Title	貧困度の計測：社会的厚生関数による接近
Author(s)	吉田, 建夫
Citation	経済学部研究年報, 7, pp.41-49; 1991
Issue Date	1991-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/26141
Right	

貧困度の計測：社会的厚生関数による接近*

吉　田　建　夫

1．問題

不平等比較の背後には所得分配に関する規範的評価がひそんでいることを重視し，厚生経済学的な観点から所得不平等度の計量的測定に関する理論を基礎付けようとする接近方法に「社会的厚生関数による接近（Social Welfare Approach)」がある。この接近手法によって導出された所得不平等尺度はDalton-Atkinson タイプの所得不平等尺度としてよく知られている。Dalton-Atkinson タイプの不平等度尺度の導出にあたってはまず最初に価値判断を明示する関数として平等主義的な社会的厚生関数が仮定される。平等主義的な社会的厚生関数のもとでは，与えられた総所得が人々の間に完全に平等に分配されているときに社会的厚生は最大化される。この意味での理想状態における社会的厚生水準を基準にとって，現実の所得分配において実現されている社会的厚生水準が理想状態をどの程度下回っているかということで，所得不平等を測定しようとするのが Dalton-Atkinson タイプの所得不平等度尺度である。

このような Dalton-Atkinson タイプの不平等度尺度を貧困度計測に応用することを試みた興味深い論文に Vaughan(1987) がある。[1] Vaughan の提唱に係わる貧困度尺度は，測定の基準となる理想状態を完全平等分配から貧困解消後の所得分配に置き換えることによって Dalton-Atkinson タイプの不平等度尺度を貧困度計測に転用しようとするものである。貧困の判定基準は貧困線と呼ばれるある所得水準によって先験的に与えられており，現実の所得分配において貧困者と判定された人達の所得が全員貧困線にまで引き上げられたときに貧困は解消したとされる。貧困を解消するためには非貧困者から貧困者への所得再分配を行うか，さもなければ社会の総所得を増加させなければならない。貧困度測定の基準とされる貧困解消後の所得分配がその何れにより達成されたと考えるかによって，貧困度の「総」尺度（gross measure)と「純」尺度（net measure)と名付けられる二つの異なるタイプの尺度が定義されている。「純」尺度は，非貧困者階層からの所得再分配によって貧困の解消が達成されたとすれば実現されるであろう社会的厚生水準を基準にとって定義されている。他方「総」尺度は，総所得の増加を通じて貧困の解消が達成されたとすれば実現されるであろう社会的厚生水準を基準にとって定義されている。

ところで貧困度の「純」尺度には解決され

---

*）本稿の研究は長崎大学東南アジア研究交流奨励金（研究促進奨励費）の助成を得て行われた。

注1）貧困度尺度の研究は Sen(1976) の先駆的研究にはじまり，Atkinson(1978)，Blackorby and Donaldson(1980)，Chakravarty(1983)，Kakwni (1981)，Pyatt(1987)，Takayama(1979)，Thon (1979，1983) 他多数の貢献がある。本稿で考察の対象とした Vaughan の貧困度尺度が Sen の尺度をはじめ他の様々な貧困度尺度とどのような関係にあるかについては機会を改めて考察したい。

るべき問題がひとつ残されている。それは貧困解消のための財源として課税される所得税計画が確定されていないことである。どのような課税計画を立てるかに応じて貧困解消後に実現される社会的厚生水準が影響を受け，それに従って貧困度尺度の値も変化する。同一の税収額をもたらす無数の課税計画のなかでどの計画を貧困度計測の基準として用いるのが適切であるかを明確にしておくことは，「純」貧困度尺度が単にアイデアにとどまることなく，実際に実証分析への応用が可能となるために必要なことである。

本稿の目的は，貧困解消のために課税されるあり得べき租税ベクトルの集りのなかで，社会的厚生水準の最大値と最小値をもたらすそれぞれの租税ベクトルを明らかにすることである。このことによって貧困度の「純」尺度が取り得る値の範囲が確定される。不平等度尺度の定義において基準とされる完全平等分配は，与えられた総所得のもとで（あらゆる所得再分配のあり方が許されているときに）最大の社会的厚生を実現する所得分配である。貧困度尺度が不平等度尺度と異なる点は，許され得る所得再分配が貧困の解消という限定された目的を達成する範囲に限られていることである。貧困度尺度においては，この限定された所得再分配の範囲で達成され得る最大の社会的厚生水準を理想状態として基準とすると考えるのが自然であろう。このような考え方に立ったとき，本稿で得られる結論を用いることにより貧困度尺度を確定することができる。

2．社会的厚生関数と所得不平等度尺度

Vaughan の貧困度尺度を説明するための準備として Dalton-Atkinson タイプの所得不平等度尺度がどのように定義されているかについて簡単に振り返っておくことから始めよう。

冒頭でも述べたように，Dalton-Atkinson タイプの所得不平等度尺度における基本的な考え方の特徴は不平等比較の背後に所得分配の規範的評価がひそんでいることを重視する点にある。このような考え方に基づいて価値判断を明示する関数として平等主義的な社会的厚生関数が議論に先立って仮定される。いま社会の総所得を一定とすれば，平等主義的な社会的厚生関数のもとでは所得が完全に平等に分配されている時に社会的厚生は最大化される。この意味での理想状態における社会的厚生水準を基準にとって，現実の所得分配において実現されている社会的厚生水準が理想状態をどの程度下回っているかということで所得不平等を測定しようとするのがDalton-Atkinson タイプの所得不平等度尺度である。

このタイプの所得不平等度尺度は形式的には次のように定義される。

いま n 人から構成される経済社会を想定し，所得分配をベクトル $y=(y_1,\ y_2, \cdots y_n) \in R^n_+$ で表すとしよう。この経済社会の平均所得を $\mu(=\sum_{i=1}^{n} y_i/n)$ で表すとする。社会的厚生関数，$W: R^n_+ \rightarrow R$，が平等主義的であるとは，もっとも一般的には W が S 凹関数であるという意味であるが，本稿の議論では Dalton や Atkinson と同様に加法的に分離可能でかつ対称的な社会的厚生関数

$$(1)\quad W(y)=\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$$

を仮定しておこう。ここで加法的に用いられる共通の関数 $u: R_+ \rightarrow R$ は任意の凹かつ増加関数であるとされる。

さて，所得不平等の測定において社会的厚生関数による接近を最初に提唱したのは Dalton (1920) であった。彼の提唱に係わる所得不平等度尺度を D という記号を用いて表すと，D は

(2) $D = \frac{W(\mu \cdot e^n) - W(y)}{W(\mu \cdot e^n)}$

と定義される。ここで $e^n = (1, 1, \cdots, 1)$ は n 次元の単位ベクトルであるとする。D の分子は，もし仮に人々の所得が完全に平等に分配されていたとすれば実現されるであろう理想状態における社会的厚生水準，$W(\mu \cdot e^n)$，と現実の所得分配が実現する社会的厚生水準，$W(y)$，の間にあるギャップを示している。Dalton の不平等度尺度 D はこのギャップが理想状態における社会的厚生水準のどれだけの比率になっているかを測定するものである。

Dalton の不平等度尺度における最大の難点は W が ── 比をとることに意味があるとするもっとも強い意味において ── 基数でなければならないということである。[2] この難点を回避するための工夫として Atkinson(1970) は「等価平等分配所得 (equally distributed equivalent income)」という概念を導入することによって Dalton 尺度を近代的に再構成することを試みた。「等価平等分配所得」とは現実の所得分配のもとで実現されているのと同水準の社会的厚生を実現するのに必要とされる（一人あたり）最小所得のことである。この所得水準を y_{ede} という記号を用いて表すと，y_{ede}は

$$y_{ede} = \min_{x \in \Omega(y)} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right]$$

と定義される。ここで $\Omega(y) = \{x \in R_+^n : W(x) \geqq W(y)\}$ である。とくに(1)式のような W のもとでは W と y_{ede} の間には

$$y_{ede} = u^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} u(y_i) \frac{1}{n} \right]$$

という関係が成立している。Atkinson の提唱に係わる所得不平等度尺度 ── 以下ではこれを A という記号で表す ── は y_{ede}を用いて

(3) $A = \frac{\mu - y_{ede}}{\mu}$

と定義される。

ところで y_{ede} は最初に仮定された W と同一の選好順序を表現しており，y_{ede}を貨幣で測定された社会的厚生であると解釈することができる。そうすると，μ は総所得を一定に保ちながら所得分配を完全に平等化するという意味での理想状態が達成されたときの社会的厚生水準を意味しており，y_{ede} は現実の所得分配が実現している社会的厚生水準を意味している。Atkinson 尺度は所得分配に関する社会的選好順序を y_{ede} の意味における貨幣計量で測定するとする約束を導入することによって装いを新たにした Dalton 尺度であると解釈することができよう。

3．Vaughan の貧困度尺度

以上で概観されたように，Dalton-Atkinson タイプの経済厚生尺度は，理想状態において実現されるであろう社会的厚生水準を基準として，現実の所得分配における社会的厚生水準がこの基準をどの程度下回っているかを測定しようとする尺度であった。Vaughan の提唱に係わる貧困度尺度は，理想状態を完全平等分配から貧困が解消された分配状態に置き換えることによって，Dalton-Atkinson タイプの経済厚生尺度を貧困度の計測に応用しようとするものである。

いま所得のある水準 z が貧困線として定められており，所得稼得額が z 未満であるような構成員は貧困者であると認定されるとしよう。ただし z と y の間には

注 2）このことは同時に，D においては W が正の値をとる，即ち(1)の W において

$$u : R_+ \to R_+$$

と仮定されていなければならないことを意味する。

(4) $z \leqq \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

が成立しているとする。本節以降の議論では構成員の番号は所得の昇順に付けられており，第1構成員から第q構成員までが貧困者であるとする，即ち，

(5) $y_1 \leqq \cdots\cdots \leqq y_q < z \leqq y_{q+1} \leqq \cdots\cdots \leqq y_n$

が成立しているとしよう。貧困線zによって社会の構成員は貧困者と非貧困者のふたつの階層に分割され，社会全体の所得分配は$y=(y^p;y^r)$で表される。但し，ここで $y^p=(y_1,\cdots\cdots, y_q)$，$y^r=(y_{q+1}, \cdots\cdots, y_n)$はそれぞれ貧困者階層と非貧困者階層の所得分配を表している。

貧困度尺度の定義にあたって基準となる所得分配は，現実の所得分配における貧困者の所得がすべてzにまで引き上げられ，貧困が解消された状態である。その際貧困を解消するための資金が同一社会における非貧困者階層からの所得再分配によって調達されることを考慮に入れるか否かに応じて，「総」尺度（gross measure）と「純」尺度（net measure）という二つのタイプの貧困度尺度が定義されている。

貧困度の「総」尺度

さて，いま仮に貧困者の所得が全員zにまで引き上げられたとしよう。この場合の所得分配をy^*で表せば，y^*は

$$y^*=(z \cdot e^q; y^r)$$

で定義される。Vaughan による相対的貧困度の「総」厚生尺度は y^* を基準として定義される。言うまでもなく，yからの所得再分配によって y^* が達成されることは不可能である。貧困を解消させるための財源の調達に関わる問題が考慮されていないという意味で，y^*を基準として定義される尺度は「総」尺度と呼ばれるのである。Dalton の不平等度尺度において完全平等分配を y^* で置き換えることにより定義される貧困度の「総」尺度をVG_Dという記号を用いて表すとしよう。VG_Dは

(6) $VG_D = \frac{W(y^*) - W(y)}{W(y^*)}$

と定義される。「等価平等分配所得」の概念を用いて表現される貧困度の「総」尺度をVG_Aという記号を用いて表すと，VG_Aは

(7) $VG_A = \frac{y^*_{ede} - y_{ede}}{y^*_{ede}}$

となる。なおここでy^*_{ede}は$W(y^*)$に対応して定義される「等価平等分配所得」であり，y_{ede} は $W(y)$に対応して定義される「等価平等分配所得」を表すものとする。

貧困度の「純」尺度

次に貧困を解消するための財源が同一社会内部における所得再分配を通じて調達される場合を考えよう。貧困者階層の所得をzにまで引き上げ，貧困を解消するために必要な総額を記号 B で表すと，

$$B = \sum_{i=1}^{q} (z - y_i)$$

である。B は非貧困者階層の所得に対する課税によって調達されなければならない。非貧困者階層に対する租税ベクトルを $t^r=(t_{q+1},\cdots, t_n)$ で表すとする。課税は貧困救済のために行うのであるから，t^r は次のような条件を満たしていることが必要である。第一には税収総額が B に一致していなければならないことであり，第二には課税によって可処分所得が貧困線を下回るようなことがあってはならないことである。このような条件を満たしている t^r の集合を T という記号を用いて表すとしよう，即ち

$$T=\{t^r \in R^{n-q}: \sum_{i=q+1}^{n} t_i=B,\ z \leqq y_i-t_i \leqq y_i \quad (i=q+1,\ \cdots\cdots,\ n)\}$$

であるとする。

以上の準備のもとで，Dalton タイプの貧困度の「純」尺度をVN_Dという記号で表すと，VN_D は

$$(8)\quad VN_D=\frac{W(z\cdot e^q;y^r-t^r)-W(y)}{W(z\cdot e^q;y^r-t^r)},\quad (t^r \in T)$$

と定義される。

VN_Dにおける W 関数を「等価平等分配所得」に置き換えることにより，Atkinson タイプの「純」尺度が定義される。この尺度をVN_Aという記号によって表すと，VN_Aは

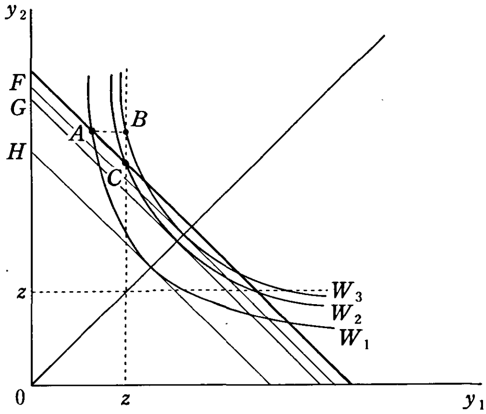
$$(9)\quad VN_A=\frac{y^{**}_{ede}-y_{ede}}{y^{**}_{ede}}$$

となる。ここでy^{**}_{ede}は $W(z\cdot e^q;y^r-t^r)$に対応して定義される「等価平等分配所得」であって，(1)式の W のもとでは

$$y^{**}_{ede}=u^{-1}\ \left(u(z)\cdot\frac{q}{n}+\sum_{i=q+1}^{n} u(y_i-t_i)\cdot\frac{1}{n}\right)$$

となる。y_{ede}は $W(y)$に対応して定義される「等価平等分配所得」である。

以上が Vaughan の提唱に係わる貧困度の経済厚生尺度である。ここでこれらの貧困度尺度が第 1 図のような社会的無差別曲線図表上でどのように定義されるかを見ておくことにしよう。ここでは単純化のため社会は二人からなると想定されており，横軸と縦軸にそれぞれ第 1 構成員の所得 y_1 と第 2 構成員の所得 y_2がとられている。貧困線 z が破線で書き込まれている。(1)式の W に基づいた社会的無差別曲線は原点に向かって凸であり，かつ原点を通過する45度線を中心に左右対称形に描かれている。右上の社会的無差別曲線ほどより高位の社会的厚生水準に対応していることは言うまでもない。



第 1 図　貧困度の「総」尺度と「純」尺度

いま仮に現実の所得分配が第 1 図上の点 A で与えられているとしよう。このときに実現されている社会的厚生水準は W_1であり，W_1 に対応する「等価平等分配所得」は HO／2 で示されている。点 A では第 1 構成員の所得が z に達していないという意味で社会に貧困が存在している。いま第 2 構成員の所得を減少させることなく第 1 構成員の所得を z に引き上げたとすれば，点 B で示される所得分配に到達する。他方第 2 構成員からの所得再分配によって第 1 構成員の所得を z に引き上げたとすれば，点 C で示される所得分配に到達する。点 B を基準とするのが貧困度の「総」尺度であり，点 C を基準とするのが「純」尺度である。以上で説明された貧困度尺度が第 1 図上でどのように表されるかをまとめると次表のようになる。

	「総」尺度	「純」尺度
Dalton タイプ		
	$VG_D=\frac{W_3-W_1}{W_3}$	$VN_D=\frac{W_2-W_1}{W_2}$
Atkinson タイプ		
	$VG_A=\frac{FO-HO}{FO}$	$VN_A=\frac{GO-HO}{GO}$

ところで Vaughan 自身も述べているように貧困の「総」尺度にはひとつの弱点がある。それは貧困の解消による社会的厚生水準の増加がその社会における資源の増加によりもたらされた社会的厚生水準の増加と明確に区別できない点である。[3] このため，「総」尺度で測定される経済厚生水準のロス（loss of welfare）は，貧困により生じたと考えられる部分と，より小さな総所得のために生じたと考えられる部分とが混在した状態になっている。一方，「純」尺度においては固定された総所得のもとでの貧困の解消に伴う社会的厚生水準の増加のみが測定されており，「総」尺度におけるような混乱がない。このため，「純」尺度の方が貧困度尺度としてはより適切であると考えてよいのではないかと思われる。

4．「純」貧困度尺度が取り得る値の範囲

しかしながら，貧困度の「純」尺度には未解決の問題がひとつ残されている。それは，貧困度計測の基準となる所得分配，$(z \cdot e^q\,;\ y^r - t^r)$，において課税計画 t^r が未決定のままで残されていることである。非貧困者が1名という例外的ケースを除けば，一般には同一の税収額 B をもたらす課税計画 t^r は無数に存在する。どのような t^r が選択されるかによって，貧困度計測の基準となる理想分配が変化し，従ってそれに応じて VN_D や VN_A の値は変化する。t^r の選択問題に明確なルールを定めておくことは貧困度の「純」尺度を実証分析の使用に耐え得るようにするために必要なことである。

本節ではこのような問題意識を念頭において，一定の税収額 B をもたらす課税計画のクラス T が与えられたときに，(1)式の W が取り得る値の範囲を明らかにしたい。

注3）Vaughan (1987)，pp. 163−164.

さて，このことを明らかにするために準備としてここでふたつの異なる課税計画，$\bar{t}^r$ と $\underline{t}^r$，を定義しておこう。

まず最初に，可処分所得にある上限値，β，を定め，所得がこの上限値を上回る構成員に対しては，可処分所得が β になるまで課税を行い，所得が β 以下の構成員からは税を取り立てないとする課税計画を考える。このような課税計画を $\bar{t}^r$ で表すとすれば，$\bar{t}^r = (\bar{t}_{q+1},\ \bar{t}_{q+2},\ \cdots\cdots,\ \bar{t}_n)$ は

$$\bar{t}_i = \max[y_i - \beta,\ 0] \qquad (i = q+1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

と定義される。但し β は

$$\sum_{i=q+1}^{n} \max[y_i - \beta,\ 0] = B = \sum_{i=1}^{q} (z - y_i)$$

が成立するように定められているとする。z に関する(4)式の仮定により，β と z の間には

$$\beta \geqq z$$

が成立することに注意しておこう。[4] $\bar{t}^r$ は，課税によって所得順位が人々の間で逆転しないとする条件のもとで，高額所得者の税負担を極度に重くするような性質を持った課税計画であるといえよう。

次に $\bar{t}^r$ とは反対に，非貧困者階層の中で相対的な低額所得者から，可処分所得が貧困線を下回らないとする制約を課したうえで，順々に可能な限り多額の税を徴収するような課税計画 $\underline{t}^r$ を考えよう。(4)式の仮定により，

注4）もし仮に $\beta < z$ であったとすれば，

$$\sum_{i=q+1}^{n} \max[y_i - z,\ 0] < \sum_{i=q+1}^{n} \max[y_i - \beta,\ 0]$$

$= B = \sum_{i=1}^{q} (z - y_i)$ が成立することになるが，$y_i \geqq z\ (i \geqq q+1)$ であるから，結局

$$\sum_{i=1}^{n} y_i < n \cdot z$$

を意味することになり，(4)式の仮定に反する。

与えられた $B\left(=\sum_{i=1}^{q}(z-y_i)\right)$ に対して構成員のある番号 $k(\geqq q+2)$ が存在して

$$\sum_{i=q+1}^{k-1}(y_i-z)\leqq B\leqq \sum_{i=q+1}^{k}(y_i-z)$$

が成立する。[5] $\underline{t}^r=(\underline{t}_{q+1},\ \cdots\cdots,\ \underline{t}_n)$ は

$$\underline{t}_i=\begin{cases} y_i-z & (i=q+1,\cdots,k-1)\\ B-\sum_{j=q+1}^{k-1}(y_j-z) & (i=k)\\ 0 & (i=k+1,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

と定義されるような課税計画である。

更に準備として次の補助定理を提出しておこう。

［補助定理］[6]

総所得の等しいふたつの所得分配

$$x=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$
$$y=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n)$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

に対して，ある実数 α が存在して

$$(y_i-x_i)(x_i-\alpha)\geqq 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が成立するならば，任意の凹関数 $u(\cdot)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}u(x_i)\geqq\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$$

が成立する。

以上の準備のもとにわれわれは次の定理を提出することができる。この定理によって，与えられた総所得のもとで貧困を救済するための（集合 T で示される）あらゆる課税計画のなかで $\bar{t}^r$ が（(1)式の W の意味で）最大の社会的厚生水準をもたらし，$\underline{t}^r$ が最小の社会的厚生水準をもたらすことが明らかにされる。

［定理］

$$W(z\cdot e^q;y^r-\underline{t}^r)\leqq W(z\cdot e^q;y^r-t^r)\leqq W(z\cdot e^q;y^r-\bar{t}^r) \qquad (\forall t^r\in T)$$

証明

最初に左側の不等式が成立することを明らかにしよう。課税計画 t^r に対応する可処分所得ベクトルを $d^r=y^r-t^r$ で表すとする。d^r の各要素をその値の昇順に並べかえてベクトル $d^{r'}=(d_{(q+1)},\ d_{(q+2)},\ \cdots\cdots,\ d_{(n)})$ を作るとしよう。ここで各要素における添字 $(q+i)$ は，この要素が昇順にソートされる以前に d^r において付けられた番号を表している。

さて，いま仮にある $i(1\leqq i\leqq n-q)$ が存在して $d_{q+i}>y_{q+i}$ が成立していたと仮定すれば，

$$d_{(q+j)}\geqq d_{(q+i)}>y_{q+i} \qquad (j=i,\ \cdots\cdots,\ n-q)$$

が成立するから，ベクトル $d^{r'}$ の各要素のなかで値が y_{q+i} に等しいか，それ以下であるような要素の数は高々 $i-1$ あるに過ぎないことになる。ところが，他方 $t^r\in T$ であることと(5)式によって

$$d_{q+m}=y_{q+m}-t_{q+m}\leqq y_{q+m}\leqq y_{q+i} \qquad (m=1,\ \cdots\cdots,\ i)$$

が成立している。このことから，ベクトル d^r には（そして $d^{r'}$ にも）値が y_{q+i} に等しいかそれ以下である要素の数は i 以上存在することが分かる。従って，ある i が存在して $d_{(q+i)}>y_{q+i}$ が成立すると仮定することは矛

注5）このような k が存在しないとすれば，

$$\sum_{i=q+1}^{n}(y_i-z)<B=\sum_{i=1}^{q}(z-y_i)$$

が成立することになるが，このことは

$$\sum_{i=1}^{n}y_i<n\cdot z$$

を意味することになり，(4)式の仮定に反する。

注6）この補助定理については吉田（1988, pp. 8−9）を参照されたい。

盾である。以上によりすべての $i(1 \leqq i \leqq n-q)$ に対して $d_{(q+i)} \leqq y_{q+i}$ が成立していなければならないことが分かる。

以上の準備のもとで

$$(10) \quad (\underline{d}_{q+i}-d_{(q+i)})\cdot(d_{(q+i)}-d_{(q+k)}) \geqq 0 \quad (i=1, \cdots\cdots, n-q)$$

が成立するのを確認することは容易である。まず $i>k$ の場合には，$\underline{t}^r$ の定義により $\underline{d}_{q+i}=y_{q+i}-\underline{t}_{q+i}=y_{q+i}$ が成立しているから，上述の考察により

$$\underline{d}_{q+i}-d_{(q+i)}=y_{q+i}-d_{(q+i)} \geqq 0$$

が成立する。また $d^{r'}$ の各要素は値の昇順に並べられており

$$d_{(q+i)} \geqq d_{(q+k)}$$

が成立している。従って(10)が成立することが分かる。

次に $i<k$ の場合には $\underline{t}^r$ の定義から $\underline{d}_{q+i}=y_{q+i}-\underline{t}_{q+i}=z$ が成立しており，かつ $t^r \in T$ であるから

$$d_{(q+i)} \geqq z$$

である。従って

$$\underline{d}_{q+i}-d_{(q+i)}=z-d_{(q+i)} \leqq 0$$

が成立する。また $d^{r'}$ の作り方から

$$d_{(q+i)} \leqq d_{(q+k)}$$

が成立する。以上によりすべての i に対して(10)が成立することが分かった。従って［補助定理］により

$$W(z\cdot e^q\,;\,y^r-\underline{t}^r) \leqq W(z\cdot e^q\,;\,d^{r'}) = W(z\cdot e^q;y^r-t^r)\,(\forall t^r \in T)$$

が成立する。このようにして左側の不等式が成立することが分かった。

右側の不等式が成立していることが言えるためには

$$(11) \quad (d_{q+i}-\bar{d}_{q+i})\cdot(\bar{d}_{q+i}-\beta) \geqq 0 \quad (i=1, \cdots\cdots, n-q)$$

が成立することを確認すればよい。まず $d_{q+i}>\bar{d}_{q+i}$ が成立している場合を考えよう。この場合には，$\bar{t}^r$ の定義により

$$y_{q+i} \geqq d_{q+i} > \bar{d}_{q+i}=y_{q+i}-\max[y_{q+i}-\beta, 0] =\min[y_{q+i}, \beta]$$

が成立するから，$y_{q+i}>\beta$ でなければならない。従って $\bar{d}_{q+i}=\beta$ となって(11)が成立する。次に $d_{q+i}<\bar{d}_{q+i}$ が成立している場合には，$\bar{t}^r$ の定義によって $\bar{d}_{q+i}=y_{q+i}-\bar{t}_{q+i} \leqq \beta$ がすべての i に対して成立していることから(11)式の成立は明らかである。(11)式と［補助定理］により

$$W(z\cdot e^q;y^r-t^r) \leqq W(z\cdot e^q;y^r-\bar{t}^r) \quad (\forall t^r \in T)$$

が成立していることが分かる。

Q. E. D.

以上の定理によって，固定された総所得のもとでの貧困の救済という目的を達成し得る課税計画の集合 T のなかで，(1)式の意味での W が最大となる課税計画 $(\bar{t}^r)$ と，W が最小となる課税計画 $(\underline{t}^r)$ が明らかにされた。

最後に t^r の選択という問題を念頭において，Dalton-Atkinson タイプの経済厚生尺度を振り返ってみよう。このタイプの経済厚生尺度は，理想状態において実現されるであろう社会的厚生水準を基準として，現実の所得分配における社会的厚生水準がこの基準をどの程度下回っているかを測定しようとする尺度であった。ところで，理想状態となる所得分配は再分配の許され得る範囲に依存して決定される。所得不平等度尺度においては所得再分配のあらゆるあり方が許されているために，完全平等分配において最大の社会的厚生水準が実現される。このために完全平等分配が測定の基準とされたのである。これに対して，貧困度尺度においては所得再分配は貧困の救済という限定された目的を達成する範囲に限られている。従って，この限られた範囲で最大の社会的厚生を実現する所得分配が理想状態として基準とされると考えるのは極めて自然であろう。このような考え方に従えば，

「純」貧困度尺度において基準となるのは課税計画が $\bar{t}^r$ のもとにおける所得分配（$z \cdot e^q$; $y^r - \bar{t}^r$）でなければならないことが本節で提出した定理により導かれる。

このような考え方に従って，$\bar{t}^r$ が決定された「純」貧困度尺度，VN_DとVN_A，は(1)式の W のもとでそれぞれ

$$VN_D = \frac{q \cdot u(z) + \sum_{i=q+1}^{n} u(\min[y_i,\ \beta]) - \sum_{i=1}^{n} u(y_i)}{q \cdot u(z) + \sum_{i=q+1}^{n} u(\min[y_i,\ \beta])}$$

$$VN_A = \frac{y_{ede}^{**} - y_{ede}}{y_{ede}^{**}}$$

という形をとる。ここで y_{ede}^{**} と y_{ede} はそれぞれ

$$y_{ede}^{**} = u^{-1}\left(u(z) \cdot \frac{q}{n} + \sum_{i=q+1}^{n} u(\min[y_i, \beta]) \cdot \frac{1}{n}\right)$$

$$y_{ede} = u^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} u(y_i) \frac{1}{n}\right]$$

となる。

参 考 文 献

Atkinson, A. B. (1970), "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, 2, 244－263.

— (1987), "On the Measurement of Poverty", *Econometrica*, 55, 749－764.

Blackorby, C., and D. Donaldson (1980), "Ethical Indices for the Measurement of Poverty", *Econometrica*, 48, 1053－1060.

Chakravarty, S. R. (1983), "Ethically Flexible Measures of Poverty", *Canadian Journal of Economics*, 16, 74－85.

Dalton, H. (1920), "The Measurement of Inequality of Incomes", *Economic Journal*, 30, 348－361.

Kakwani, N. (1981), "Note on a New Measure of Poverty", *Econometrica*, 49, 525－526.

Pyatt, G. (1987), "Measuring Welfare, Poverty and Inequality," *Economic Journal*, 97, 459－467.

Vaughan, R. N. (1987), "Welfare Approaches to the Measurement of Poverty", *Economic Journal*, 97, 160－170.

Sen, A. (1976), "Poverty : an Ordinal Approach to Measurement", *Econometrica*, 44, 219－231.

Takayama, N. (1979), "Poverty, Income Inequality, and Their Measures : Professor Sen's Axiomatic Approach Reconsidered", *Econometrica*, 47, 747－759.

Thon, D. (1979), "On Measuring Poverty", *Review of Income and Wealth*, 25, 429－440.

— (1983), "A Note on a Troublesome Axiom for Poverty Indices", *Economic Journal*, 93, 199－200.

吉田建夫（1988）「財政規模制約下における最適な所得再分配計画」『文経論叢（弘前大学）』第24巻第1号，1－17。