Title	消費者需要の測定：最大エントロピー・モーメント行列の応用
Author(s)	細内, 勇
Citation	経営と経済, 62(3), pp.29-43; 1982
Issue Date	1982-12-25
URL	http://hdl.handle.net/10069/28170
Right	

消費者需要の測定：最大エントロピー・モーメント行列の応用*)

細　内　　　勇

1. 序

消費者需要関数を測定する代表的なものには，1) 効用関数を特定化するか，或いは一般的な効用関数から出発しその近似式を考えるかした後，その効用関数を所得制約式の下で極大にして測定すべき需要関数を導き出す，線型支出体系 (Linear Expenditure System) やトランス・ログ (Trans log) 需要関数と 2) 一般的な需要関数から出発し，その一次の近似式を考え，条件付効用極大の一次の条件から導き出された Barten の基本行列式 (Fundamental Matrix Equation) を用いて，測定すべき需要関数を特定化する，ロッテルダム・モデル (Rotterdam Model) の方法がある。線型支出体系については，Stone, Deaton, Parks, Goldberger and Gama-letsos 等により，又トランス・ログ需要関数については，Christensen, Jorgenson and Lau 等により計測されている，一方ロッテルダム・モデルについても，Barten, Deaton, Theil 等により計測されている。

計量経済モデルの説明変数の数よりも標本数が少いときには，モーメント行列は特異行列となる。これは大規模モデルを同時方程式推定法でもって推定する場合に，しばしば遭遇する問題である。Theil and Laitinen (1980) は，このような問題を解決する一つの方法として，母集団のモーメント行列を推定するのに，標本モーメント行列 (Sample Moment Matrix) の代りに最大エントロピー・モーメント行列 (Maximum Entropy Moment Matrix) を用いることを提案した。最大エントロピー・モーメント行列は，０次及び１次の標本モーメント行列と最大エントロピー・モーメント行列とが同じになるような条件の下で，エントロピーを最大にするような連続な分

布関数を求め，その分布関数の2次のモーメント行列を最大エントロピー・モーメント行列とするものである。

エントロピーは，不確実性を示す尺度として用いられるが，同様にエントロピーは散らばりの程度を示す尺度としても考えられる[1)]。従って，ある一定の条件の下にエントロピーを最大にすることは，一定の条件の下に標本間にある関数関係が生じないようと意図することである。

消費者需要の全体系を計測する際には，推定する需要関数に，個々の財或いはサービスの需要量を説明する変数として，消費支出額と当該財の価格の他に,その他の財の価格を考慮するのが一般的である。その時に,これら諸財の価格間に多重共線の問題が生じる可能性がある。多重共線関係が存在する場合には，モーメント行列が特異行列となる。特異行列を非特異行列に変える方法の一つとして Ridge 回帰の方法がある。 Ridge 回帰はモーメント行列の対角要素上にある一定の数を加えることにより，常に非特異な行列を作ろうとする。同様に，最大エントロピー・モーメント行列は，モーメント行列の対角要素からある一定の数を差し引くことによって，常に非特異な行列を作り出そうとするものである[2)]。この際，非対角線上の要素は通常の最大エントロピー・モーメント行列を求める際の共分散行列の計算方法による。従って，最大エントロピー・モーメント行列は説明変数間にある一定の関数関係が存在するのを直す方法としても有効である。

次節では，ロッテルダム・モデルにより，日本の消費支出を最大エントロピー・モーメント行列を用いて計測し，標本モーメント行列で求めた結果と比較する。

2. 消費者需要の測定

ロッテルダム・モデル（絶対価格の場合）は次の需要関数によって測定さ

---

*) この論文の中の計算には長崎大学情報処理センターの FACOM M-180ⅡAD を利用した

1) Theil (1975) p. 79

2) Theil (1980)

れる[3)]。

$$\bar{w}_{it}\ Dq_{it} = \mu_i Dq_t + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} Dp_{jt} + \varepsilon_{it} \quad i = 1 \cdots n$$

但し，$\bar{w}_{it} = \dfrac{w_{it} + w_{it-1}}{2}$

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{y_t}$$

p_{it} ＝第 i 財の価格

q_{it} ＝第 i 財の数量

y_t ＝全体の消費支出額

$$Dq_{it} = \log \frac{q_{it}}{q_{it-1}}$$

$$Dq_t = \sum_{i=1}^{n} Dq_{it}$$

$$Dp_{jt} = \log \frac{p_{jt}}{p_{jt-1}}$$

μ_i 及び k_{ij} は推定すべきパラメーター，ε_{it} は攪乱項である。n は消費財の数を表わす。

なお，この式の導出の際，μ_i 及び k_{ij} については次の関係が成り立つ。

$$\mu_i = p_i \frac{\partial q_i}{\partial y}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{y} p_i p_j s_{ij}$$

$$s_{ij} = \left. \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right|_{y_i = 一定}$$

従って，所得（支出）弾力性は $\dfrac{\mu_i}{w_i} = m_i$ により，又（補償された）自己及び交叉価格弾力性は $\dfrac{k_{ij}}{w_i} = \pi_{ij}$ によって与えられる。μ_i は第 i 財に対する限界支出性向であり，通常の（補償されない）自己及び交叉価格弾力性

3）　ロッテルダム・モデルの導出については例えば，Theil（1975）を参照せよ。

は$\pi_{ij}-\mu_i$　$i=1\cdots n$ によって与えられる。なお，一般に消費者需要体系を推定する際に，効用関数の条件付極大から導出された需要関数に付随して生ずる次の制約がある。

(1) 加算制約 (Adding-up Restriction)

a) Engel 集計性 (Engel Aggregation) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i=0$

b) Cournot 集計性 (Cournot Aggregation) $\sum_{i=1}^{n} k_{ij}=0$

(2) 0次同次性 (Homogeneity of degee zero) $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}=0$

(3) 対称性 (Symmetry)

$$k_{ij}=k_{ji} \quad \text{for all } i,j$$

(4) 負値半定符号行列 (Negative Semi-Definite) k_{ij} を要素とする行列Kは階数$n-1$の負値半定符号行列である。すなわち

$$a'Ka\leq 0 \qquad \text{for all } a$$

そして，行列Kの対角要素 k_{ii} はすべて負である。

このうち，(1)から(3)までの制約を課した次の2つの場合について測定をおこなった。

1) 同次性の制約の場合：(1)と(2)の制約

2) 同次性及び対称性の制約の場合：(1)，(2)，(3)の制約

ここで，1) の場合は最小二乗法で推定した。この場合の最小二乗推定量は最尤推定量に等しい[4]。2) の場合は制約付の Zellner の Seemingly Unrelated Equation の推定法で推定した[5]。

4) Dtaton (1977) p. 351
なお，推定するに際して，独立変数のうちの価格の変数に関して $Dp_{it}-Dp_{9t}$ $j=1\cdots 8$ に変換して8個の価格変数と1個の所得変数の9個の独立変数でもって推定を行った。
この件に関しては Theil (1975) p. 190 を参照せよ。その場合の9番目の価格変数のパラメーターの値及び標準偏差の値の計算の仕方については，Theil (1975) p. 198－199を参照せよ。

5) Byron (1970)

推定した支出費目は次の9費目である。

1）食料費　2）住居費　3）光熱・水道費　4）家具・家事用品費　5）被服及び履物費　6）保険・医療費　7）交通・通信費　8）教育及び教養・娯楽費　9）その他の消費支出。このうちその他の消費支出には理・美容サービス，タバコ代，交際費等が含まれる。名目額のデータは，総理府統計局発行の『家計調査年報』の10大分類費目のうちの教育費と教養・娯楽費を一つにまとめた，9大分類費目を用いた[6)]。価格のデータは総理府統計局発行の『消費者物価指数年報』より得た。実質額のデータは名目額のデータを価格のデータで割算をして得た。データの期間は昭和38年から昭和56年の年系列の19年であるが，ロッテルダム・モデルでは一次階差をとった形になっているので推定に用いた標本数は18個である。

表1には，1)，同次性の制約のある場合，2)，同次性及び対称性の制約のある場合，の各々に最大エントロピー・モーメント行列を用いて推定した結果の所得弾力性，（補償された）自己価格弾力性及び通常の（補償されない）自己価格弾力性を示した。又表2には，これら2つの場合を，標本モーメント行列を用いて推定した結果の所得弾力性及び自己価格弾力性を示した。下級財でない限り所得弾力性は正の符号を示すはずであり，又（補償された）自己価格弾力性は常に負でなければならない。最大エントロピー・モーメント行列を使用した場合は，すべて正しい符号条件（正の所得弾力性及び負の（補償された）自己価格弾力性）が得られている。標本モーメント行列を使用した場合には，同次性の制約のある場合の光熱・水道費の所得弾力性，そして同次性及び対称性の制約のある場合の住居費と家具・家事用品の（補償された）自己価格弾力性が，各々符号が逆となっている。なお最大エントロピー・モーメント行列により推定された所得弾力性より，家具・家事用品，保険・医療，教育及び教養・娯楽そしてその他の消費財は，所得に

6）消費費目は8の教育費と教養・娯楽費を区別した10大費目で公表されているが，10大費目で推定した場合には教育費の所得弾力性が最大エントロピー・モーメント行列を用いた場合でも負の符号となった。従って，教育費と教養・娯楽費とを一つにまとめた9大費目でもって推定を行った。

表1　最大エントロピー・モーメント行列を用いて推定したロッテルダム・モデルの所得弾力性と自己価格弾力性

	1. 同次性の制約のある場合			2. 同次性及び対称性の制約のある場合			平均のシェアー
	所得弾力性	(補償された)自己価格弾力性	(補償されない)自己価格弾力性	所得弾力性	(補償された)自己価格弾力性	(補償されない)自己価格弾力性	
1. 食料費	0.3944	−0.3878	−0.5127	0.4899	−0.2809	−0.4361	31.682%
2. 住居費	1.2922	−0.3058	−0.3708	0.4819	−0.0241	−0.0483	5.030%
3. 光熱・水道費	0.1371	−0.1525	−0.1587	0.8199	−0.2891	−0.3259	4.486%
4. 家具・家事用品費	1.0295	−0.7184	−0.7694	1.3999	−0.0972	−0.1665	4.951%
5. 被服及び履物費	0.8431	−0.2341	−0.3113	0.8229	−0.5433	−0.6186	9.154%
6. 保険・医療費	1.1348	−0.9084	−0.9365	1.3339	−0.9479	−0.9809	2.477%
7. 交通・通信費	0.8577	−0.4541	−0.5055	2.2593	−0.3974	−0.5329	5.996%
8. 教育及び教養・娯楽費	1.0174	−0.3936	−0.5098	1.0208	−0.2522	−0.3688	11.422%
9. その他	2.0966	−0.8630	−1.3830	1.4274	−0.9487	−1.3027	24.802%

表２　標本モーメント行列を用いて推定したロッテルダム・モデルの所得弾力性と自己価格弾力性

	1. 同次性の制約のある場合			2. 同次性及び対称性の制約のある場合			平均のシェアー
	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性	
1. 食料品	0.4757	−0.4612	−0.6119	0.4076	−0.2433	−0.3724	31.682%
2. 住居費	1.6280	−0.3378	−0.4197	0.1470	0.1821	0.1722	5.030%
3. 光熱・水道費	−0.0450	−0.0709	−0.0689	0.8865	−0.1964	−0.2362	4.486%
4. 家具・家事用品費	1.5560	−0.1925	−0.2695	1.6554	0.1594	0.0774	4.951%
5. 被服及び履物費	0.9919	−0.2018	−0.2926	0.7989	−0.5649	−0.6380	9.154%
6. 保険・医療費	1.6072	−0.8866	−0.9264	1.3952	−0.8857	−0.9203	2.477%
7. 交通・通信費	0.8517	−0.3019	−0.3530	2.1453	−0.3732	−0.5018	5.996%
8. 教育及び教養・娯楽費	1.2388	−0.6016	−0.7431	1.1459	−0.3659	−0.4968	11.422%
9. その他	1.8615	−0.6424	−1.1041	1.4999	−0.8419	−1.2139	24.802%

関して弾力的であり奢侈品に属し，又食料，光熱・水道そして被服及び履物は，所得に関して非弾力的であり生活必需品に属していることが得られる。なお，住居（内訳は家賃・地代費そして設備修繕・維持費）は同次性の制約のもとでは所得に関して弾力的であるが，同次性及び対称性の制約のもとでは所得に関して非弾力的になっている。又，交通・通信（内訳は交通費・自動車及び自転車の購入・維持整備費，通信費そして電話代）は同次性の制約のもとでは所得に関して非弾力的であるが，同次性及び対称性の制約のもとでは所得に関して弾力的となっている。通常の（補償されない）自己価格弾力性では，比較的弾力性の値の小さいのは住居，光熱・水道，被服及び履物であり，弾力性の高いものは保険・医療，その他（理美容費・身の回り用品，たばこ代，交際費）である。家具・家事用品費は同次性の制約のある場合は価格に関して非弾力的であるが割合に高い値を示している。しかし同次性及び対称性の制約のある場合にはその値は小さい。

表3及び表4には，同次性及び対称性の制約の下で，最大エントロピー・モーメント行列を用いた場合と標本モーメント行列を用いた場合の各々に得られたパラメーターの値が示されている。パラメーターの下の括弧の中の値はパラメーターの標準偏差である。又 R_z の値は McElroy（1977）による Seemingly Unrelated Equation の場合の，その他の消費支出を除く最初の8大費目システム全体としてのR^2の値である。最大エントロピー・モーメント行列と標本モーメント行列との間で，符号条件の異なるパラメーターの数は全部で5個ある（対称性を考慮しなければ8個ある）。なお，対称性のF検定統計量 F_8 の値は，各々 4.209 と 4.072 で共に対称性の仮定は棄却されている。又 k_{ij}, $i=1\cdots n-1$，$j=1\cdots n-1$ を要素とする階数$n-1$の行列をKとすると，その行列の固有ベクトルの $(n-1)\times(n-1)$ の行列Pと固有値 $\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}$ をその対角要素にもつ $(n-1)\times(n-1)$ の対角行列$\wedge$とによって $K=P\wedge P'$ と表現され得る。Kが負値半定符号であるためには，すべての固有値λ_i $i=1\cdots n-1$ の値が負或いはゼロでなければならない[7)]。表3の価格のパラメーターのうちの最初の8×8の行列に対

7) Barter and Geyskens (1975) p. 234

表3　最大エントロピー・モーメント行列を用いて推定した場合のパラメーターの値
（同次性及び対称性の制約のある場合）

	μ_1	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}
1. 食料品	0.15521 (0.01766)	−0.08899 (0.02420)	0.02868 (0.01142)	0.02576 (0.00675)	−0.01365 (0.00793)	0.01084 (0.01013)	0.00387 (0.00549)	−0.01753 (0.01237)	0.01116 (0.01700)	0.03986 (0.01759)
2. 住居費	0.02424 (0.01000)	0.02868 (0.01142)	−0.00423 (0.01417)	−0.00400 (0.00428)	−0.00487 (0.00583)	−0.00841 (0.00635)	−0.00029 (0.00385)	−0.00091 (0.00636)	−0.00560 (0.01272)	−0.00037 (0.00820)
3. 光熱・水道費	0.03678 (0.00694)	0.02576 (0.00675)	−0.00400 (0.00428)	−0.01297 (0.00370)	−0.01349 (0.00265)	−0.01252 (0.00405)	−0.00614 (0.00216)	0.00113 (0.00504)	0.01486 (0.00605)	0.00737 (0.00698)
4. 家具・家事用品費	0.06931 (0.00767)	−0.01365 (0.00793)	−0.00487 (0.00583)	−0.01349 (0.00265)	−0.00481 (0.00443)	0.02427 (0.00401)	−0.00270 (0.00235)	0.00573 (0.00467)	−0.02141 (0.00739)	0.03093 (0.00783)
5. 被服及び履物費	0.07533 (0.00994)	0.01084 (0.01013)	−0.00841 (0.00635)	−0.01252 (0.00405)	0.02427 (0.00401)	−0.04973 (0.00805)	0.00523 (0.00315)	−0.00419 (0.00697)	−0.00221 (0.00933)	0.03672 (0.00997)
6. 保険・医療費	0.03304 (0.00506)	0.00387 (0.00549)	−0.00029 (0.00385)	−0.00614 (0.00216)	−0.00270 (0.00235)	0.00523 (0.00315)	−0.02348 (0.00242)	−0.00776 (0.00356)	0.00022 (0.00535)	0.03105 (0.00504)
7. 交通・通信費	0.13547 (0.14820)	−0.01753 (0.01237)	−0.00091 (0.00636)	0.00113 (0.00504)	0.00573 (0.00467)	−0.00419 (0.00697)	−0.00776 (0.00356)	−0.02383 (0.01294)	−0.00530 (0.01031)	0.05266 (0.01523)
8. 教育及び教養・娯楽費	0.11660 (0.01316)	0.01116 (0.01700)	−0.00560 (0.01272)	0.01486 (0.00605)	−0.02141 (0.00739)	−0.00221 (0.00933)	0.00022 (0.00535)	−0.00530 (0.01031)	−0.02081 (0.02151)	0.03709 (0.01313)
9. その他	0.35402 (0.02705)	0.03986 (0.01759)	−0.00037 (0.00820)	0.00737 (0.00698)	0.03093 (0.00783)	0.03672 (0.00997)	0.03105 (0.00504)	0.05266 (0.01523)	0.03709 (0.01313)	−0.23531 (0.03347)

$R_z = 0.824$　　　$F_s = 4.209$

表 4　標本モーメント行列を用いて推定した場合のパラメーターの値
（同次性及び対称性の制約のある場合）

	μ_1	k_{i1}	k_{i2}	k_{i3}	k_{i4}	k_{i5}	k_{i6}	k_{i7}	k_{i8}	k_{i9}
1. 食料品	0.12914 (0.01395)	−0.07708 (0.02108)	0.04071 (0.01073)	0.02117 (0.00577)	−0.02882 (0.00697)	0.01942 (0.00832)	0.00426 (0.00478)	−0.01361 (0.01073)	0.01210 (0.01655)	0.02185 (0.01239)
2. 住居費	0.00991 (0.00808)	0.04071 (0.01073)	0.00916 (0.01276)	−0.00443 (0.00367)	−0.01696 (0.00490)	−0.00689 (0.00505)	−0.00009 (0.00338)	0.00157 (0.00544)	−0.01257 (0.01257)	−0.01050 (0.00704)
3. 光熱・水道費	0.03977 (0.00596)	0.02117 (0.00577)	−0.00443 (0.00367)	−0.00881 (0.00315)	−0.01334 (0.00216)	−0.01225 (0.00349)	−0.00600 (0.00183)	−0.00283 (0.00434)	0.01798 (0.00555)	0.00851 (0.00567)
4. 家具・家事用品費	0.08196 (0.00531)	−0.02882 (0.00697)	−0.01696 (0.00490)	−0.01334 (0.00216)	0.00789 (0.00329)	0.02369 (0.00306)	0.00006 (0.00187)	0.00483 (0.00364)	−0.01199 (0.00700)	0.03464 (0.00526)
5. 被服及び履物費	0.07313 (0.00900)	0.01942 (0.00832)	−0.00689 (0.00505)	−0.01225 (0.00349)	0.02369 (0.00306)	−0.05144 (0.00665)	0.00173 (0.00256)	−0.00375 (0.00607)	−0.00360 (0.00799)	0.03309 (0.00784)
6. 保険・医療費	0.03456 (0.00389)	0.00426 (0.00478)	−0.00009 (0.00338)	−0.00600 (0.00183)	0.00006 (0.00187)	0.00173 (0.00256)	−0.02194 (0.00209)	−0.00829 (0.00312)	0.00166 (0.00498)	0.02861 (0.00381)
7. 交通・通信費	0.12863 (0.01235)	−0.01361 (0.01073)	0.00157 (0.00544)	−0.00283 (0.00434)	0.00483 (0.00364)	−0.00375 (0.00607)	−0.00829 (0.00312)	−0.02238 (0.01073)	−0.00497 (0.00928)	0.04943 (0.01011)
8. 教育及び教養・娯楽費	0.13089 (0.01121)	0.01210 (0.01665)	−0.01257 (0.01257)	0.01798 (0.00555)	−0.01199 (0.00700)	−0.00360 (0.00799)	0.00166 (0.00498)	−0.00497 (0.00928)	−0.04179 (0.02118)	0.04318 (0.01120)
9. その他	0.37201 (0.01571)	0.02185 (0.01239)	−0.01050 (0.00704)	0.00851 (0.00567)	0.03464 (0.00526)	0.03309 (0.00784)	0.02861 (0.00381)	0.04943 (0.01011)	0.04318 (0.01120)	−0.20881 (0.01818)

$R_z = 0.855$　　　$F_s = 4.072$

表5　定数項を含めて推定したロッテルダム・モデルの所得弾力性と自己価格弾力性
（最大エントロピー・モーメント行列を用いた場合）

	1. 同次性の制約のある場合			2. 同次性及び対称性の制約のある場合		
	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性
1. 食料品	0.5091	−0.2549	−0.4162	0.6843	−0.3209	−0.5377
2. 住居費	1.2207	−0.5205	−0.5819	0.6503	−0.0521	−0.0848
3. 光熱・水道費	0.0022	−0.2546	−0.2546	0.2940	−0.3402	−0.3534
4. 家具・家事用品費	1.1517	−0.9756	−1.0326	1.7128	−0.1630	−0.2478
5. 被服及び履物費	0.9837	−0.3190	−0.4091	1.1981	−0.5829	−0.6926
6. 保険・医療費	1.3569	−1.1312	−1.1648	1.8506	−1.0202	−1.0660
7. 交通・通信費	0.6212	−0.3085	−0.3458	1.4907	−0.2673	−0.3567
8. 教育及び教養・娯楽費	1.0425	−0.3977	−0.5168	1.0608	−0.2752	−0.3964
9. その他	2.2566	−0.5295	−1.0892	1.1519	−1.0208	−1.3072

表6　定数項を含めて推定したロッテルダム・モデルの所得弾力性と自己価格弾力性
（標本モーメント行列を用いた場合）

	1. 同次性の制約のある場合			2. 同次性及び対称性の制約のある場合		
	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性	所得弾力性	（補償された）自己価格弾力性	（補償されない）自己価格弾力性
1. 食料費	0.5151	−0.2651	−0.4283	0.4527	−0.1683	−0.3117
2. 住居費	1.5918	−0.5905	−0.6706	1.1505	0.5569	0.5556
3. 光熱・水道費	−0.1023	−0.1547	−0.1501	0.4980	−0.2236	−0.2459
4. 家具・家事用品費	1.5488	−0.1569	−0.2336	2.0368	0.3656	0.2648
5. 被服及び履物費	1.0542	−0.3473	−0.4438	1.2694	−0.5768	−0.6930
6. 保険・医療費	1.6694	−1.0230	−1.0644	1.9649	−0.9229	−0.9716
7. 交通・通信費	0.6975	−0.1259	−0.1677	1.4648	−0.3159	−0.4037
8. 教育及び教養・娯楽費	1.2396	−0.6025	−0.7441	1.3060	−0.2542	−0.4034
9. その他	2.5668	−0.8139	−1.4506	1.3315	−0.9123	−1.2426

応する固有値は $\lambda_1=-0.1134$，$\lambda_2=-0.0607$，$\lambda_3=-0.0406$，$\lambda_4=0.0351$，$\lambda_5=-0.0322$，$\lambda_6=-0.0187$，$\lambda_7=-0.0100$，$\lambda_8=0.0041$ であり，従って，負値半定符号の条件は満たされてはいない。標本モーメント行列の場合の表4のパラメーターのうちの最初の8×8の行列に対応する固有値の計算は $\lambda_1=-0.1150$ だけ計算されたが残りの固有値は得られなかった。

表5と表6には，定数項を含めて推定したパラメーターから得られた所得弾力性と自己価格弾力性を，最大エントロピー・モーメント行列を用いた場合と標本モーメント行列を用いた場合の各々について示してある。両方の場合とも，定数項を入れても符号条件に変化はない。すなわち，定数項を含んだ場合でも，最大エントロピー・モーメント行列の場合は正しい符号条件を示しているが，標本モーメント行列の場合には，同次性の制約のある場合の光熱・水道費の所得弾力性，そして，同次性及び対称性の制約のある場合の住居費と家具・家事用品費の（補償された）自己価格弾力性の符号は逆となっている。

3. むすび

母集団のモーメント行列を推定するのに，標本モーメント行列の代りに，最大エントロピー・モーメント行列を用いて常に非特異なモーメント行列を作り出すことができる。最大エントロピー・モーメント行列を使って消費者需要を測定した結果，標本モーメント行列を用いた場合よりも良好な結果を得た。

標本モーメント行列を使って推定した所得弾力性或いは自己価格弾力性の値の一部は，符号条件が逆となった。一方，最大エントロピー・モーメント行列を使って推定した所得弾力性及び自己価格弾力性の値は，正しい符号条件を示しており，又かなり納得のいく数値を示している。

Appendix　最大エントロピー・モーメント行列の計算[8)]

2変量の結合エントロピーは次式によって与えられる。

$$H=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log f(x, y)\,dxdy$$

8）詳しくは Theil and Laitinen (1980) を参照せよ。

但し，f（x，y）は確率変数 x，y の同時密度関数である。

最大エントロピー・モーメント行列を求めるには，エントロピーHを次の二つの条件の下で最大にする。

1）母集団の区間の大きさと最大エントロピーで求めた区間の大きさが変わらないようにする（0次のモーメントの条件）。

$$\int_{I_i} f(x)dx = \frac{1}{n} \qquad i = 1 \cdots n$$

但し，I_i は最大エントロピー・モーメントで求めた区間。

2）母集団の平均と最大エントロピー・モーメントで求めた平均とが等しくなる（一次のモーメントの条件）。

このようにして求められた条件付最大エントロピー・モーメント行列を計算するには，次の手順による。

1．標本値 x_1，$x_2 \cdots x_n$ を大きさの順に並びかえ，$x^1 < x^2 < \cdots < x^n$ となるような順序統計量を作成する。

2．モーメント行列の分散は次の式によって計算する。

$$(1)\quad 分散（x）= 標本分散 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{n-1} (x^{i+1} - x^i)^2$$

$$- \frac{1}{24n} \sum_{i=2}^{n-1} (x^{i+1} - x^{i-1})^2$$

3.共分散は次の式によって計算する。

$$(2)\quad 共分散(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k^* - \overline{x})(y_k^* - \overline{y})$$

$$(3)\qquad x_k^* = E(x \mid x \in I_i) \qquad \text{if } x_i = x_k$$

$$(4)\qquad E(x \mid x \in I_i) = \frac{3}{4} x^1 + \frac{1}{4} x^2 \quad \text{if } i = 1$$

$$= \frac{1}{4} x^{i-1} + \frac{1}{2} x^i + \frac{1}{4} x^{i+1} \quad \text{if } i = 2 \cdots n-1$$

$$= \frac{1}{4} x^{n-1} + \frac{3}{4} x^n \quad \text{if } i = n$$

すなわち，順序統計量で計算した(4)式のn個の値を，元の標本の大きさの順序に直して，そして共分散項の値を(2)式でもって計算する。

参考文献

1. Barten, A P. and E. Geyskens (1975), "The Negativity Condition in Consumer Demand," European Economic Review 6, 227−260
2. Byron, R. P. (1970), "The Restricted Aitken Estimation of Sets of Demand Relations," Econometrica 38, 816−830
3. Deaton, A. S. (1974), "The Analysis of Consnmer Demand in the United Kingdam 1900−1970," Econometrica 42, 341−368
4. Haque, N. ul and J. F. Meisner (1980), "The Expected Ridge and Shrinkage of the Maximum Entropy Variance under Normality," Economic Letters 5, 241−244
5. McElroy, M. B. (1977) "Goodntss of Fit for Seemingly Unrelated Regressions：Glahn's $R^2_{Y.X}$, and Hooper's $\overline{r}^2$," Journal of Econometrics 6. 381−388
6. Meisner, J. F. (1980), "Maximum Entropy Regressions," Economic Letters 5, 251−256
7. Phlips, L. (1974), Applied Consumption Analysis (Nortn-Holland, Amsterdan)
8. Theil, H. (1975), Theory and Measurement of Consumer Demand vol, 1 (Nortn-Holland, Amsterdan)
9. ——— (1980), "A Sinple Form of the Maximun Entropy Moment Matrix and It's Inverse," Economic Letters 5, 53−58
10. ——— and K. Laitinen (1980), "Singnlar Momement Matrices in Applied Econometrics," in P. R. Krishnaiah ed., Multivariate Analysis V (Nortn-Holldnd, Anstercam), 629−649
11. 総理府統計局編，消費者物価指数年報：昭和56年版
12. ———，昭和38年−55年の家計−新収支項目分類による遡及結果−
13. ———，家計調査報告：昭和56年12月分