Title	Hamilton & Slutsky (1990) 定理７の構造
Author(s)	村田, 省三; 橋口, 真理子
Citation	長崎大学経済学部研究年報, 26, pp.49-54; 2010
Issue Date	2010-06-30
URL	http://hdl.handle.net/10069/24468
Right	

Hamilton & Slutsky (1990) 定理７の構造

村　田　省　三
橋　口　真 理 子*

Abstract

In this paper, we consider two commitment games in Hamilton&Slutsky(1990). The condition for the existence of the mixed strategy equilibria is shown by theorem 5 for the extended game with observable delay. In this case, the refinement by subgame perfectness concept for the equilibria being valid fully over all of 5 subgames, the strategy pair not locates on the intersection of two best reply curves leads to a contradiction. This eases the difficulties of the analysis to verify the mixed strategy equilibria.

In the case of the extended game of action commitment, if both players choose wait strategy, the best reply induced in the following stage inevitably leads to select the intersection of two best reply curves. On the contrary to this, comittment strategy by both does not always come to the intersection.

The proof that an action commitment game does not have a mixed strategy equilibria remains unproved so far. In this paper, one solution to this existence problem is suggested by Theorem1. In every duoply game satisfying some regular conditions as in Pastine&Pastine(2004), there is no nondegenerate mixed strategy equilibria carried by commitments which is located in Pareto superior set.

Key words: commitment game, mixed strategy, Pareto dominance, quantity setting game

1　はじめに

コミットメントをともなう複占ゲームのうち，手番コミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay）については*1，Hamilton&Slutsky(1990)（以下，HS(1990)）定理５により，混合戦略均衡が存在するための条件が示されている。これにたいして，戦略コミットメントゲーム（The Extended Game of Action Commitment）の場合には，混合戦略均衡の存在に関する直接的な証明は与えられていない。手番コミットメントゲームの均衡はサブゲーム完全による精選が全域的に有効となることから，同時手番の結果として実現されるゲーム均衡に，最適反応曲線以外の点が選択されることを許さない。このことが，ゲームの標準形表示における利得を確定させて，支配戦略の存否ないしは混合戦略均衡の可能性を示唆するための分析を容易にしている。

これにたいして，戦略コミットメントゲームでは，戦略として選択されるのは手番ではなく，具体的な数量（価格）コミットメント

＊ 九州大学大学院博士後期課程

*1　Gal-Or (1985) の先駆的研究もあるが，同時手番均衡との対比はおこなわれていない。

とWait戦略の両方を含む。共にWait戦略を選択なら，後続期best replyを誘発することにより，合理的な均衡であるかぎり，最適反応曲線交点以外の点が選択されることを許さない。ところが，ともに数量（ないしは価格）コミットメントをおこなう場合，それが最適反応曲線交点を実現するとは限らない。このことについて，同時手番均衡点以外が結果的に選択されるのは，何らかの錯誤による以外にないとHS (1990）はいう。混合戦略均衡を構成する個別戦略の組み合わせが，サブゲーム完全とは別の論拠によって，ことごとく最適反応曲線上でなければならないという見方である。一方，Pastine&Pastine (2004)（以下，PP(2004)）は，Dowrick (1985）の主張するStackelberg Walfareが発生するという想定に基づき，ともに数量（価格）コミットメントをおこなう場合，コミットメント値はそのまま実現されるとみる。この場合，双方のコミットメントが最適反応曲線交点上にないかもしれない。

このとき，混合戦略均衡が存在するかどうかという問題に対して，PP (2004)）は，HS (1990）定理７の対象となるモデルを価格戦略ゲームに限定したうえで，このような想定のもとでもなお，混合戦略均衡が存在しないことを証明した。本稿では，この命題に対応するゲームについて,条件を緩めた上で,簡明な別証明を示す（本稿定理１）。さらに,最適反応曲線がともに右上がりで，その方向にパレート優位集合が出現する価格戦略ゲーム以外のケースについても，パレート優位集合内に対応するコミットメント値をとるような混合戦略均衡は存在しないことを示す。

2　コミットメントゲーム

2.1　モデルと仮定

プレイヤーA, Bの利潤関数, $\pi_A(P_A, P_B)$, $\pi_B(P_A, P_B)$ は，R^2_+で定義され，２回連続的微分可能とする。P^C_A，P^C_Bは各プレイヤーの戦略コミットメント値，P^S_A, P^S_Bを同時手番均衡（第１期）に対応する戦略コミットメント値，P^L_A, P^L_Bは，各々，$\pi_A(P_A, R_B(P_A))$, $\pi_B(R_A(P_B)$, $P_B)$ を最大にする戦略コミットメント値，対応の後手戦略値をP^F_A，P^F_Bとする。$R_A(*)$, $R_B(*)$は各プレイヤーの最適反応関数，q_A, $q_B(\in(0,\ 1))$はコミットメント確率である。ここで，The Extended Game with Observable Delayの場合は，以上の戦略コミットメント値を，実際に選択される数値とみなす。なお，ゲーム定義域$X(\subset R^2_+)$において，以下の成立を仮定する。

(1) $\dfrac{\partial^2\pi_A}{\partial P_A^2}<0$, $\dfrac{\partial^2\pi_B}{\partial P_B^2}<0$

(2) $\dfrac{\partial\pi_A}{\partial P_B}$, $\dfrac{\partial\pi_B}{\partial P_A}$の符号一定*2

(3) $\dfrac{\partial\pi_A}{\partial P_A}=0$, $\dfrac{\partial\pi_B}{\partial P_B}=0$のグラフの傾き符号一定

(4) 基本ゲームの同時手番均衡（第１期）と２つのシュタッケルベルグ均衡は純戦略でR^2_+に一意存在，かつ相互に異なる

(5) $\pi_A(P_A, R_B(P_A))$ はP_Aについて，$\pi_B(R_A(P_B), P_B)$ はP_Bについて，２次微分値負

*2 仮定(1)は，Amir(1995）の示唆による。自己最適反応曲線上で，利潤関数単調性が保障される（村田(2008)）。このAmir条件は，例えば，$\pi_A(P_A, P_B)=\pi_{Amin}$で区分される４領域のうち，連続する２領域について仮定すれば十分。π_{Amin}はAの最適反応曲線上でのAの最低利潤（存在を仮定する）。

戦略コミットメントゲーム－*The Extended Game of Action Commitment*－

仮定(1)～(4)を満たす複占ゲームにおいて，各プレイヤーは戦略値コミットメントかWaitを同時に選択する。コミットメントは相手戦略値を観察せずにおこなわれるが，一方がコミットメント，他方がWaitなら，相手戦略値観察後に戦略値を決めることができる。両プレイヤーがWaitならば，第２期に基本ゲームの同時手番戦略値(P_A^S, P_B^S)が実現される。実質的に２期間ゲーム，均衡概念はサブゲーム完全均衡である。

手番コミットメントゲーム－*The Extended Game with Observable Delay*－

戦略コミットメントゲームと同様,仮定(1)～(5)を満たす複占ゲームにおいて，各プレイヤーは基本ゲームにおける戦略を決定する前段階で，手番順序（先手か後手）を同時に選択する。手番の最終選択後は変更できない。先手による戦略決定は相手戦略を観察せずにおこなわれる。ただし，相手が先手なら，後手により，相手戦略観察後に戦略を決めることができる。実質的に２期間ゲーム，均衡概念はサブゲーム完全均衡である。

2.2 戦略コミットメントゲームの均衡

(PP2004)の命題は，最適反応曲線が共に右上がりで，同時手番均衡点からみて右上方向にパレート優位集合がある場合，真正な混合戦略均衡がないことを示したが,ここでは,その内容を含む一般定理を与える。

定理１　コミットメント価格（数量）は一意とする[*3]。The Extended Game with Action Commitmentにおいて，

***A*1.** 最適反応曲線がともに右上がりで，右上方向にパレート優位集合が出現するコミットメントゲームの場合，最適コミットメント戦略値は真正な(nondegenerate)混合戦略均衡(サブゲーム完全)を構成しない。

***A*2.** 最適反応曲線がともに右下がりで，原点方向にパレート優位集合が出現するコミットメントゲームの場合，両者の最適コミットメント戦略値がパレート優位集合にあるような真正な混合戦略均衡はない。

***B*.** 最適反応曲線R_Aが右下がり，R_Bが右上がりで，R_Aのみがパレート優位集合を通過するようなコミットメントゲームの場合，異符号領域とun-dominanted領域が重ならない部分に両者の最適コミットメント戦略値があるような真正な混合戦略均衡はない。

証明.　コミットメント確率q_A, $q_B \in (0,\ 1)$にたいする最適コミットメント戦略（戦略値）をP_A^C，P_B^Cする。最適P_A^Cにおいて，(1)の第１項，第２項の導関数値が共に０になることは，R_A曲線上以外ではありえないから，そこではこれら導関数符号が逆になる。Bについても同様。この異符号性から，最適コミットメント戦略値P_A^C，P_B^Cは，R_A, R_B曲線と２本の直線$P_A = P_A^L$, $P_B = P_B^L$で囲まれる領域（異符号領域）になる。なお，R_A曲線上で(1)の微分値が０になるとすれば，P_A^Lに対応するR_A上の点のみである。同様に，R_B曲線上では，P_B^Lに対応するR_B上の点のみである。ところが，この２点は同一点ではありえない。

*3 PP(2004) では，価格コミットメントゲームにおける利潤関数の，自己戦略変数に関する，狭義準凹性を仮定することが，結果的に，一意のコミットメント価格をもたらすとみている。

$$q_B \pi_A(P_A^C,\ P_B^C) + (1-q_B)\pi_A(P_A^C, R_B(P_A^C)) \qquad (1)$$

(P_A^S, P_B^S)を原点とする直交座標系を考えるとき，第２，３，４象限はA，Bいずれかによる Wait により支配されるコミットメント戦略値になる。以下，それ以外の点を想定する。

$(A1)$の証明

(1) $P_A^F < P_A^L, P_B^F < P_B^L$ の場合[*4]

混合戦略均衡におけるコミットメント戦略値は$P_A^{C*} \in (P_A^S, P_A^L)$，$P_B^{C*} \in (P_B^S, P_B^L)$であり，$R_A(P_B^S) < R_A(P_B^{C*}) < R_A(P_B^L)$，ゆえに，$P_A^S < R_A(P_B^{C*}) < P_A^F < P_A^L$。ところが，$\pi_A(P, R_B(P))$は$P$に関して狭義準凹（区間$(P_A^S, P_A^L)$で単調）であり，A は$P_A^{C*}$から$R_A(P_B^{C*})$へ逸脱する。したがって混合戦略均衡はない。

(2) $P_A^F > P_A^L$ または $P_B^F > P_B^L$ の場合

このとき，$R_B(P_A^{C*}) < P_B^L, R_A(P_B^{C*}) < P_A^L$ の同時不成立はありえない。いま，$R_B(P_A^{C*}) < P_B^L$とする。このとき，最適反応曲線の単調性より，$R_B(P_A^S) < R_B(P_A^{C*})$が得られ，$P_B^S < R_B(P_A^{C*}) < P_B^L$。ところが，$\pi B(RA(P),\ P)$は$P$に関して狭義準凹(区間$(P_B^S, P_B^L)$で単調)であり，$B$は$P_B^{C*}$から$R_B(P_A^{C*})$へ逸脱する。したがって混合戦略均衡はない。

$(A2)$ の証明

異符号領域は undominated 領域と一致する。

(B)異符号領域のうち，最適反応曲線の交点より右側にあるプレイヤー A に対する戦略値は Wait によって支配される。■

定理１(A1)は，PP(2004)で仮定されている大小関係，$P_A^F < P_A^L$を必ずしも必要としない点で異なる。

*4 (1)の証明は PP(2004)に対応する。

2.3 手番コミットメントゲームの均衡

基本ゲームにおける各プレイヤーの最適反応曲線とパレート優位集合との位置関係によって，ゲーム均衡を推論できることを示したのが次の手番コミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay）についての定理２である。

定理２ 手番コミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay）において，

(***A***) 最適反応曲線（連続）の傾きの符号が同一であれば，

(1) どちらの最適反応曲線も（同時手番均衡にたいする）パレート優位集合に入るときには，混合戦略均衡をふくむ多数のゲーム均衡がある。

(2) どちらの最適反応曲線も（同時手番均衡にたいする）パレート優位集合との交点をもたないときには，同時手番均衡のみゲーム均衡になる。

(***B***) 最適反応曲線（連続）の傾きの符号が逆であれば，一方の最適反応曲線のみが(同時手番均衡にたいする)パレート優位集合を通過するときには，その通過するプレイヤーが後手となるシュタッケルベルグ均衡のみとなる。

証明. HS(1990)定理５による。■

3　手番コミット VS 戦略コミット

プレイヤー A，B による２つのコミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay および The Extended Game of Action Commitment）について，従来の分析結果と本稿分析結果を以下に要約する。

A1. 最適反応曲線がともに右上がりで，右上方向にパレート優位集合が出現する基本ゲームの場合，

The Extended Game with Observable Delay では，２つのシュタッケルベルグ均衡とひとつの混合戦略均衡がある（HS(1990)Th5）。

The Extended Game of Action Commitment では，多数の均衡がある（HS(1990)Th7）。真正な混合戦略均衡はない(PP(2004)，本稿(2009))。支配されない戦略（戦略値）範囲では２つのシュタッケルベルグ均衡がある（HS(1990)Th8，本稿(2009))。

A2. 最適反応曲線がともに右下がりで，原点方向にパレート優位集合が出現する数量戦略ゲームの場合，

The Extended Game with Observable Delay では，同時手番均衡のみになる（HS(1990)Th5）。

The Extended Game of Action Commitment では，多数の均衡がある（HS(1990)Th7）。パレート優位集合に両者の最適コミットメントがあるような混合戦略均衡はない(本稿(2009))。支配されない戦略（戦略値）範囲では２つのシュタッケルベルグ均衡がある（HS(1990)Th8，本稿(2009))。

B. 最適反応曲線 R_A が右下がり，R_B が右上がりで，R_A のみがパレート優位集合を通過する場合，

The Extended Game with Observable Delay では，通過するプレイヤー（A）が後手となるシュタッケルベルグ均衡のみがある（HS(1990)Th5）。

The Extended Game of Action Commitment では，多数の均衡がある（HS(1990)Th7）。異符号領域と undominanted 領域（補題１）が重ならない部分に両者の最適コミットメントがあるような真正な混合戦略均衡はない(本稿(2009))。支配されない戦略（戦略値）範囲では２つのシュタッケルベルグ均衡がある（HS(1990)Th8，本稿(2009))。

（A1)，(A2)のケースで２つのコミットメントゲームの違いが顕著である。The Extended Game of Action Commitment でシュタッケルベルグ点が，必ずゲーム均衡になる一方，The Extended Game with Observable Delay ではそうならないことがある。

前者では，シュタッケルベルグ均衡戦略が常に均衡であり，さらに，本稿仮定下では，その Stackelberg 均衡を delete することはできない。これにたいして，後者では，均衡がサブゲーム完全であることの制約から，たとえ基本ゲームのシュタッケルベルグ均衡であってもゲーム均衡から排除されることがある。

4　おわりに

The Extended Game with Observable Delay の場合，パレート優位集合のなかに含まれるシュタッケルベルグ点のみがゲーム均衡点になる。通常の価格戦略ゲームでは，２つのシュタッケルベルグ点は，どちらも均衡点になり，通常の数量戦略ゲームでは，２つのシュタッケルベルグ点は，どちらも均衡点にならない。一方，The Extended Game of Action Commitment の場合，パレート優位集合のなかにシュタッケルベルグ点が含まれるかどうかにかかわらず，シュタッケルベルグ点は均衡点になる。シュタッケルベルグ点を越える deletion は不可能であり，これを真に dominate するコミットメントが存在しないことによる。したがって，手番順序のみをコミットするゲームのほうが，具体的な戦

略値をコミットするゲームよりも一方の先手番確定をもたらしやすいといってよい。

この確定性は，混合戦略均衡の存在にも影響する。The Extended Game with Observable Delay の場合，２つのシュタッケルベルグ点が均衡になれば，必ず混合戦略均衡はある。一方，The Extended Game of Action Commitment の場合，そうならない。共に右上がりの最適反応曲線をもち，その方向にパレート優位集合があれば，undominated 領域内の異符号領域は，undominated 領域より実質的に限定される。また，右下がりと右上がりの最適反応曲線ならば，この領域は，undominated 領域の右あるいは左半分に限定される。この限定は，真正混合戦略均衡の不存在をいうのに十分である。

ただ，共に右下がりの最適反応曲線をもち，原点方向にパレート優位集合があるとき，この領域は，undominated 領域と同一になるから，真正混合戦略均衡の不存在証明は工夫を要するのである。

参 考 文 献

[1] Amir, .R. (1995). " Endogenous Timing Two-Player Games: A Counter Example " *Games and Economic Behavior*. **9**. 234－237.

[2] Dowrick, S. (1986). " von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles, " *Rand Journal of Economics*. **17**. 251-260.

[3] Gal-Or, E. (1985). " First Mover and Second Mover Advantages, " *International Economic Review*. **26**. 649-652.

[4] Hamilton, J., andS, Slutsky. (1990). " Endogenious Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria, "*Games and Economic Behavior*. **2**. 29-46.

[5] 村田省三(2008).「外部経済と複占ゲームの均衡」『応用経済学研究』，第２巻. 30-43.

[6] Pastine, I., and E, Pastine. (2004). " Cost of Delay and Endogeneous Price Leadership, " *International Journal of Industorial Organization*. **22**. 135-145.