Title	ダグラス生産函数についての結論的覚書
Author(s)	種岡, 輝雄
Citation	経営と経済, 42(2), pp.63-85; 1962
Issue Date	1962-07-31
URL	http://hdl.handle.net/10069/27633
Right	

ダグラス生産函数についての結論的覚書

種　岡　輝　雄

(一)

ダグラスは生産函数

$$P = bL^kC^j \quad (k+j \neq 1) \qquad (1)$$

のパラメターk、jを推定するため、クロスセクション分析に於いては適当な年度を選び、製造工業を対象とし、そこに含まれる各産業毎の生産価値額、労働及び（固定）資本の投入量を観察値として採用した。しかし、生産価値額の生産には、労働、（固定）資本以外のものも当然参与している筈であるから、いわゆる産業付加価値額がとられねばならなかった。生産センサスに含まれる各産業毎の労働、資本の投入量、付加価値額の対数をとり、これを、logL, logC, logP を軸とする三次元の対数空間に plot すると、任意の一産業は三次元空間の一点にて示され、かくして産業全体についての観察点が図示されることになる。これらの観察諸点に対し(1)の対数型

$$\log P = \log b + k\log L + j\log C \qquad (2)$$

を、最小化の方向を logP 方向にとり、最小自乗法で k と j とを推定しようとするのである。こゝでの目的は式(1)に於て

$$k+j=1 \tag{3}$$

になるか否かの吟味であり、もし(3)の結果がえられれば式(1)は

$$P=bL^{k}C^{1-k} \tag{4}$$

と書かれることになり、生産函数が一次且つ同次という仮設が現実の資料により justify されたことになる。こゝに式(4)の仮設はダグラス函数の場合、特別の意味をもつ仮設である。それはダグラスは上の生産範式により、労働賃銀の分配が限界生産力説によってきまるとの命題を現実の資料によって検証しようとしたことに大きな目的があったからである。[1] 即ち価格ギブンの完全競争条件の下で、労働賃銀が労働の限界生産力に等しく支払われるものとすれば式(1)を念頭におく限り、労働の限界生産力は

$$\frac{\partial P}{\partial L}=k\frac{P}{L} \tag{5}$$

であり、従って、賃銀総額（wage bill）は

$$\frac{\partial P}{\partial L}L=k\frac{P}{L}L=kP \tag{6}$$

であり、従って生産量に於て、賃銀総額の占める割合、即ち労働の相対的分前（relative share of labor）は

$$\frac{\partial P}{\partial L}\ \frac{L}{P}=k \tag{7}$$

であり、資本についても資本用役の価格が、資本の限界生産力に等しく支払われるものとすれば、資本の限界生産力は

$$\frac{\partial P}{\partial C} = j\,\frac{P}{C} \qquad (8)$$

であり、従って、利子支払い総額は

$$\frac{\partial P}{\partial C}\,C = jP \qquad (9)$$

であり、利子分配分の相対的割合は

$$\frac{\partial P}{\partial C}\;\frac{C}{P} = j \qquad (10)$$

であり、この式(7)、(10)は利潤極大条件式であり、又企業の個別的均衡条件式と称せられるものである。(2)

他方、労働L、資本Cが投入されて、産出量Pが産出され、労働及び資本の価格が夫々限界生産力に等しく支払われるものとすれば、雇用総労働及び総資本の受取る分配総額は

$$\frac{\partial P}{\partial L}\,L + \frac{\partial P}{\partial C}\,C = (k+j)\,P \qquad (11)$$

であり、限界生産力説にいう消尽の定理が成立するためには、

$$k + j = 1 \qquad (3)$$

が必要である。何故なら、

$$k + j \neq 1 \qquad (12)$$

の場合には、消尽の定理は成立しないからである。従って式(3)の成立は問題の産業社会が完全競争の下における究極の均衡状態にあることを意味する筈である。何故なら、ダグラスは後者の成立のための必要条件を生産函数が一次且つ同次であることに、今の場合式(3)の成立に求めているからである。[(3)] 従って、当然この場合問題の産業社会に於いて企業は無利潤の状態で生産が行われている筈である。更にダグラス生産函数の指数の和が1に等しい。即ち一次且つ同次であり、且つ競争が完全であれば、産出量、投入量の数量が何であれ、労働者の受け取る賃銀分配分の相対的割合はkに等しい。[(4)] 即ちkは労働の相対的分前(relative share of labor)を示す数値となる(資本についても同様)。以上でわれわれはダグラス生産函数が一次且つ同次である仮設の意味を明にしえたと思う。

(二)

パラメターk、jの推定に当って、前述のようにクロスセクション分析の場合、適当な年度を選び、製造工業を対象として、そこに含まれる各産業の生産価値額、労働及び資本（固定資本）の投入量（存在量）の観察値が推定のための資料としてとられた。しかし、生産価値額の生産には一般的にいって上述の労働、資本の投入量以外のものが当然参与している筈であるから、原因変数として労働、資本の投入量が採用された以上、これに対応して生産価値額として産業付加価値額がとられねばならなかったのである。そしてこれらの産出量、投入量（存在量）の定義について適用年度を異にするにつれて、若干の差異のみられることも事実である。[(5)] しかし、今はこのことには一切ふれず又当

分の間、観察誤差[6]についても一切ふれないことにする。事柄はダグラス模型の理論的考察に属するからである。ここで、上述の資料にダグラス範式

$$P = bL^k C^j \quad (k+j \neq 1) \qquad (1)$$

を最小自乗法であてはめて、パラメーターk、jの推定を行うのであるから、任意の産業の付加価値、労働、資本の投入量の間に上述の範式が妥当するものと見做している筈である。しかも、ダグラスの場合、産業付加価値額、労働、資本の投入量はその産業を構成する各企業の付加価値、労働、資本の投入量のすべての企業についての総和であるといいうるから、この点からのみいえば、ダグラス範式は産業産出量、投入量の間の関係を規定する産業生産函数乃至**Aggregate Production Function**と見做されねばならぬことになる。このように考えた場合生産函数の型はどのようなものとなるか。このことからまず考察して行こう。

所でダグラスの場合、産出量として産業付加価額を採用しているが、これはクロスセクション分析に含まれる各産業間に於て、生産物の種類が異るため貨幣価値額が採用されねばならなかったのであるが（資本についても相似た事情があてはまる）、今は任意の一産業をとりだして、一産業の産出量、投入量の間の関係を規定する生産函数の性格についての考察であり、しかも、考察を簡単の場合から複雑な場合へと進めて行くためにも、一産業内に於ては、各企業の産出量、更に投入量はすべて企業間に於て同質（homogeneous）のものと見做して議論を進めよう。このようにしても、ダグラス本来の意図からはあまりはなれないと思う。今、産出物の種数は1種、投入量の種類は2種類の場合から考察を進めて行こう。任意の一産業に含まれる、任意の企業αをとりだし、このα企業についての技術的生産函数を

$$x_\alpha = f_\alpha(n_\alpha, z_\alpha) \qquad (13)$$

の形のものにて示そう。こゝに、x_α、n_α、z_α、は夫々α企業の産出量、労働、資本の投入量を示し、右産業に含まれる企業の数はA個である。所で個々の企業の現実の産出量、労働、資本の投入量は、完全競争の下に於ては、無条件利潤極大条件式が成立するように、即ち限界生産力均等の法則が成立するようにきめられるものとすれば、産出量、投入量はすべて同質であると見做されているから、すべての企業について次式⒁、⒂の限界生産力均等式が成立する筈である。

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial x_\beta}{\partial n_\beta} \quad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots\ldots A) \tag{14}$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial x_\beta}{\partial z_\beta} \quad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots\ldots A) \tag{15}$$

勿論生産物の価格をPx、労働、資本の価格をPn、Pzにて示せば式⒁の各式はすべて$\frac{Pn}{Px}$に、式⒂の各式はすべて$\frac{Pz}{Px}$に等しくおかれるものである。

こゝに、これらの投入量はすべて同質であると見做されているから、産業全体の aggregate は、それら個々の企業の投入量の単なる算術和として求められると見做そう。従って産業全体の労働、資本の投入量総額を夫々N、Zにて示せば

$$N = \sum_{\alpha=1}^{A} n_\alpha \tag{16}$$

$$Z = \sum_{\alpha=1}^{A} z_\alpha \tag{17}$$

である。そこで今かりに、N、Zを parameter として取り扱い変数として数えないとすれば、上述の方程式組織⒀、⒁、⒂、⒃、⒄に含まれる独立した方程式の数は3A、変数は各企業について、x_α、n_α、z_α、の3個、企業数はAであるから、計3A個。従って、x_α、n_α、z_αはパラメターN、Zについてとかれて

$$n_\alpha = n_\alpha (N, Z) \tag{18}$$

$$z_\alpha = z_\alpha (N, Z) \tag{19}$$

この式⒅、⒆を式⒀に代入して

$$x_\alpha = f_\alpha \left[n_\alpha (N, Z), \quad Z_\alpha (N, Z) \right] \tag{20}$$

が求められ、産業全体の産出量Xは定義からして

$$X = \sum_{\alpha=1}^{A} x_\alpha \tag{21}$$

であるから、

$$X = \sum_{\alpha=1}^{A} f_\alpha \left[n_\alpha (N, Z), \quad z_\alpha (N, Z) \right] = F(N, Z) \tag{22}$$

が求められ、X、N、Zの間の関係を規定する生産函数即ち Aggregate Production Function が求められる。

上述のようにして、産業全体の労働投入量N、資本の投入量Z、産出量Xが求められて、X、N、Z間の関係を示す式が式㉒である。(7) 即ち上述に於ては、各企業は式⒀を制約条件式として、完全競争の下に於いて無条件利潤極大条件式が成立するように、限界生産力均等の法則が成立するように、各産出量x_α、投入量n_α、z_α、をきめるものと見做

した。そして各企業のx_α、n_α、z_αを単に加算することにより、X、N、Zは求められて、産業アグリゲートは求められる。そしてこのX、N、Z間の関係式(22)を導出するためには、(1)限界生産力均等の企業の個別的均衡条件式、(2)N、Zをパラメターとして取り扱うこと の二つが先述の場合必要であったのである。従って式(22)は、各企業が無制限利潤極大の状態にあるときにのみ妥当するものであり、これらの経済的条件を外にして求められるものではない。ところが、本来の技術的生産函数は、利潤極大といった経済的条件とは別個に存在するものである以上、この式(22)は本来の技術的生産函数ではない。[8] 更にN、Zをパラメターとして取り扱うことも上記の場合には必要である。そうでなければ上述のようにして各企業のx_α、n_α、z_αが求められても、そしてそれから、X、N、Zを求めても

$$X = \Sigma x_\alpha = \Sigma f_\alpha(n_\alpha, z_\alpha) \qquad (23)$$

であり、この式(23)から式(22)を導出するためには新らしい条件が必要であり、かりにこれらの事柄を無視してX、N、Z間に式(22)の型の生産函数を設定しても、そのもつ意味は不明であるといわざるをえない。式(23)はXと2A個の投入量n_α、z_αとの間の関係式を示すものであり決してX、N、Z間の関係を示すものではない。何かそこに仮定を設けねば式(22)を導出することは不可能であり、上述に於ては、N、Zがパラメターとしてとられたのである。ダグラス生産函数の場合、労働、資本の投入量が原因変数（独立変数）、産出量が結果変数としてとられていることは事実である。しかし、産業投入量N、Zを言葉通りの原因変数として取り扱うことにはかなり無理があるようであるが、かりにこれを無視して、N、Zを原因変数、産出量Xを結果変数と考えた場合、式(22)が、産業生産函数と一応よばれてよいであろう。そして、この場合の決定の仕方は凡そ次ぎのようになるであろう。このN、Zの産業 aggregate の各企業（$\alpha = 1, 2, \ldots\ldots A$）への配分は前記均衡条件式(14)、(15)によってきめられて、$n_\alpha(N, Z)$　$z_\alpha(N, Z)$が求められ、こ

の投入量が企業の生産函数式⒀に投入されて、産出量が求められ、このx$_\alpha$の集計量について

$$X=\sum_{\alpha=1}^{A}x_\alpha=\sum_{\alpha}^{A}f_\alpha\left[n_\alpha(N,Z),\ z_\alpha(N,Z)\right]=F(N,Z) \qquad (22)$$

が求められるわけである。この場合式㉒を導出するために、無条件利潤極大式、今の場合限界生産力均等式の成立していることが必要である。従って、たとえ、N、Zが一定不変であっても、企業が完全競争下の無条件利潤極大の状態になければ、式⒁、⒂によって各企業への配分はきまらず、現実の企業の状態を規定する条件式―式⒁、⒂に対応する式―が、産業集計量の企業への配分の決定のため必要であり、この場合には当然各企業の投入量、n_α、z_αも、従って又産出量x_αも、先記の無条件利潤極大の場合のそれとは異なり、従って、同一のN、Zが投入されたにしても、産出されるXは先記のそれとは異なることになろう。だから式㉒の導出のためには、㈠各企業の技術的生産函数式⒀、㈡各企業の現実の状態を規定する式⒁、⒂乃至それに対応する条件式がともに必要であり、従ってこの㈠、㈡から導出される前記アグリゲート生産函数式㉒は純粋に技術的な生産函数ではありえないし、[9] 企業の生産函数⒀と同一視することはもはや不可能である。更に先記㈡、即ち産業に於ける企業の相対的状態がどうであるか。即ち、完全競争の下に於ける無条件利潤極大の状態にあるか―先記条件式⒁、⒂はこの状態にあることを示す―乃至制限付利潤極大の状態にあるか、独占的状態乃至それに近い状態にあるか―これに対応して式⒁、⒂に対応する夫々の場合の均衡条件式が成立し―、それらの状態に対応して式㉒は導出されるわけである。厳密ではないが、も少しわかりやすくいえば、完全競争の場合には、大体小規模の企業が多数存在している場合であるが、果して問題の産業がこのような状態にあるか、そうではなしに大企業、中企業、小企業が混在している場合であるか、乃至混在している場合にはそ

の比率がどうなっているか等、一言でいえば、産業の企業構成が式(22)のFの決定に当然参与している筈だというのである。

更に式(22)

$$X = F(N, Z) \tag{22}$$

について今、原因変数N、Zの双方を$\varLambda$倍（$\varLambda>0$）してみよう。そうすれば定義からは

$$\varLambda N = \varLambda \Sigma n_\alpha \tag{24}$$

$$\varLambda Z = \varLambda \Sigma z_\alpha \tag{25}$$

となり、すべての企業の労働、資本の投入量n_α、z_αは$\varLambda$倍されることになるようであるが、決して実際に於いてはこうなる必然性もない。何故なら先記の均衡条件式から

$$n_\alpha = n_\alpha(N, Z) \tag{18}$$

$$z_\alpha = z_\alpha(N, Z) \tag{19}$$

が求められるが、これらの式について

$$\varLambda n_\alpha = n_\alpha(\varLambda N, \varLambda Z) \tag{26}$$

$$\varLambda z_\alpha = z_\alpha(\varLambda N, \varLambda Z) \tag{27}$$

になる必然性は何もないこと。従って、N、Zが一様倍されても、各企業のn_α、Z_αが一様倍される必然性もなく、従っ

て、本来の企業の技術的生産函式(13)について x_α が一様に Λ 倍されるか否かとは全然無関係であり―技術的生産函数の一次且つ同次であるか否かとは全然無関係であり、従って、本来の企業の技術的生産函数がたとえ一次且つ同次でなくとも式(22)について

$$\Lambda X = F(\Lambda N, \Lambda Z) \tag{28}$$

なることも可能である。ということは式(28)の生産函数（とかりに考えても）の吟味からは、式(13)については何もいえないということである。

更に上述に於ては、生産物の種類一種、労働、資本の投入量は同質であると見做して、x_α、n_α、z_α にて示したが、同一産業といっても、げんみつにいえばその中に多くの種類の生産物を含み、更に同一企業内に於いて投入される労働、資本の質も決して同一ではない。けだし、同じ労働といっても質の差が見られ、同じ固定資本財といっても、建築物、機械があり、機械にも夫々質の差があるからである。従ってこのことを考慮にいれるとき aggregation の手続きは更に複雑なものとなり、式(22)の函数Fの型も異り、原因変数として、それらの aggregation の条件を反映するものがはいってくることになろう。[10]

しかも、これらのことは同一産業についての aggregate についてのことである。産業を異にすれば、技術的条件式である企業の生産函数式(13)も当然異ると考えられる。けだし、生産物の種類が異れば、労働、資本間の可能な代替の程度も当然異なり、従って、技術的生産函数も同一型のものでは把握出来ぬ筈であるし、更に、産業を別にすれば勿論資本強度も異ると考えられるから、当然、技術的生産函数も同一の函数にてはどうしても把握されぬと考えられる。[11] 更に、産業の企業構成も当然異るであろうから、これらを無視して各産業の付加価値額、労働、資本の投入（存

在）量を資料として、同一タイプの生産範式をあてはめて、パラメターを推定してみても、これを以て、技術的生産函数について推定値とはどうしても考えられぬ。しかも、その理論的考察に関する限り、式(22)でなければならぬことを考えて見る場合、尚更である。上述のX、N、Zは単に算術和として求められる最も簡単な場合である。現実に於いて、一産業の各企業の産出量、投入量から、そのアグリゲートを求める場合には、その手続きが更に複雑となり、ウェイトをつけて求めるとか色々の方法が考えられるであろう。従って、その場合のX、N、Z間の関係式は、これらのアグリゲーションの要素をパラメターとして含むことから、更に複雑なものとなろう。従って上述は、ダグラス函数あてはめに当っての難点の一原理的説明である。

（三）

扨て、ダグラス函数のあてはめに使用せられる資料は当然一企業のそれでなければならぬことも今までの説明からして明瞭である。ところがこれがえられないからインター・インダストリの集計量が使用されたのである。だから一産業一企業しかもげんみつには各産業同一生産物を生産しているものと考えざるをえない。さもなければダグラス函数をあてはめて、パラメターk、jを推定しても意味がないことは前述より明らかである。だから、インター・インダストリ資料へのあてはめには出発点に於いて無理があることも先述より明らかである。資料は各産業毎の付加価値、労働、資本の投入量（存在量）である。しかも、これら産業集計量は企業のそれらの和である。これに対し範式をあてはめてk、jを推定しようとするのであり、しかもこのあてはめには先述した無理があるので、或は super aggregate function[12] と称せられる所以である。理論的考察に関する限り、ダグラス生産函数のあてはめを justify

する根拠を見出しえない。もともと、その理論的考察からすれば、ダグラス函数は企業の、ミクロの生産函数でなければならぬ。即ち現実の産業に競争が行われているものと見做して、企業の生産函数として一次且つ同次の生産函数を最も妥当なものとして選び、それ以外を除いたわけである。そして、この仮設が現実の資料により justify されるか否かが問題となり、(13) このため資料にあてはめて k、j の推定が行われたのである。そして、この資料として、あるいは時系列資料が、あるいは産業別集計量資料が採用されたのであり、これらはいづれも、aggregate である。従って、ミクロの生産函数から、aggregate 生産函数をいかにして導出するかが当然問題となるわけであるが、ダグラスこれらの考察を一切抜きにして、生産函数の技術的関係式の吟味のため、これらの産出量、投入量資料を採用したのである。そして、クロスセクション分析の場合、産業毎の集計量をかりに同一企業のそれのサムプルと見做して k、j の推定を行い、そして、k と j との和が1になるか否かの吟味を行い、更に、この k と現実の統計的資料から別個に計算される賃銀支払額の相対的分前を示す数値とを比較して、賃銀の限界生産力説が、現実に於て検証されるか否かを見ようとしたのである。従って、模型について、資料の面について、色々の批判は加えられるが、これを無視して、ダグラスのやり方を承認して、そして、(一) k と j との和が1に近い事実のえられていること。(二) k と W/P が等しいとの経験的発見(14)を一応かりに承認した場合、そこに何ら矛盾することはないかを考察してみよう。けだし、ダグラスの場合(一)、(二)は何れも特有の経済的制約の附せられている仮設であるからである。これらの経済的制約の考慮に照らして、これらの経験的発見が何らの矛盾を含まないか否かの吟味であり、ダグラス函数の問題はこの一点に集約されると思う。

(一) $k+j=1$。この推定結果のえられていることは、端的にいって、製造工業全体が無利潤で生産を行っていたことを意味するが、このことは理論的に考える限り、到底ありえないことである。そうであるとすれば、ダグラスの適用

年度についてはどうか。例えば一九〇四年、[15] アメリカ合衆国製造工業についてのk、jの推定結果を見るに、観察総数三三六産業について

k	σ	j	σ_i	k+j
0.654	±0.022	0.312	±0.021	0.966

で、kとjとの和は1に極めて近く、それが1であるとの仮設は斥けられない。だから、ダグラスの解釈からすれば製造工業全体としては、究極の均衡状態にあり、無利潤で生産が行なわれていることになる筈であるが、他方一九〇四年は、ダグラス自身の説明によっても、前半は軽度の不況、後半は回復期であり、しかも一九〇四年まで、一八九六年に始まった緩慢な物価騰貴は尚進行していた。そしてこの緩慢な物価騰貴は、製造業者にとっては、利潤の幅の拡張をもたらし、利潤を増加せしめるためのよりよき好機会であることを意味したと述べている。[16] かくして一九〇四年はインフレ期と見られ、インフレ期には、製造工業は高利潤をあげることが予想されるが、このことはダグラス自身の言葉の中にも看取される通りである。しかも尚ダグラス範式あてはめの結果、$k+j=1$ が斥けられないとの事実をいかにして親和せしめるか。この場合製造工業の独占的産業部分によって、高利潤があげられ、残りの産業部分によって損失を蒙って生産が行われ、しかも尚製造工業全体としては無利潤で生産が行われていたと一応はいえるにしても、どうも納得しがたいものがある。これと類似のことは他の適用例についても見られ、更に時系列についても同様のことが言われており、ダグラス自身もこのことについて言及している。[17]

㈡ $k=\frac{W}{P}$ の検証について。一次且つ同次のダグラス函数については、産出量が何であれ、L、Cの投入量が何であれ、賃銀支払額の生産額に於て占める割合 (relative share of lalor) は一定で、kで示されることは先述

した。果して、ダグラスの資料についてこのことは justify されるか。このため Commonwealth of Australia (1934～1935) の適用例[18]を見てみよう。

k	σ_k	j	σ_i	$k+j$	$\frac{W}{P}$
0.64	0.04	0.36	0.04	1.00	0.61

この結果から見る限り、$k+j=1$ であり、生産函数は一次且つ同次となるから、産出量、労働、資本の投入量が何であれ、労働の相対的分前は k、今の場合 0.64 であるべき筈である。しかも、現実の分配分は (W/P) は 0.61 である。従って、k と W/P とは完全に等しくないが、ほぼ相等しいので、賃銀の限界生産力説は justify されたものと考えられ、そして、ダグラス自身もそう考えている。果して、矛盾はないか。ちなみに、W/P の計算に当って、上述にえられている 0.61 は、製造工業全体の労働賃銀支払額を、製造工業全体の付加価値額総計で除して求められた数値である。しかし、別の個所で、[19]ダグラス自身によって述べられていることからすれば、この W/P は、含まれる各産業毎の（今の場合138産業）W_i/P_i の重みをつけぬ単純平均でなければならず、今の場合、筆者の計算によれば 0.64 である。何故この 0.64 の数値を使用していないか不明である。[20]恐らく k と W/P が完全に等しくなることは、当該年度のオーストラリヤに於て、政府による wage regulation が行われていたので、それを考慮して 0.61 を採用したものと思われる。ここにも納得出来ぬ点があるが、それはそれとして、上の例に含まれている 138 の産業別の W_i/P_i を見るに、最低 Oils, Mineral の 0.137 から、最高 Arms の 5.444 に及ぶかなり広い数値にわたっている。これらの極端な数値を別にしても、W_i/P_i についてかなり広い散布が見られ、決して 0.64 でもなければ 0.61 でもないし、又これらの数値のまわりにむらがっているということも見られない。[21]このこと自体、ダグラ

ス函数の持つ意味からして、どうしても理解されぬ事柄であり、従って、上述のダグラスの推定結果の経済的解釈に疑念をさしはさむに充分のものと思われる。外の場合には産業毎の$\frac{W_i}{P_i}$の計算が示されていないので何ともいえぬが、大体上述の事柄は妥当すると思われる。勿論この場合についてダグラス自身、本来産業毎にパラメターは同一ではないが、これらを別々に計算することは不可能であるから、すべての産業を homogeneous なものとして、k、jを計算せざるをえないと述べながらも、結果変数の推定値と観察値との双方を比較するとき、良好の結果のえられている事実を引用して、パラメター、k、jの推定のやり方を是認しているようである。(22) しかし、ダグラス函数を単なる推定方程式として使用する場合は別として、構造方程式のパラメター推定として使用する場合この結果に信頼出来ぬこともすでに周知の事柄である。(23)

㈢　更に、このように推定方程式として、良好な結果のえられていることは、$k+j=1$ の推定結果のえられていることと共に、付加価値額、労働、資本の量の観察値が、産業毎に略々同一比率で増加している事実にその説明根拠が求められている。(24) 何故このように、P、L、Cの資料が産業間に於て、略々同一比率で増大するとの systematic variation が認められるか。これについては決定的なことはいえないが、以下の事柄はその消極的説明にはなるであろう。L、Cは本来投入量でなければならぬが、Lは一応別にしても、Cは決して、資本の投入量を示さぬこと。(25) これを資本の存在量 capital asset と見做しても、生産センサスに含まれている資本の存在量はその性格からして満足の行く数値ではなく、更に推定のための適当な資本量を求めるためには、センサスの数値の上に更に推定が行われなければならぬことから、二重の誤差を含むのである。(26) 更に又、付加価値額として、純付加価値額を求めようとすれば、生産センサスには、これ又減価償却費を含む、粗付加価値額しか記載されておらず、この粗付加価値額から、純付加価値額を求めようとすれば、推定された減価償却費を控除することになり、大きな誤差が含むので、推定に於て

或いは粗価値額が使用されているのである。そして、この場合には、産業間に於いて減価償却率一定であるといった如き仮定が設けられねばならないのである。更に上述からクロスセクション分析の年度を異にするにつれて使用された資料に若干の差が見られるのも理解出来ることがらである。しかし、この問題にはこれ以上ふれることが出来ぬ。原資料が利用出来ないから、筆者が計算し直すことが出来ぬからである。今一つ、それは観察数に関する。観察値はすべて、生産センサスに従って計算されているが、産業分類はそのまま採用されているわけではない。例えばアメリカ合衆国製造工業（1909年）のダグラス分析に含まれる産業数は90であるが、センサスに含まれる産業の数は数百に及ぶものであり、更にこの90産業のうち、22産業は、センサスに含まれる smaller industries から、合成された産業である。[27] 更に例えば、Australia 製造工業（1936~1937年）のダグラス分析に於いて、観察値として採用された85産業は、当該年度に於ける製造工業付加価値額の81%を生産したにすぎぬこともダグラスのいう通りである。[28] とすれば、これら夫々の場合、前者の場合、合成された産業をもとにもどして分析を行った場合、乃至後者の場合、残りの19%の付加価値を生産した産業をとりあげて、推定を行った場合果して、満足の行く推定結果がえられたか否かの疑念をさしはさむに十分と思う。原資料が利用できないので、決定的なことのいえないのが残念であるが少くとも、これらの事情は、ダグラスの資料のとり方にかなり、無理が見られ、$k+j=1$ の推定結果のえられたことは、ダグラスの資料、も少し広くいってダグラスの時代にのみ妥当したといっては言い過ぎであろうか。以上はダグラス生産函数の内在的批判に属する。

（四）

ダグラス函数のあてはめに当っては、第一にその函数型に於て、第二にそのあてはめに使用された資料に於て、第

三に今は全然ふれていないが、推定方法に於て、[29] 第四に、第一、第二、第三を一応無視して、ダグラスのやり方に従うにしても、尚、その仮設の経済的考察に於て、現実にこの仮設を justify するだけの理由が認められぬことが判明する。とすれば、われわれは、技術的生産函数の推定に当っては、ダグラス型の函数を、ミクロのそれと見做してパラメターの推定を行うことが必要となり、従って当然資料もそれに適当なミクロのものでなければならぬ。更に、ある産業をとりだし、この産業に属する企業の産出量、労働、資本の投入量の観察値に範式をあてはめてパラメターを推定しようとする場合、先記したように、かりに労働はすべて同質と見做しても、使用された資本には種々の差が見られるから、しかも、これら種々の資本を単一の資本にまとめてしまおうとすれば、aggregation の問題がそこに含まれて厄介であるから、原因変数の数を増加せしめて、それぞれのパラメターを推定する外に道はないと考えられる。更にこの個々のパラメターはそのままでは、総労働乃至総資本の相対的分け前を示す数値とはどうしても考えられないから、このパラメターの推定値により、直ちに完全競争の存在乃至賃銀支払分の限界生産力説による検討というダグラス本来の意図からはなれることになろう。従ってダグラスの如き特有の postulate をおかずに、指数の推定を行うことが必要となる。このような手続きにより求められた例として、G. Tintner の例[30]がある。これによればサムプルとして、Iowa 州に於ける 609個の農場がとられ、結果変数X、原因変数として、(A)、(B)、C、D、E、Fの6つがとられ、それぞれ次ぎの如きものである。推定方法はダグラスの場合と同様最小自乗法である。

X　: gross profit

(A)：農場のエーカー数

(B)：労働月総数

C ：農場改良費

D ：流動資産

E ：運転資産

F ：装備修繕費その他

そして推定結果は次表の通りである。

回　帰　係　数

	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ξ'	$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon'+\xi'$
農場の型	A	B	C	D	E	F	
牧牛	0.276	−0.025	0.097	0.517	−0.081	0.004	0.788
穀物	0.586	−0.062	0.045	0.095	−0.097	0.203	0.770
酪農	−0.131	0.469	0.092	0.197	0.249	0.254	1.130
豚	0.278	0.233	0.041	0.168	−0.003	0.183	0.900
統計 A	0.288	0.158	0.054	0.212	−0.005	0.159	0.866
統計 B	0.287	0.156	0.053	0.211	—	0.158	0.867
統計 C	0.299	0.256	0.062	0.200	1.025	0.158	1,000

上述の原因変数に於て（ ）を付した原因変数は物量的単位で、それ以外のものは貨幣価値額ではかられ、農場の型に

ついては例えば酪乳については 609農場について酪乳農家のみをとりだして推定したものであり、総計Aはすべての609農場全部について推定を行ったもので、総計Bはうち原因変数としてEをおとして推定を行った場合であり、総計Cは指数の和 $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \xi' = 1$ としばって推定した結果を示す。Tintner 自身述べているように、(31) 以上の推定結果から、規模に関する収穫の法則 (laws of returus to scale) について断定的なことはいえないのであるが、一応これを別にすれば、㈠ 各原因変数(A)、(B)、C、D、E、Fの夫々の指数はいずれも1より小であり、従って、以上の原因変数のすべてについて、限界収穫逓減の傾向が見られること。㈡ 酪農を除くすべての型の農場に於て、指数の和は1よりも小さく、従って decreasing returns to scale の支配する傾向が見られ、更に酪農を含めても、constant returus to scale の傾向は一切見られないことが注目される。勿論農場しかも Tintner によれば上述の 609 農場は、Iowa 州の better farms に属することもいわれており、しかも、農業の生産函数は、製造工業のそれとも異る特有の型のものであることも決して忘れているわけではない。更にこの一つの適用例を以て云々することはあまりにも一足飛びの結論におちいる危険の極めて大きいことも忘れているわけではない。しかし、少くともダグラスの場合と異なり、指数の和が1よりも小さいとのかなりはっきりした推定結果のえられていることが、ダグラス自身の推定結果に対して特に注目される。少くとも、この適用例に於ては、そのあてはめの資料に於て、その函数型について、ダグラスの場合における程の無理は見られないことは事実である。以上はダグラス生産函数の超越的批判に属する。

(1) M. Bronfenbrenner and P. H. Douglas "Cross-section Studies in the Cobb-Douglas Function," The Journal of Political Economy. December, 1939. pp. 761—762 その外のダグラスの論文に於て、強調されている所である。

(2) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function for Australian Manufacturing," Quarterly Journal of Economis., Nov, 1941, p. 108.

(3) P. H. Douglas, "The Theory of Wages" 1957. pp. 53—56.

(4) P. H. Douglas," Are There Laws of Production?" American Economic Review, March, 1948. p.37.

(5) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 14—21.

(6) M. Bronfenbrenner and P. H. Douglas, op. cit. pp. 762—765.

(7) (二)項のハイまでの議論は Shou Shau Pu, "A note on Macroeconomics," Econometrica, Vol.14, October, 1946, pp. 299—302 に従う。

(8) L. R. Klein "Remarks on the Theory of Aggregation," Econometrica, vol.14. pp. 304—305.

(9) K. May, "The Aggregation Problem in a One-Industry Model," Econometrica, vol. 14. p. 298.

(10) Shou Shau Pu op. cit. p. 302.

(11) このことを特に考慮して、パラメターの推定を行った例として、V. N. Murti and V. K. Sastry, "Production Functions For Indian Jndustry." Econometrica, vol. 25, April, 1957 があげられる。

(12) M. W. Reder, "Alternative Theories of Labor's Share," in the "The Allocation of Economic Resources," edited by M. Abramovitz, p. 200.

(13) D. Durand, "Some Thoughts on Marginal Productivity, with Special Reference to Prof. Douglas'

Analysis." The Journal of Political Economy, vol. 45, 1937. pp. 754—755.

(14) スペースの都合上、推定結果は示さぬが、詳細は P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" pp. 13—20, pp. 37—41.

(15) P. Daly, E. Olson and P. H. Douglas, "The Production Function for Manufacturing in the United States, 1904", Journal of Political Economy, vol. 51. 1943. pp. 61—65.

(16) P. Daly, E. Olson and P. H. Douglas. op. cit. pp. 61—62.

(17) P. H. Douglas, "Are There Laws of Production?" p. 39. 尚この外、クロスセクション分析についての諸論文について散見される所である。

(18) G. T. Gunu and P. H. Douglas, "Further Measurements of Margnial Productivity," Quarterly Journal of Economics, vol. 54. 1940. pp. 399—428.

(19) G. T. Gunu and P. H. Douglas, "The Production Function For Anstralian Manufactwring," p. 126.

(20) G. T. Gunu and P. H. Douglas, "Further Measurements of Marginal Productivity," p. 401.

(21) G. T.Gunu and P. H. Douglas, "Further Measurements of Marginal Productivity," pp.423—428.

(22) P. H. Douglas. "Are There Laws of Production?" pp. 31—33.

(23) H. Mendershausen, "Rejoinder", American Economic Reirew, vol. 31. 1941. pp. 567—568.

(24) E. H. Phelps Brown, "The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Function," Quarterly Journal of Economics, vol. 71. 1957. pp. 559—560.

(25) J. Marschak and W. H. Andrews Jr. ,,Random Simultaneons Equations and the Theory of Production," Econometrica, vol. 12. July-October, 1944. p. 174.

(26) このことは、ダグラス等の論文に於て常にいわれている所であり、特に M. Brofenbrenner and P. H. Douglas, op. cit. 参照。外に例えば、R. M. Solow, "Technical Change and Aggregate Production Fuuction" Reirew of Economics and Statistics, vol. 39. 1957. p.314 にも資本資料のもつ難点について触れられている。

(27) M. Bronfenbrenner and P. H. Douglas, op. cit. pp.784—785.

(28) G. T. Gunn and P. H. Douglas, "The Production Function For Australian Manufacturing." pp.115—116.

(29) この推定方法のもつ難点についての説明は、H. Mendershausen, "On the Significance of Prof Douglas Production Function." Econometrica, April, 1938 につきると思われる。侚家本秀太郎教授「Douglas 生産函数を育成する立場から」「理論経済学」一九五一年一月号（東洋経済新報社）二四頁—二五頁。拙稿「ダグラス生産函数の問題」「経営と経済」（長崎大学経済学部機関紙）第三十九年第三冊、一六一頁—一七二頁参照。

(30) G. Tintner, "A Note on the Derivation of Production Functions from Farm Records," Econometrica, vol. 12. 1944. pp. 26—34.

(31) G. Tintner, op. cit. pp. 32—33.

(1962.7.31)