_1 \theta'}$ を除いて全体的に一致している.

鉛直方向の渦拡散係数 κ_{t3} は(14)式より $\overline{u_3 \theta'}$ の値を用いて求められるため $\overline{u_3 \theta'}$ の精度は重要である. Fig. 4 (a) に温度勾配および速度勾配の大きさを変化させた場合の $-\overline{u_3 \theta'}$ の変化を Launder の式(左図)と近似式(右図)によるものと比較して示す. Fig. 4(b) は近似式より求めた水平方向と鉛直方向の渦拡散係数 κ_{t1}, κ_{t3} である. 温度勾配が正でその絶対値が大きくなるに従い

温度成層は発達し, 鉛直方向の拡散は不活発となるため κ_{t3} の値が小さくなるのが見られる.

(2) 2次元自由噴流

水平方向の2次元自由噴流内の渦拡散係数を求めるために次の Goertler の解⁵⁾を用いて計算を行う.

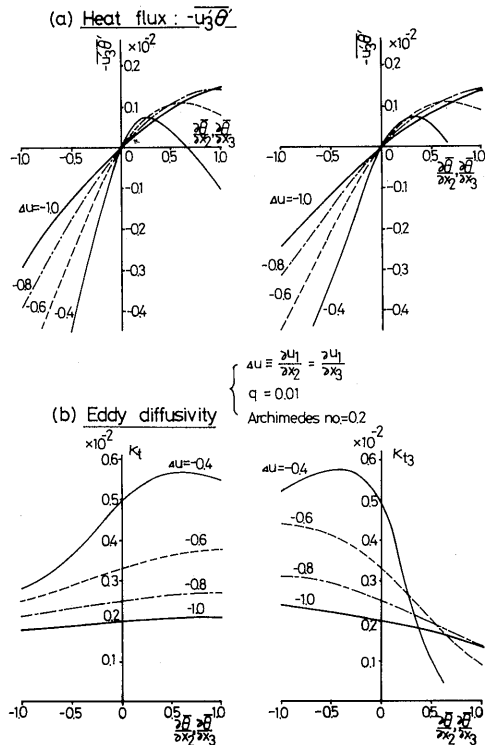


Fig. 4 Heat flux $-\overline{u_3 \theta'}$ and eddy diffusivity of annular shear flow

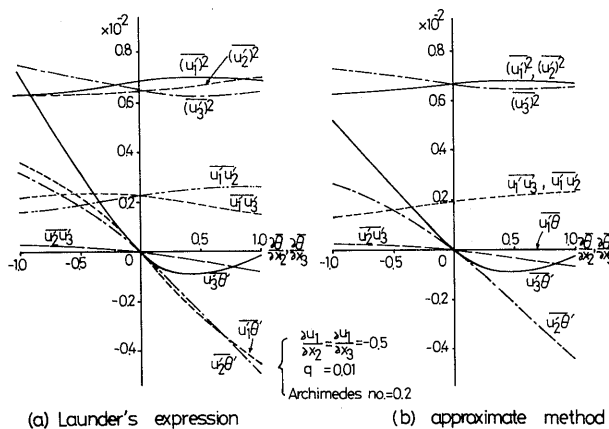


Fig. 3 Reynolds stresses and heat fluxes of annular shear flow

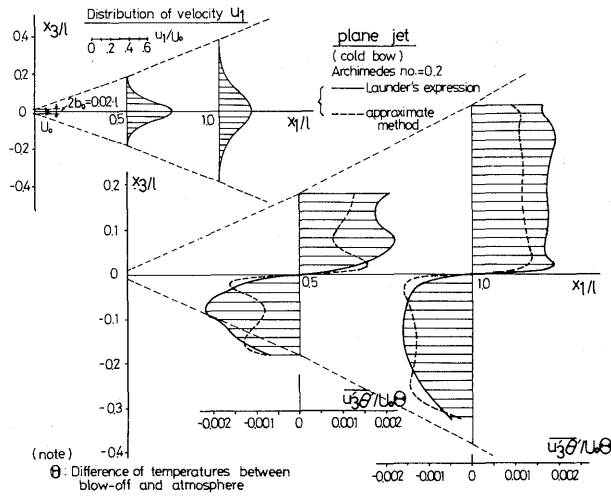


Fig. 5 Distributions of velocity and heat flux $\overline{u_3\theta}$ in plane jet

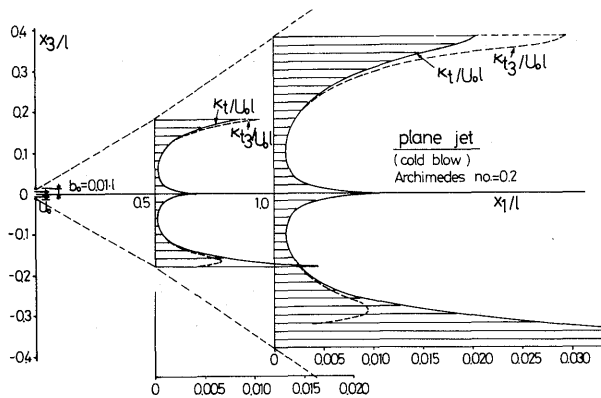


Fig. 6 Distributions of eddy diffusivity in plane jet

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_m(1 - \tanh^2 \xi), & u_2 &= 0 \\ u_3 &= u_m(\xi - \xi \tanh^2 \xi - 0.5 \tanh \xi) / \sigma \\ u_m &= U_0 \alpha \sqrt{b_0 / x_1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 $\xi = \sigma x_3 / x_1$ 、 U_0 は吹き出し速度、 b_0 は吹き出し口の高さを表す。2つの定数は実験結果⁵⁾より $\sigma = 7.67$ 、 $\alpha = 3.50$ を用いる。

(25)式より計算した u_1 の分布を Fig. 5 に示す、同図に冷風を吹き出した場合の $\overline{u_3\theta}$ の分布を近似式(14)によるものと Launder の式による結果と比較して示す。また、近似式により求めた渦拡散係数 K_1 、 K_3 の分布を Fig. 6 に示す。

(3) 管内乱流

管内乱流の流速分布は次の Fritsch の式で与えられる。

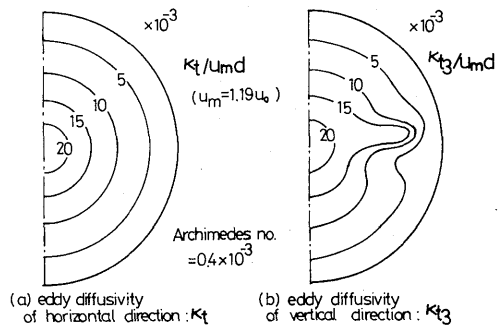


Fig. 7 Distributions of eddy diffusivity of turbulent flow in pipe

$$u = 1.19u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{2z}{d} \right)^{1.25} \right\}^{1/7} \quad (26)$$

ここに、 u_0 は管内断面の平均流速、 d は管内径、 z は中心からの距離である。

この流速勾配に温度勾配が比例しているものとして求めた渦拡散係数を Fig. 7 に示す。

3. 乱流場の熱伝達

3.1 運動量および温度の輸送方程式

時間平均を施した Navier-Stokes の運動方程式はレイノルズ応力の項に(9)式を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho q \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_i + \nu) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ & - \phi \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q}{\varepsilon} p_{ij} \right) - \beta g_i \bar{\theta} \end{aligned} \quad (27)$$

ここに、 ρ は流体の密度である。

平均流の熱拡散方程式は乱流熱流の項に(14)式および(17)式を用いて次の式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\kappa_{ij} + \kappa) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right\} \quad (28)$$

ここに、 κ は熱拡散係数である。

3.2 3次元解析

対象空間内の流速および温度分布を知るために有限要素法を用いた3次元解析を行う。乱流の連続方程式と速度 \bar{u}_i 、乱流エネルギー q 、粘性消散率 ε および温度 $\bar{\theta}$ に関する輸送方程式(27), (21), (22), (28) に対し、Galerkin 法を適用して有限要素法のための定式化を行う。これより得た \bar{u}_i 、 \bar{p} 、 q 、 ε の未知量に関する非線形連立方程式は Newton-Raphson 法により数値的に解き、時間微分項については差分近似を行った。なお、これらの方程式を解く際の境界条件は文献⁶⁾に従った。

有限要素としては \bar{u}_i 、 q 、 ε および $\bar{\theta}$ には20節点アイソパラメトリック要素を用い、 \bar{p} には8節点アイソパラメトリック要素を用いる。(Fig. 11 参照)

3.3 計測値との比較

(1) 恒温室における計測

Fig. 8 に示すコンテナ型恒温室において、冷風を空調ユニット上部より吹き出し、側壁上部より排出する際の室内空気の流速および温度計測を行った。温度計測には C-C (銅-コンスタンタン) 熱電対を

用い、流速は熱線風速計で測った。

吹き出し速度 $u_i = 3.44 \text{ m/sec}$ (換気回数15.0回/hに相当) の場合に計測した室内空気の流速分布を Fig. 9 (i) および温度分布を Fig. 10 に示す。なお、実験の詳細については文献⁷⁾に述べている。

(2) 数値計算

恒温室における計測を Fig. 11 に示すようにモデル化して数値計算を行った。2. 1~2. 3 で述べた式を用いて求めた換気回数 $\tau = 0.25$ 時における乱流エネ

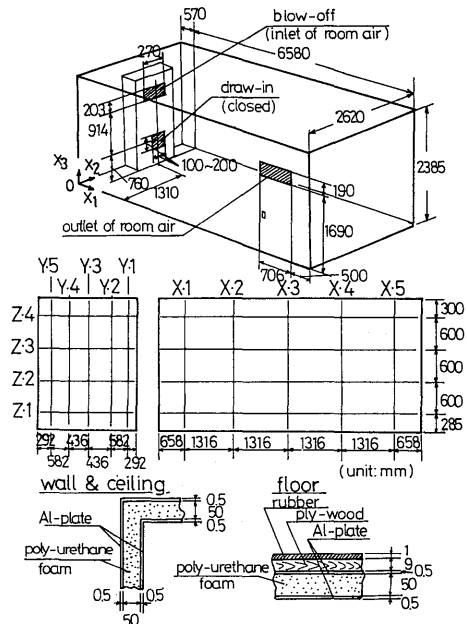


Fig. 8 Air conditioned chamber and measuring points

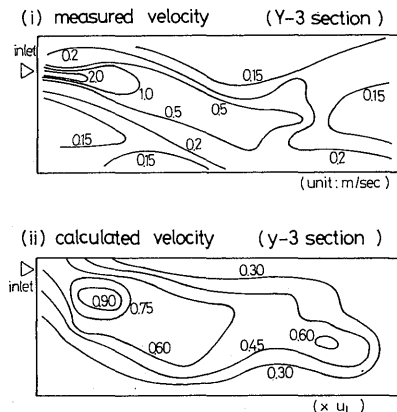


Fig. 9 Comparisons between measured velocity in air conditioned chamber and calculated velocity in calculated model

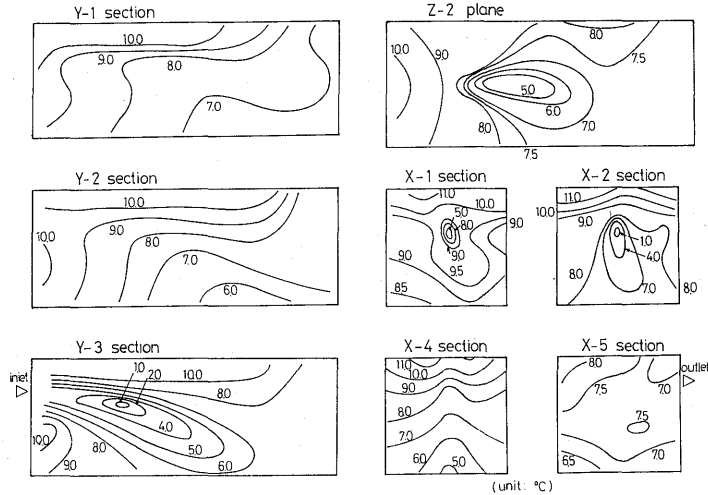


Fig. 10 Distributions of measured air temperature at $t = 10$ min.

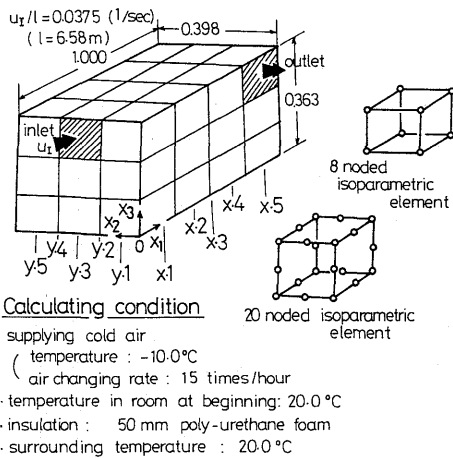


Fig. 11 Three dimensional calculated model of air conditioned chamber

ルギー q , 粘性消散率 ϵ および渦拡散係数 κ_t, κ_{t3} の分布を Fig. 12 に示す。

Fig. 13 はこの計算モデルの流速分布である。さらに、実測値と比較して、中央断面における流速等高線を Fig. 9 (ii) に示す。計算モデルは計測モデルより吹き出し口が広いので噴流域の幅が異なるが、両者の全体的な流れの様子は似ている。

この流速分布に対する温度分布を Fig. 14 に示す。計算モデルでは計測例 (Fig. 10) よりも噴流域が広いので、移流により支配される範囲が広がっている。両者の温度分布は定性的には一致するが、細部にはかな

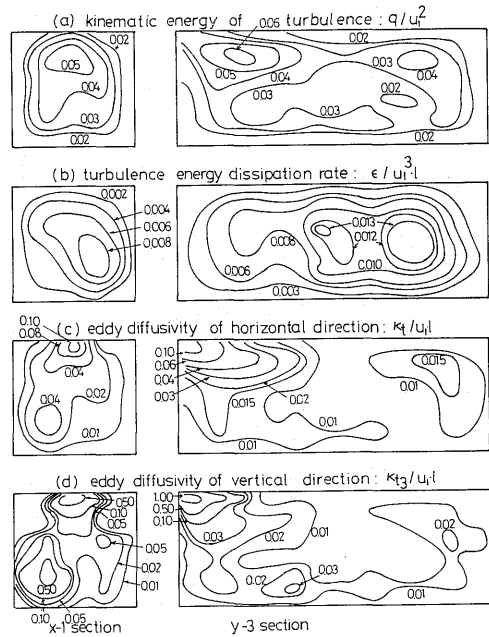


Fig. 12 Distributions of q, ϵ, κ_t and κ_{t3} in calculated model

りの差異が認められる。この差異を除去するためには境界条件および給気条件を計測に合せて解析する必要があるが、解析技術上の問題がいくつか残されている。

4. おわりに

非等温乱流場の熱伝達解析には浮力の影響を加味した渦拡散係数が必要であるが、これを Launder の式に

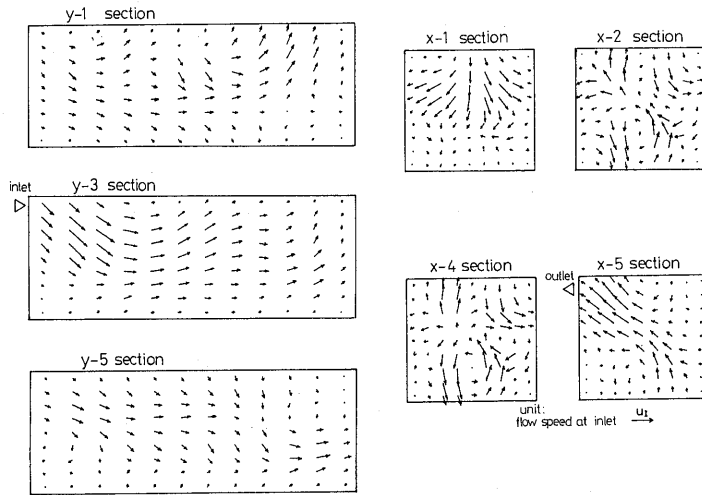
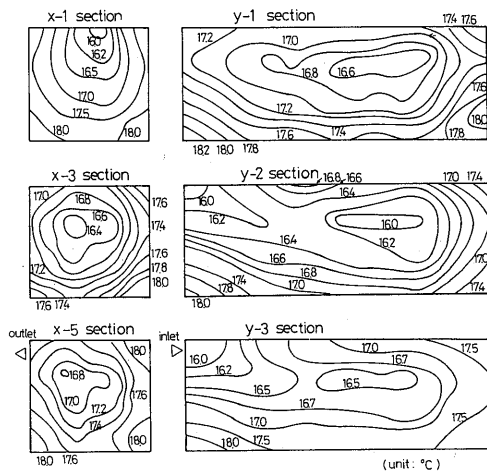


Fig. 13 Distributions of calculated flow velocity in calculated model

Fig. 14 Distributions of calculated air temperature in calculated model at $\tau = 0.25$

基づいた近似式を導いた、この式を用いてせん断流や噴流等について計算を行い、近似度を調べた結果、計算点の多い熱伝達解析には有用であることを明らかにした。

この近似式を含む、浮力の影響を考慮した諸輸送方程式の妥当性を調べるために恒温室における流速および温度計測値との比較を行い、定性的な一致を見たが細部にはかなりの差異がある。この差異の除去には理論の精密化、特に層流域との連続性、各定数の普遍性、諸仮定の妥当性等の問題解決が残されている。

参考文献

- 1) B. E. Launder: On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech. vol. 67, part 3 (1975)
- 2) B. E. Launder, G. J. Reece, W. Rodi: Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, J. Fluid Mech. vol. 68, part 3 (1975)
- 3) B. E. Launder, D. B. Spalding: Mathematical Models of Turbulence, Academic Press (1972)
- 4) 相良和伸: 浮力の影響がある流れの乱流モデルについての研究, 日本建築学会論文報告集, 第305号 (1981)
- 5) N. ラジャラトナム: 噴流, (1981) 森北出版
- 6) 福地, 柗原: 船舶機装における熱伝達問題の解析 (その1), 冷凍冷蔵船の倉内温度分布, 日本造船学会論文集, 第151号 (1982)
- 7) 福地, 柗原: 船舶機装における熱伝達問題の解析 (その2), 浮力の影響がある場合, 日本造船学会論文集, 第153号 (1983)