



|            |   |
|------------|---|
| Title      | 対称積層長方形板の振動，座屈および動的安定性  |
| Author(s)  | 高橋, 和雄; 江島, 裕章; 横山, 貴浩  |
| Citation   | 長崎大学工学部研究報告, 22(39), pp.209-216; 1992   |
| Issue Date | 1992-07   |
| URL        | <a href="http://hdl.handle.net/10069/24385">http://hdl.handle.net/10069/24385</a> |
| Right      |   |

This document is downloaded at: 2019-04-26T14:08:11Z

## 対称積層長方形板の振動, 座屈および動的安定性

高橋 和雄\*・江島 裕章\*\*  
横山 貴浩\*\*\*

## Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Symmetrically Laminated Anisotropic Rectangular Plate

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Hiroaki ESHIMA\*\*,  
and Takahiro YOKOYAMA\*\*\*

Vibration, buckling and dynamic stability of a symmetrically laminated anisotropic rectangular plate are reported for various boundary conditions, fiber orientations of laminas and configuration of a laminate in this paper. This problem is solved by using a Galerkin method and the harmonic balance method.

At first, vibration and buckling properties are shown for three different materials, various boundary conditions and fiber orientations. Then, dynamic unstable regions of a symmetrically laminated square plate are obtained and compared with that of a isotropic square plate.

## 1. まえがき

複合材料は, 一般に異なる材料を組み合わせたものであって, 力学的には異方性を示す。このような複合材料の中でも繊維強化プラスチック (FRP) の積層板は, 各層の材質, 板厚および繊維方向を変化させることによって, 目的に応じた材料を得ることができるため, 多くの分野において利用されている<sup>1)</sup>。そのため, 従来の等方性材料と違った力学特性をもつ積層板では, その静的解析および動的解析が数多く行われている<sup>2) 3)</sup>。しかし, 動的安定性まで取り扱った研究は, ほとんど行われていないようである。

そこで, 本研究では, 積層長方形板の動的安定性を解明する第一歩として, 比較的取り扱いの容易な材質, 板厚および繊維方向が中央面对称である積層板を対象

に振動, 座屈および動的安定性を明らかにする。このような積層板の運動方程式に Galerkin 法による近似解法を用いて, 固有振動解析, 座屈解析および動的安定解析を行う。数値計算においては, 異方性の度合いが違った3種類の材料からなる積層長方形板の固有振動数, 座屈荷重および動的不安定領域を明らかにする。これらを, 各種の境界条件および繊維角度のもとに力学的特性を把握する。

## 2. 運動方程式および解法

## (1) 積層板の曲げ剛性

直交異方性を示すラミナと呼ばれる単層板を, 重ね合わせた積層板を解析するためには, 積層理論に基づいて板全体の曲げ剛性を決定することが必要である。

平成4年4月30日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*大学院修士課程土木工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

\*\*\*西日本菱重興産(株) (Nishinippon Ryoju Kosan Co.)

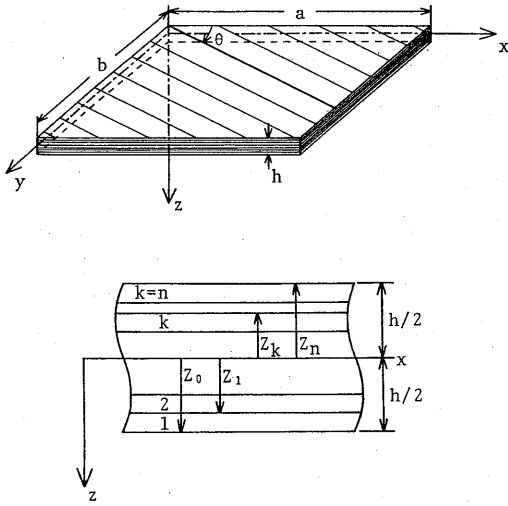


Fig. 1 Geometry and coordinate of the system.

そこで, Fig. 1 のように  $n$  層からなる中央面に関して, 各層の材質, 板厚および繊維方向が対称な長方形板を考える<sup>2)</sup>。ここで, 各単層板は完全に接着されており, 滑りを起こさないものとし, 積層板は薄板の性質を有するものとする。また, 面外せん断変形を無視して考える。

いま, 中央面から  $Z_{k-1}$  離れた  $k$  番目の層について考える。 $x$  軸と単層板の繊維方向のなす角度を  $\theta$  とすると, 材料の主軸方向における応力-ひずみの関係は次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (1)$$

ここに,  $Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$ ,  
 $Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$ ,  
 $Q_{12} = \nu_{21} Q_{11} = \nu_{12} Q_{22}$ ,  $Q_{66} = G_{12}$ ,  
 $E_1, E_2$ : 材料の主軸方向の縦弾性係数,  
 $G_{12}$ : 横弾性係数,  $\nu_{12}, \nu_{21}$ : ポアソン比

積層板が中央面对称である場合, 曲げモーメントと曲率の関係は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで, 積層板全体の曲げ剛性  $D_{ij}$  は次式のように表わすことができる<sup>4)</sup>。

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (3)$$

ここに,  $\bar{Q}_{ij}$  は式(1)の  $Q_{ij}$  を  $x$ - $y$  座標系に変換した

もので, 次のようになっている。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \\ &\quad s^3c, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \\ &\quad sc^3, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + \\ &\quad c^4), \\ s &= \sin\theta, \quad c = \cos\theta, \quad \theta: \text{単層板の繊維角度} \end{aligned}$$

## (2) 運動方程式および境界条件

積層長方形板に対して,  $x$  方向に一様分布の静的面内力  $N_{x0}$  と変動面内力  $N_{xt} \cos \Omega t$  が作用する場合を考える。式(2)のカップリング項 ( $D_{16}, D_{26}$ ) を無視して, この積層板に作用する力のつり合いを考えると, 運動方程式は次式で与えられる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} L(w) &= D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &\quad + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

ここに,  $w$ : たわみ,  $x, y$ : 平板中央面の座標系,  $D_1 = D_{11}$ ,  $D_2 = D_{22}$ ,  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ : 板剛度,  $\rho$ : 板の密度,  $h$ : 板厚,  $N_{x0}$ : 静的面内力,  $N_{xt}$ : 変動面内力の振幅,  $\Omega$ : 変動面内力の円振動数,  $t$ : 時間

長方形板の境界条件には, 単純支持と固定の組合せからなる次の4種類を考える。

- CASE I: 全周辺単純支持,
- CASE II: 荷重辺単純支持, 他辺固定,
- CASE III: 荷重辺固定, 他辺単純支持,
- CASE IV: 全周辺固定

## (3) 解法

式(4)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (5)$$

ここに,  $T_{mn}$ : 時間関数,

$W_{mn}$ : 境界条件を満足する座標関数

式(5)の  $W_{mn}$  を自由振動の固有振動形と仮定すると次式が成り立つ (Appendix A)。

$$\begin{aligned} \frac{D_1^*}{\beta^4} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \xi^4} + \frac{2D_3^*}{\beta^2} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\ + D_2^* \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \eta^4} = \rho h \frac{b^2}{D_1^*} \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (6) \end{aligned}$$

ここに,  $\xi=x/a, \eta=y/b, \beta=a/b$  (縦横比),

$$D_1^* = D_1/D_1^0, D_2^* = D_2/D_1^0, D_3^* = D_3/D_1^0,$$

$D_1^0: \theta=0^\circ$  の板剛度,  $\omega_{mn}$ : 固有円振動数

また, 式(5)を式(4)に代入して, 式(6)の関係をを用いると次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[ \left\{ \dot{T}_{mn} + \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{11}^2} T_{mn} \right\} W_{mn} + \frac{\pi^2 \lambda_{\sigma}}{k_{11}^0 \beta^2} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2} T_{mn} \right] \quad (7)$$

ここに,  $\tau = \omega_{11}^0 t, \bar{\omega} = \Omega/\omega_{11}^0, \bar{N}_{x0} = N_{x0}/N_{\sigma}, \bar{N}_{xt} = N_{xt}/N_{\sigma}, \lambda_{\sigma} = N_{\sigma} b^2/D_1^0 \pi^2, N_{\sigma}$ : 座屈面内力,  $k_{11}^0 = \sqrt[4]{\rho h b^4 \omega_{11}^0{}^2/D_1^0}, k_{11}^0: \theta=0^\circ$  の 1 次 の 振 動 固 有 値,  $\omega_{11}^0: \theta=0^\circ$  の 1 次 の 固 有 円 振 動 数

式(5)は仮定した解であるため, 式(4)の厳密解ではない。したがって, 式(7)に Galerkin 法を適用すると, 次式が得られる。

$$[I]\{\dot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (8)$$

ここに,  $\{T\} = \{T_{11} T_{12} \cdots T_{1N} T_{21} T_{22} \cdots T_{NN}\}^T,$

$$[F] = [A]^{-1}[B], [G] = [A]^{-1}[C],$$

$$A\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = I_{mnij}^1,$$

$$B\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = a_{mn} I_{mnij}^1,$$

$$C\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = \gamma I_{mnij}^2,$$

$$a_{mn} = \omega_{mn}^2/\omega_{11}^0{}^2, \gamma = \pi^2 \lambda_{\sigma}/k_{11}^0 \beta^2,$$

$$I_{mnij}^1 = \int_0^1 \int_0^1 W_{mn} W_{ij} d\xi d\eta,$$

$$I_{mnij}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2} W_{ij} d\xi d\eta$$

### 3. 動的安定解析

式(8)式は連立の Mathieu の方程式であり, その一般解は次式のように仮定することができる<sup>5)</sup>。

$$\{T\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1} (\mathbf{a}_k \sin k\bar{\tau} + \mathbf{b}_k \cos k\bar{\tau}) \right\} \quad (9)$$

ここに,  $\bar{\tau} = \bar{\omega} \tau, \lambda$ : 未定数,  $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ : 未知のベクトル

式(9)を式(8)に代入して, 調和バランス法を適用すると, 未知のベクトルを求めるための同次方程式が得られる。これは 2 倍サイズの固有値問題に変換して解くことができる。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに,  $[M_0], [M_1], [M_2]$ : 係数行列,  $\{Y\} = \lambda \{X\}, \{X\} = \{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots\}^T$

式(10)は非対称行列の固有値問題の基礎式である。得られた固有値の実数部の値が全て負ならば, 式(9)の一般解に含まれている  $e^{\lambda \tau}$  が時間とともに収束するために安定, 逆に一つでも正ならば  $e^{\lambda \tau}$  が発散するために不安定となる。

### 4. 対称積層板の曲げ剛性

本研究の計算に用いる 3 種類の FRP 板の材料定数は, 文献 2) によれば Table 1 のように与えられる。

$E_2/E_1$  の値をみると, 異方性の度合いは材料(1) EGLASS/EP が最も小さく, 以下, (2)BORON/EP, (3)GRAPHITE/EP の順に大きくなっている。

Table 1 Material properties.

| material                              | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $\nu_{12}$ |
|---------------------------------------|-------------|-------------|----------------|------------|
| (1) EGLASS/EP<br>( $E_2/E_1=0.41$ )   | 60.7        | 24.8        | 11.99          | 0.23       |
| (2) BORON/EP<br>( $E_2/E_1=0.09$ )    | 209         | 19          | 6.4            | 0.21       |
| (3) GRAPHITE/EP<br>( $E_2/E_1=0.06$ ) | 138         | 8.96        | 7.1            | 0.30       |

Table 2 は以上の 3 種類の材料を対象に, 式(3)によって積層板全体の曲げ剛性を計算したものである。どの材料も, 繊維角度  $\theta=0^\circ$  の曲げ剛性で無次元化している。繊維角度が  $\theta$  と  $-\theta$  の組合せから成る中央面对称の積層板の場合には, 面内と面外の連成に関係のない曲げ剛性は, 積層数の影響を受けない。

Table 2 Material bending stiffness.

| bending stiffness               | material        | $\theta=0^\circ$ | $\theta=15^\circ$ | $\theta=30^\circ$ | $\theta=45^\circ$ |
|---------------------------------|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $D_1^*$                         | (1) EGLASS/EP   | 1.000            | 0.932             | 0.768             | 0.592             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 1.000            | 0.881             | 0.598             | 0.313             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 1.000            | 0.886             | 0.612             | 0.327             |
| $(=D_{11}^*)$                   | (1) EGLASS/EP   | 0.408            | 0.420             | 0.473             | 0.592             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 0.091            | 0.094             | 0.144             | 0.313             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 0.065            | 0.076             | 0.145             | 0.327             |
| $D_2^*$                         | (1) EGLASS/EP   | 0.094            | 0.122             | 0.178             | 0.206             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 0.020            | 0.077             | 0.193             | 0.252             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 0.020            | 0.071             | 0.174             | 0.226             |
| $(=D_{22}^*)$                   | (1) EGLASS/EP   | 0.193            | 0.221             | 0.277             | 0.305             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 0.030            | 0.089             | 0.205             | 0.263             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 0.051            | 0.102             | 0.205             | 0.256             |
| $D_3^*$                         | (1) EGLASS/EP   | 0.480            | 0.564             | 0.732             | 0.816             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 0.080            | 0.255             | 0.604             | 0.778             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 0.122            | 0.276             | 0.584             | 0.738             |
| $(=D_{12}^*)$<br>+ 2 $D_{66}^*$ | (1) EGLASS/EP   | 0.480            | 0.564             | 0.732             | 0.816             |
|                                 | (2) BORON/EP    | 0.080            | 0.255             | 0.604             | 0.778             |
|                                 | (3) GRAPHITE/EP | 0.122            | 0.276             | 0.584             | 0.738             |

5. 固有振動数特性

Fig. 2は, 材料(1)EGLASS/EP, (3)GRAPHITE/EPを用いた荷重辺固定, 他辺単純支持 (CASE III) の場合の固有振動数の収束性を示したものである。異方性の度合い, 繊維角度に関係なく収束性は非常に良く, 5項程度とれば十分である。そのため, 本研究では10項を採用して数値計算を行う。

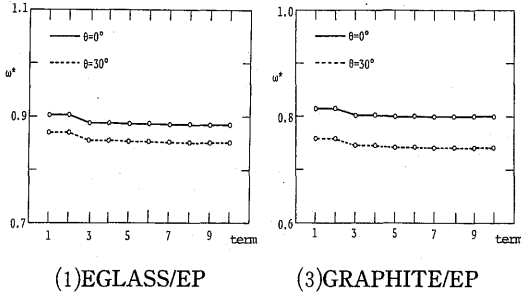


Fig. 2 Convergence of natural frequencies: CASE III and  $\beta=1.0$ .

Fig. 3, 4は, それぞれ異方性の度合いが異なった3種類の材料からなる, 積層正方形板の全周辺単純支持 (CASE I), 荷重辺単純支持, 他辺固定 (CASE II) の固有振動数曲線を示している。縦軸の固有振動数  $\omega^*$ は, それぞれ等方性板の1次の固有振動数で無

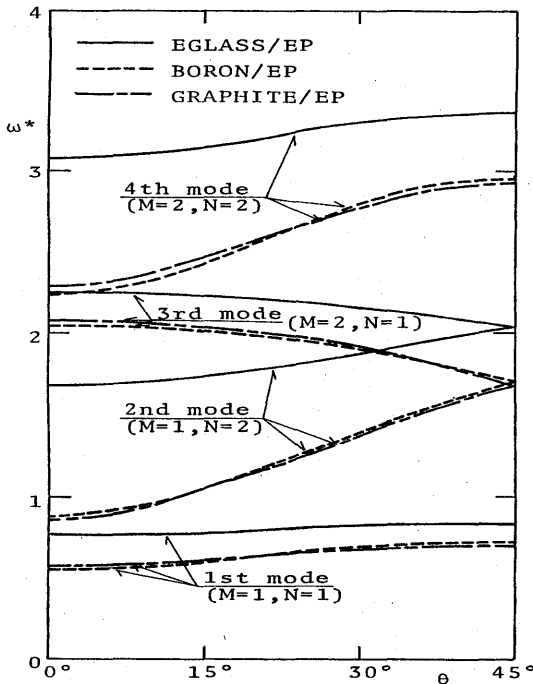


Fig. 3 Relation between natural frequency  $\omega^*$  and fiber angle  $\theta$  for three different materials: CASE I and  $\beta=1.0$ .

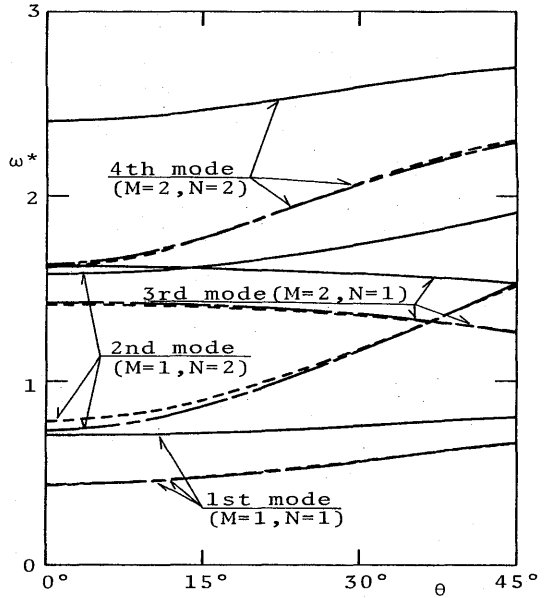


Fig. 4 Relation between natural frequency  $\omega^*$  and fiber angle  $\theta$  for three different materials: CASE II and  $\beta=1.0$ .

次元化している。また, 横軸は単層板の繊維角度 $\theta$ である。ここで,  $M, N$ は正方形板における  $x$  方向と  $y$  方向のそれぞれの半波長の数を意味している。

積層板では境界条件に関係なく, 全体的に等方性板と比較して, 固有振動数が低くなる。そして, Fig. 3, 4のようにCASE I, IIの場合, 繊維角度 $\theta$ を大きくすることによって1次, 2次および4次の固有振動数は増大し, 3次の固有振動数が減少している。特に, その変化は2次と4次において著しい。

以上のような繊維角度 $\theta$ による固有振動数の変化は, 境界条件に関係なく, 材料(3)GRAPHITE/EPのように異方性の度合いが大きい材料ほど, その変化は激しくなる。なお, 中央面对称の積層正方形板では, その固有振動形は等方性板とほとんど同じになる。

6. 座屈特性

Fig. 5は, 材料(1)EGLASS/EP, (3)GRAPHITE/EPを用いた荷重辺単純支持, 他辺固定 (CASE II) の場合の座屈固有値の収束性を示したものである。Fig. 2の固有振動数解析と同様に, 異方性の度合い, 繊維角度に関係なく収束性は非常に良い。したがって, 固有振動数解析と同様に10項を採用して数値計算を行う。

Fig. 6, 7は, それぞれ全周辺単純支持 (CASE I) の材料(1)EGLASS/EP, (3)GRAPHITE/EPの場合の座屈曲線である。Fig. 8は, 荷重辺固定, 他辺単純支

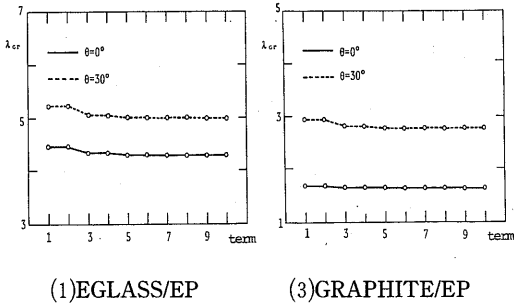


Fig. 5 Convergence of buckling eigenvalues: CASE II and  $\beta=1.0$ .

持 (CASE III) の材料(1)EGLASS/EP の場合の座屈曲線である。図において、縦軸は座屈固有値  $\lambda_{cr}$  で、横軸が縦横比  $\beta$  である。 $M, N$  は、それぞれ  $x$  方向と  $y$  方向の半波長の数を意味している。

等方性板と比較して、座屈固有値は小さくなっているが、座屈曲線の変化パターンは等方性板の場合と同じである。しかし、異方性の度合いが小さい材料ほど、半波長の数は多く、等方性の長方形板の場合に近づいている。

また、積層長方形板では、異方性の度合い、境界条件に関係なく、繊維角度  $\theta$  を大きくすると座屈固有値が増大している。特に、 $15^\circ$  と  $30^\circ$  の間の変化は著しい。

次に、Fig. 6 と Fig. 7 を比較すると、異方性の度合いが大きい材料(3)GRAPHITE/EP では、繊維角度を

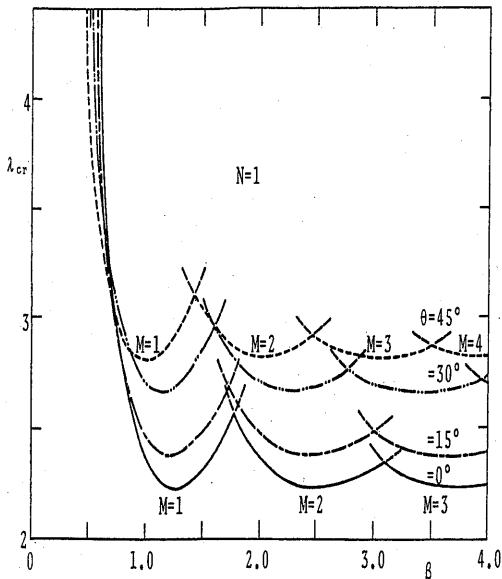


Fig. 6 Relation between buckling eigenvalue  $\lambda_{cr}$  and aspect ratio  $\beta$  for four values of fiber angle  $\theta$ : CASE I and (1)EGLASS/EP.

$\theta=45^\circ$  とすることにより座屈固有値は約 2 倍になっている。

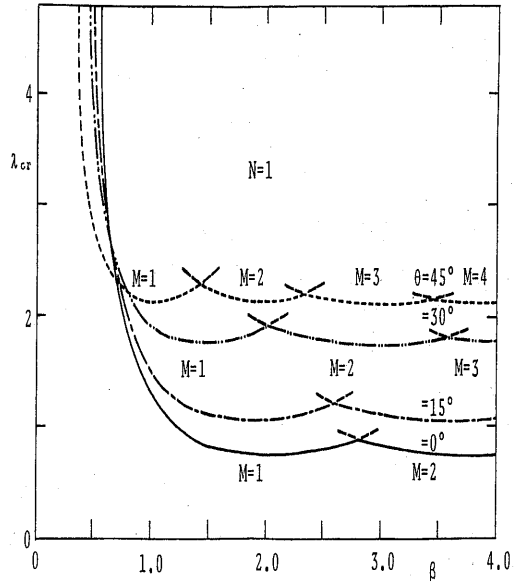


Fig. 7 Relation between buckling eigenvalue  $\lambda_{cr}$  and aspect ratio  $\beta$  for four values of fiber angle  $\theta$ : CASE I and (3)GRAPHITE/EP.

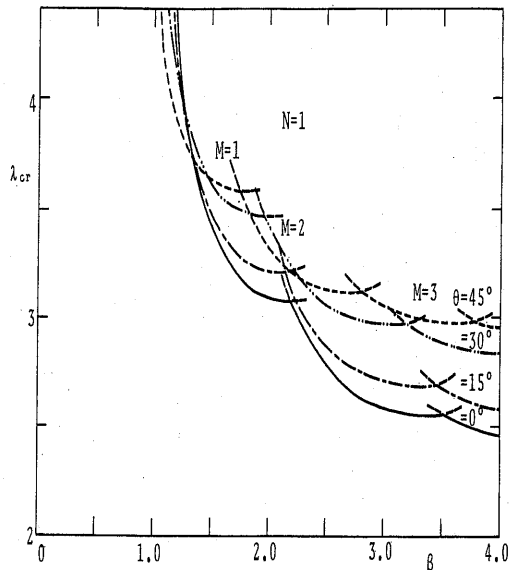


Fig. 8 Relation between buckling eigenvalue  $\lambda_{cr}$  and aspect ratio  $\beta$  for four values of fiber angle  $\theta$ : CASE III and (1)EGLASS/EP.

7. 動的不安定領域

変動面内力によって生じる動的不安定領域の種類としては, 単純共振  $2\omega_{ij}/k(k=1, 2, \dots)$  と結合共振  $(\omega_{ij} + \omega_{mn})/k(k=1, 2, \dots)$  がある。このうち  $k=1$  のものを主不安定領域,  $k \geq 2$  のものを副不安定領域と呼ぶ<sup>5)</sup>。

このような不安定領域の種類は式(8)の行列  $[G]$  の要素構成によって決まり, その発生可能振動数は行列  $[F]$  によって決まってくる。各層の繊維方向が中央面に関して対称となるよう積層した正方形板では, 行列  $[G]$  の要素構成は, 等方性板と同じである<sup>6)</sup>。すなわち, 荷重辺が単純支持である CASE I, II の場合は単純共振のみが存在して, 荷重辺が固定である CASE III, IV の場合にはそれに加えて和型の結合共振も存在する<sup>6)</sup>。

Fig. 9, 10は, それぞれ材料(1)EGLASS/EP を用いた積層正方形板の全周辺単純支持 (CASE I) の繊維角度  $\theta=0^\circ$  の場合について, 荷重辺単純支持, 他辺固定 (CASE II) の場合における繊維角度  $\theta=0^\circ$  の不安定領域を示している。

Fig.11は, 材料(1)EGLASS/EP を用いた積層正方形板の全周辺単純支持 (CASE I) の場合における繊

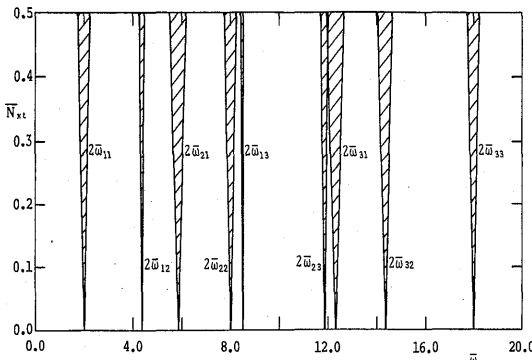


Fig. 9 Unstable regions for square plates: CASE I,  $\beta=1.0, \theta=0^\circ, \bar{N}_{x_0}=0.0$  and (1) EGLASS/EP.

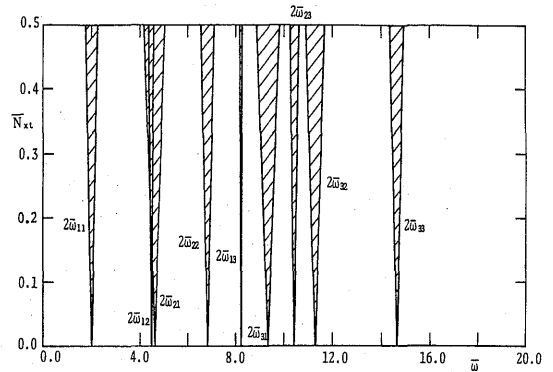


Fig.10 Unstable regions for square plates: CASE II,  $\beta=1.0, \theta=0^\circ, \bar{N}_{x_0}=0.0$  and (1) EGLASS/EP.

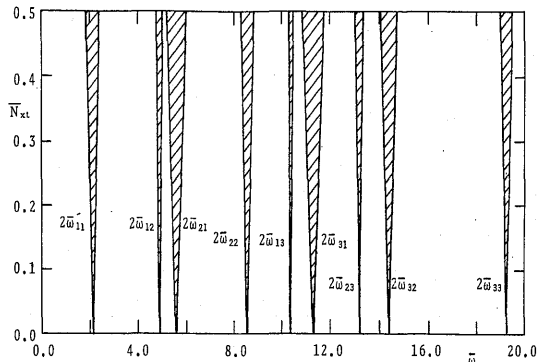


Fig.11 Unstable regions for square plates: CASE I,  $\beta=1.0, \theta=30^\circ, \bar{N}_{x_0}=0.0$  and (1) EGLASS/EP.

維角度  $\theta=30^\circ$  の不安定領域を示している。縦軸は, 変動面内力  $N_{xi}$  をそれぞれの繊維角度の座屈面内力  $N_{cr}$  で無次元化した無次元面内力の振幅  $\bar{N}_{xi}$  であり, 横軸は励振振動数を  $\theta=0^\circ$  のときの1次の固有振動数  $\omega_{i1}^0$  で無次元化した無次元励振振動数  $\bar{\omega}$  である。また振動数領域は, 1次の固有振動数の20倍まで求めた。

Table 3 に, それぞれの場合の無次元固有振動数および定数  $k_{i1}^0, \lambda_{cr}$  を示す。

Table 3 Dimensionless natural frequency  $\bar{\omega}_{mn}$  and constants  $k_{i1}^0$  and  $\lambda_{cr}$ .

| CASE I, $\theta=0^\circ$ |   |                |       | CASE II, $\theta=0^\circ$ |   |   |                | CASE I, $\theta=30^\circ$ |       |   |   |                |       |       |
|--------------------------|---|----------------|-------|---------------------------|---|---|----------------|---------------------------|-------|---|---|----------------|-------|-------|
| m                        | n | 1              | 2     | 3                         | m | n | 1              | 2                         | 3     | m | n | 1              | 2     | 3     |
| 1                        |   | 1.000          | 2.924 | 6.165                     | 1 |   | 1.000          | 2.302                     | 4.664 | 1 |   | 1.069          | 2.803 | 5.659 |
| 2                        |   | 2.192          | 4.000 | 7.179                     | 2 |   | 2.238          | 3.405                     | 5.640 | 2 |   | 2.447          | 4.274 | 7.190 |
| 3                        |   | 4.247          | 5.943 | 9.000                     | 3 |   | 4.107          | 5.209                     | 7.314 | 3 |   | 4.695          | 6.602 | 9.616 |
|                          |   | $k_{i1}^0$     |       |                           |   |   | $k_{i1}^0$     |                           |       |   |   | $k_{i1}^0$     |       |       |
|                          |   | 0.770          |       |                           |   |   | 0.705          |                           |       |   |   | 0.770          |       |       |
|                          |   | $\lambda_{cr}$ |       |                           |   |   | $\lambda_{cr}$ |                           |       |   |   | $\lambda_{cr}$ |       |       |
|                          |   | 2.368          |       |                           |   |   | 5.2            |                           |       |   |   | 2.705          |       |       |

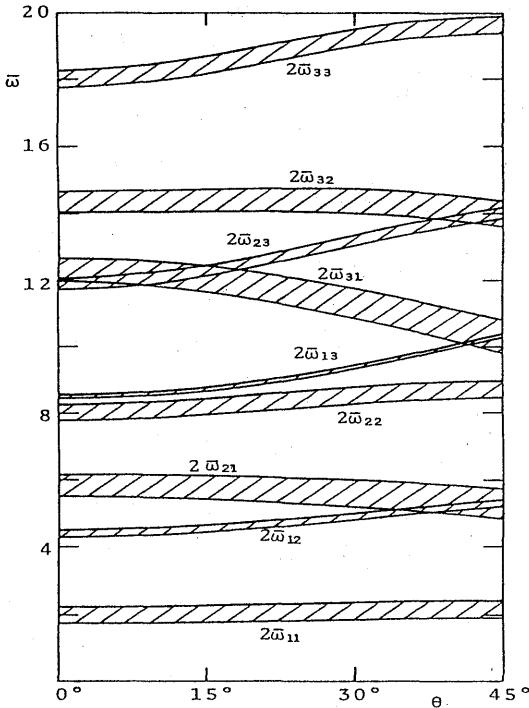


Fig.12 Variation of unstable regions with fiber angle  $\theta$ : CASE I,  $\beta=1.0$ ,  $\bar{N}_{xt}=0.5$  and (1) EGLASS/EP.

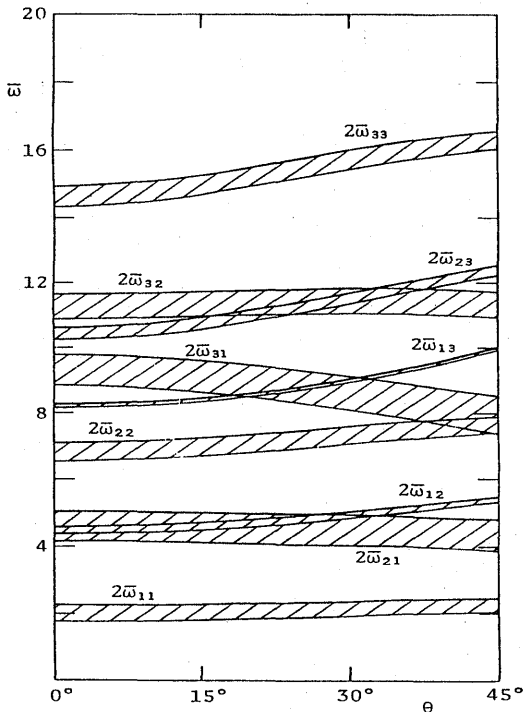


Fig.13 Variation of unstable regions with fiber angle  $\theta$ : CASE II,  $\beta=1.0$ ,  $\bar{N}_{xt}=0.5$  and (1) EGLASS/EP.

各層の繊維方向を対称積層した正方形板では、CASE I, IIともに単純共振の主不安定領域のみが存在している。また、繊維角度 $\theta$ を変化させても、不安定領域の発生振動数が移動するだけで、不安定領域の種類には影響を及ぼさない。

次にFig.12, 13は、材料(1)EGLASS/EPを用いた積層正方形板のCASE I, IIの場合において、繊維角度 $\theta$ による不安定領域の変動を表示したものである。ここで、無次元面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ は、変動面内力 $N_{xt}$ を繊維角度 $\theta=0^\circ$ のときの座屈面内力で、無次元化したものである。

両者ともに、不安定領域の変動は固有振動数特性と同様の変化を示している。すなわち、繊維角度 $\theta$ が大きくなると固有振動数が減少する $2\bar{\omega}_{21}$ ,  $2\bar{\omega}_{31}$ および $2\bar{\omega}_{32}$ の不安定領域は、その幅がわずかではあるが広がる。逆に、 $2\bar{\omega}_{12}$ ,  $2\bar{\omega}_{13}$ および $2\bar{\omega}_{23}$ のように繊維角度 $\theta$ が大きくなることにより、固有振動数が増大する場合、不安定領域の幅はわずかに狭くなる。

### 8. まとめ

本研究では、中央面に関して繊維方向が対称になるように積層した、長方形板に対し4種類の境界条件を考え、固有振動解析、座屈解析および動的安定性解析を行った。また、これらを異方性の度合いが異なった3種類の材料を対象に、繊維角度をパラメータとして力学特性を明らかにした。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 対称積層板では、等方性板と比較して固有振動数および座屈固有値は、境界条件に関係なく小さくなっている。
- (2) 対称積層板では、各層の繊維角度による固有振動数および座屈固有値の大きさは、境界条件に関係なく、異方性の度合いが大きい材料ほど、その変動が激しくなる。
- (3) 対称積層板の動的不安定領域の種類は、各境界条件において繊維角度に関係なく、等方性板と同じ種類である。
- (4) 材料の異方性、各層の繊維方向を変えることによって、動的不安定領域の発生振動数が低次の振動数領域へ移るものは幅が広がり、高次の振動数領域へ移るものは幅が狭くなる。

### Appendix A 固有振動解析

式(4)において、変動面内力 $N_{xt}=0$ とすると、積層板に静的面内力 $N_{x0}$ のみが作用する場合の運動方程式



は次のように得られる。

$$L(w) = D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A-1})$$

式(A-1)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{s=1} \sum_{t=1} A_{st} \bar{W}_{st}(x, y) e^{i\omega t} \quad (\text{A-2})$$

ここに,  $\omega$ : 固有円振動数,  $A_{st}$ : 未定数,  $\bar{W}_{st}$ : 境界条件を満足する座標関数

式(A-2)の $\bar{W}_{st}$ としては次のような関数を用いる。

$$\bar{W}_{st} = \bar{h}_s(\xi) \bar{h}_t(\eta) \quad (\text{A-3})$$

ここに,

$$\begin{aligned} \bar{h}_s &= \sin s \pi \xi \quad (\text{CASE I, II}), \\ \bar{h}_s &= \cos(s-1)\pi \xi - \cos(s+1)\pi \xi \quad (\text{CASE III, IV}), \\ \bar{h}_t &= \sin t \pi \eta \quad (\text{CASE I, III}), \\ \bar{h}_t &= \cos(t-1)\pi \eta - \cos(t+1)\pi \eta \quad (\text{CASE II, IV}) \\ \xi &= x/a, \eta = y/b \end{aligned}$$

式(A-1)に式(A-2), (A-3)を代入すると, 次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{s=1} \sum_{t=1} A_{st} \left\{ \frac{D_1^*}{\beta^4} h_s'''' \bar{h}_t + \frac{2D_3^*}{\beta^2} h_s'' h_t'' + D_2^* h_s \bar{h}_t'''' - \lambda_v^4 h_s \bar{h}_t - \frac{\bar{N}_{x0}}{\beta^2} h_s'' \bar{h}_t \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } D_1^* &= D_1/D_1^0, \quad D_2^* = D_2/D_1^0, \\ D_3^* &= D_3/D_1^0, \quad \lambda_v = \sqrt[4]{\rho h b^4 \omega^2 / \pi^4 D_1^0}, \\ \bar{N}_{x0} &= N_{x0} b^2 / \pi^2 D_1^0, \quad D_1^0: \theta = 0^\circ \text{の板剛度} \end{aligned}$$

式(A-4)に Galerkin 法を適用する。

$$\int_0^1 \int_0^1 L(w) h_p \bar{h}_q d\xi d\eta = 0 \quad (\text{A-5})$$

ここに,  $p=1, 2, \dots, L, q=1, 2, \dots, L$

式(A-5)の積分を実行すると, 次式が得られる。

$$\sum_{s=1} \sum_{t=1} A_{st} [E_{sptq} - \lambda_v^4 F_{sptq} - \bar{N}_{x0} G_{sptq}] = 0 \quad (\text{A-6})$$

ここに,

$$E_{sptq} = \frac{D_1^*}{\beta^4} I_{sp}^3 I_{tq}^3 + \frac{2D_3^*}{\beta^2} I_{sp}^2 I_{tq}^2 + D_2^* I_{sp} I_{tq},$$

$$F_{sptq} = I_{sp}^4 I_{tq}^4, \quad G_{sptq} = I_{sp}^2 I_{tq}^2 / \beta^2,$$

$$I_{sp} = \int_0^1 h_s h_p d\xi, \quad I_{tq} = \int_0^1 \bar{h}_t \bar{h}_q d\eta,$$

$$I_{sp}^2 = \int_0^1 h_s'' h_p d\xi, \quad I_{tq}^2 = \int_0^1 \bar{h}_t'' \bar{h}_q d\eta,$$

$$I_{sp}^3 = \int_0^1 h_s''' h_p d\xi, \quad I_{tq}^3 = \int_0^1 \bar{h}_t''' \bar{h}_q d\eta$$

式(A-6)を行列表示すると, 次のようになる。

$$([E] - \lambda_v^4 [F] - \bar{N}_{x0} [G]) \{X\} = \{0\} \quad (\text{A-7})$$

ここに,  $[E]: E\{q+(p-1)L, s+(t-1)L\}$ ,

$[F]: F\{q+(p-1)L, s+(t-1)L\}$ ,

$[G]: G\{q+(p-1)L, s+(t-1)L\}$ ,

$\{X\}: \{A_{11} A_{12} \dots A_{1L} A_{21} A_{22} \dots A_{LL}\}^T$

式(A-7)において,  $\bar{N}_{x0} = 0$  とおくと自由振動の固有値  $\lambda_v$  が求まり,  $\lambda_v = 0$  とおくと座屈の固有値  $\lambda_b = \bar{N}_{x0}$  を求めることができる。数値解析では式(A-7)を固有値問題に変換することで, それぞれ  $\lambda_v, \lambda_b$  を計算することができる。

#### 参考文献

- 1) 福田: 異方性の積層利用 (I), 日本複合材料学会誌, 14-1, pp.20~25, 1988.
- 2) 一ノ宮・成田・丸山: FRP 積層長方形板の定常応答, 日本機学会論文集 (C編), 55-511, pp.549~555, 1989. 3.
- 3) Leissa, A. W.: Advances in Vibration, Buckling and Postbuckling Studies on Composite Plates, Proc. 1st Int. Conf. on Composite Struct., pp.312~334, 1981.
- 4) 福田・野村・武田: 複合材料の構造力学, 日刊工業新聞社, pp.23~105, 1987.
- 5) 夏秋・高橋・小西: 構造物の動的安定性—そのアプローチ手法と橋梁構成への応用—, 片山技報, Vol.8, pp.1~6, 1988.
- 6) 八巻・永井: 周期的な圧縮荷重をうける長方形板の動的安定, 東北大学高速力学研究所報告, 第36巻, 第351号, pp.147~168, 1975.