Title	微分不可能なベクトル値目的関数をもつ多目的計画問題について
Author(s)	前田, 隆
Citation	経営と経済, 62(3), pp.45-68; 1982
Issue Date	1982-12-25
URL	http://hdl.handle.net/10069/28171
Right	

微分不可能なベクトル値目的関数をもつ多目的計画問題について

前　田　　　隆

目　　次

は　じ　め　に

ある与えられた制約の下で，複数の目的を同時に最大化または最小化（以下，総称して最適化という）することを目指すという状況は，企業の行動や政府の経済政策など現実の経済社会において，よく見受けられる。例えば，企業は，予算，技術および資源等の制約の下で，利潤，売り上げおよび品質等の目的が最適になるように生産計画をたてると考えられる。オペレーションズ・リサーチ（operations research；以下，ＯＲと略記する）の観点から，このような状況を意思決定問題としてとらえ，これに基づいて，問題の定式化を行なう方法は，次のように大別されるであろう。

(1)　複数の目的の中から，最も重要と考えられるものを一つだけ選び出し，他を制約条件の中に組み込むことによって，原問題を制約条件の下で，一つのスカラー値目的関数を最適化する問題として定式化する方法。

(2)　各目的の加重和を新たな目的と考えることによって，原問題を制約条件の下で，この加重和目的関数を最適化する問題（以下，スカラー化問題と

いう）として定式化する方法。

(3) 各目的が一つのベクトルの成分を構成するものと考えることによって，原問題を制約条件の下で，ベクトル値目的関数を最適化する問題として定式化する方法。

(1), (2)は，いずれも原問題を数理計画問題として定式化する方法であり，(3)は，原問題を多目的計画問題（multiobjective programming problem）として定式化する方法である。

多目的計画問題においては，最適化される目的がベクトル値関数であることから，ベクトルの大小関係を通じて，実行可能領域に半順序関係が惹起されるので，スカラー値目的関数をもつ数理計画問題のような最適解，すなわちすべての目的を最適にするような実行可能解は，一般に存在しない。しかしながら，意思決定問題の観点からすると，半順序関係の下で，どの実行可能解よりも劣っていない実行可能解，すなわち非劣解を求めることは，一つの重要な問題である。

この非劣解は，Pareto 最適解として広く知られている。Pareto 最適解は，競争的市場の均衡解だけではなく多属性効用理論と密接な関連があり，現代数理経済学における主要な概念の一つとなっている。また，ＯＲの分野では，Kuhn・Tucker［８］が，数理計画問題の観点から，多目的計画問題をベクトル最大化問題としてとらえ，Pareto 最適解の特徴付けを行なっている。その後，Zadeh [18] や Da Cunha・Polak［３］らによって，多目的計画問題とそのスカラー化問題との関係が厳密に示された。これらの理論的発展と平行して，Pareto 最適解を求めるという計算手順についても，パラメトリック法，εー制約法およびＰＥＣ法などいくつかの計算手順が考案されている。[注1] 特に，線形多目的計画問題[注2]に対して，Zeleny [19] は，Pareto 最適解の集合は，Pareto 最適な端点の凸結合によって表現されることを示し，これに基づいて，Pareto 最適な端点を求める多基準シンプレックス法

注１） 各種の計算手順の詳細については，志水清孝 [13]，p46—p55参照。

注２） 制約条件および目的関数がすべて線形関数である多目的計画問題を線形多目的計画問題，あるいは多目的線形計画問題という。

(multicriteria simplex method) を考案し，さらにそのコンピュータプログラムをも与えている。さらに最近では，大型コンピュータ，とりわけタイムシェアリングシステムの発達によって，意思決定者がコンピュータとの対話を通じて，彼の局所的な選好に基づいて，Pareto 最適解の中から意思決定者が最も選好する解，すなわち選好最適解を求める対話型計画法とよばれる Geoffrion・Dyer・Feinberg [5] のアルゴリズムが使用可能となった。

これまで，多目的計画問題においては，ベクトル値目的関数および制約関数の微分可能性（以下，微分可能性という）は，重要な役割を果していた。とりわけ，計算手順は，線形多目的問題を除いて，すべて微分可能の仮定の下で与えられていた。従って，多目的計画問題においては，その理論だけでなく，計算手順を考察する場合でも微分可能の条件がみたされない場合を分析することが望ましいことはいうまでもない。

本稿の目的は，微分不可能なベクトル値目的関数および制約関数をもつ多目的計画問題に対して，弱 Pareto 最適解を定義し，凸関数の性質（劣微分や方向微分の概念）を用いて，弱 Pareto 最適解および Pareto 最適解の必要条件や十分条件を与えることである。

そこで，第1節において，多目的計画問題の定式化を行ない，Pareto 最適解および弱 Pareto 最適解を定義する。ついで，第2節において，凸解析の理論を簡単に述べる。これは，第3節の議論を展開するうえで必要とされる数学的準備である。そして，第3節において，弱 Pareto 最適解および Pareto 最適解の必要条件および十分条件を与える。

記 号 表

R	:	実数の全体
R^n	:	n 次元ユークリッド空間
x	:	第 i 成分が x_i である n 次元ベクトル
$\lvert\cdot\rvert$	:	R のユークリッドノルム
$\lVert\cdot\rVert$	:	R^n のユークリッドノルム
$x\cdot y$	:	x と y との内積

$x \geqq y$	： $x_i \geqq y_i$, $i=1\ 2,\cdots,n$
$x \geq y$	： $x \geqq y$ かつ $x \neq y$
$x > y$	： $x_i > y_i$, $i=1,2\ \cdots,n$
Γ_o	： 問題（P）の最適解の集合
Γ_p	： 問題（P）の Pareto 最適解の集合
Γ_w	： 問題（P）の弱 Pareto 最適解の集合
$B_\varepsilon(x)$	： x を中心とする半径 $\varepsilon>0$ の開球
$\{x^n\}$	： 点列 x^1, $x^2,\cdots$
ϕ	： 空集合
$f'(z;h)$	： f の点 z における h 方向の方向微係数
$\partial f(x)$	： f の点 x における劣微分
$\nabla f(x)$	： f の点 x における勾配
$A+B$	： 集合 A, B の代数和
α, $\beta,\cdots$	： スカラー（実数）
$T(Q_0\,;z)$	： z における Q_0 の接錐
S^p	： 集合 S の極錐
$\delta^*(\cdot\|A)$	： A の支持関数
$conv\ A$	： A の凸包

第１節　多目的計画問題の定式化と解の定義

ある与えられた制約条件の下で，互いに独立で評価基準の異なる複数個の目的を同時に最適化する問題は，多目的計画問題として定式化される。g_1, g_2, …, g_m を n 次元ユークリッド空間 R^n 上で定義された実数値関数，Q_0 を空でない R^n の任意の部分集合とし，これらが制約条件を構成するものとする。目的は l（$\geqq 2$）個あるものとし，これらは，それぞれ n 次元ユークリッド空間 R^n 上で定義された実数値関数 f_1, $f_2,\cdots$, f_l によって表わされるものとする。また，これらの関数を用いて，R^n から R^l への写

像，すなわちベクトル値関数fを次式によって定義する：

$f(x)\equiv(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_l(x))$。さらに，$Q_i\equiv\{x\in R^n \mid g_i(x)\leqq 0\}$（$i=1, 2, \cdots, m$），$Q\equiv\cap_{i=0}^{m}Q_i$とおく。このとき，多目的計画問題は，形式的に次のように表わされる：

$$(\mathrm{P})\quad\begin{cases}\min\limits_{x} & f(x)\\ \text{subject to} & x\in Q。\end{cases}$$ 注3)

問題（P）に対して，最適解を次のように定義する。

〔定義１．１〕　点$z\in Q$がすべての$x\in Q$に対して$f(z)\leqq f(x)$をみたすとき，$z\in Q$を問題（P）の最適解という。

ところで，問題（P）においては，最小化される写像がベクトル値関数であるため，ベクトルの大小関係（例えば，$\geqq$，$\geq$および$>$等）を通じて実行可能領域Q上に半順序関係が惹起される。例えば，Qの元x，yに対して，$f(x)\leq f(y)$が成り立つとき，$x\succ y$と定義する。ただし，xはyよりも優れていると読む。このとき，関係$\succ$はQ上で半順序関係となる。しかしながら，半順序関係は，非常に緩い価値判断であるため，Qのすべての二元についてその優劣の比較を行なうことができるわけではない。このため，問題（P）においては，一般に最適解の存在する可能性は非常に少ない。そこで，問題（P）においては，求められるべき解は，最適解から半順序関係の下でどの実行可能解よりも劣っていない解，すなわち非劣解へと拡張される。このような解は Pareto 最適解とよばれ，次のように定義される。

〔定義１．２〕　点$z\in Q$に対して，$f(x)\leq f(z)$となる$x\in Q$が存在しないとき，$z\in Q$を 問題 (P) のPareto 最解という。

さらに，問題（P）に対して，もう一つ解を定義する。

〔定義１．３〕　点$z\in Q$に対して，$f(x)<f(z)$となる$x\in Q$が存在しないとき，$z\in Q$を問題 (P) の弱 Pareto 最適解という。

問題（P）に対して定義した三つの解の間には，次の関係が成り立つ。

注３）$f_i(x)$を最大にする$x\in Q$の集合と$-f_i(x)$を最小にする$x\in Q$の集合とは一致するので，最初から，すべての目的を最小化するものと考えても一般性を失なうことはない。

〔命題1.1〕　問題（P）において，最適解の集合をΓ_o，Pareto 最適解の集合をΓ_pそして弱 Pareto 最適解の集合をΓ_wとするとき，

$$\Gamma_o \subseteq \Gamma_p \subseteq \Gamma_w$$

が成り立つ。

（証明）　任意にΓ_oの元zをとる。このとき，すべての$x \in Q$に対して$f(z) \leqq f(x)$が成り立つ。従って，$f(y) \leq f(z)$となる$y \in Q$は存在しない。ゆえに，$z \in \Gamma_p$。すなわち，$\Gamma_o \subseteq \Gamma_p$。次に，任意に$\Gamma_p$の元$z$をとる。このとき，$f(y) \leq f(z)$となる$y \in Q$は存在しない。従って，$f(x) < f(z)$となる$x \in Q$も存在しない。ゆえに，$z \in \Gamma_w$。すなわち，$\Gamma_p \subseteq \Gamma_w$。以上を総合して，$\Gamma_o \subseteq \Gamma_p \subseteq \Gamma_w$。Q. E. D.

逆向きの包含関係は，常に成り立つとは限らないが，実行可能領域Qに全順序関係が定義されるならば，逆向きの包含関係も成立し，三つの解集合は一致する。

第2節　凸解析の理論からの準備

この節では，次節の議論の展開において必要とされる凸解析（convex analysis）の理論を Rockafellar [11] に従って，簡単に紹介する。

〔定義2.1〕　fをR^n上で定義された実数値関数とする。任意の$x \in R^n$に対して，xのある近傍$V(x)$およびある正の定数Kが存在して，すべてのz，$y \in V(x)$に対して

$$|f(y)-f(z)| \leqq K\|y-z\|$$

が成り立つとき，fはR^n上で局所リプシッツ的（locally Lipschitz on R^n）であるといわれる。

〔補助定理2.1〕　R^n上で定義された実数値凸関数fは[注4)]，R^n上で局所リプシッツ的である。

注4）R^n上で定義された実数値関数fは，すべてのx，$y \in R^n$と$0 < \alpha < 1$なるすべての実数αに対して，

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leqq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

が成り立つとき，凸であるといわれる。

（証明）　任意に $x^0 \in R^n$ をとる。f は凸関数であるから，f は x^0 において連続である。[注5] 従って，x^0 のある近傍 $V(x^0)$ およびある正の定数 M が存在して，すべての $x \in V(x^0)$ に対して，

$$|f(x)| \leqq M$$

が成り立つ。$V(x^0)$ は x^0 の近傍であるから，ある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$B_{2\varepsilon}(x^0) \equiv \{x \in R^n \mid \|x - x^0\| < 2\varepsilon\}$ とおくとき，$B_{2\varepsilon}(x^0) \subseteq V(x^0)$ が成り立つ。従って，すべての $x \in B_{2\varepsilon}(x^0)$ に対して，

$$|f(x)| \leqq M \tag{2.1}$$

が成り立つ。さらにこのとき，すべての $y,\ z \in B_\varepsilon(x^0)$ に対して，

$$|f(y) - f(z)| \leqq \frac{2M}{\varepsilon} \|y - z\| \tag{2.2}$$

が成り立つ。実際，ある $x^1,\ x^2 \in B_\varepsilon(x^0)$ が存在して，

$$f(x^2) - f(x^1) > \frac{2M}{\varepsilon} \|x^2 - x^1\|$$

が成り立つとしよう。[注6] いま，実数 $\alpha > 0$ を

$$x^3 \equiv x^2 + \alpha(x^2 - x^1) \in B_{2\varepsilon}(x^0)$$

$$\|x^3 - x^2\| = \varepsilon$$

が成り立つように十分小さくとる。このとき，

$$\frac{f(x^3) - f(x^2)}{\|x^3 - x^2\|} \geqq \frac{f(x^2) - f(x^1)}{\|x^2 - x^1\|} > \frac{2M}{\varepsilon}$$

を得る。すなわち，

$$f(x^3) - f(x^2) > 2M。$$

これは，（2.1）に反する。従って，すべての $y,\ z \in B_\varepsilon(x^0)$ に対して，（2.2）が成り立つ。これは，f が R^n 上で局所リプシッツ的であることを示している。Q. E. D.

一般に R^n 上で定義された実数値凸関数は R^n 上で連続であるが，それ

注5） Rockafellar [11], p82, Theorem 10.1 参照。

注6） 直接の否定は

$$|f(x^1) - f(x^2)| > \frac{2M}{\varepsilon} \|x^1 - x^2\|$$

であるが，f の値の大きい方を x^2 としておけばよい。

は，R^n 上で微分可能であるとは限らない。そこで R^n 上で定義された実数値凸関数に対して，微分の概念を次のように拡張しよう。

〔定義2．2〕 f を R^n 上で定義された実数値凸関数とする。点 z，$h \in R^n$ および $\lambda \in R$ に対して，

$$f'(z;h) \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(z+\lambda h)-f(z)}{\lambda} \qquad (2.3)$$

とおき[注7)]，これを f の点 z における h 方向の方向微係数 (one-sideddirectional derivative) という。さらに $f'(z;\cdot)$ を点 z における方向微分 (directional differential) という[注8)]。

定義2．2において，z，h を固定したとき，$[f(z+\lambda h)-f(z)]/\lambda$ は，$\lambda>0$ において，λ に関して単調非減少であるので，極限値してと $+\infty$ や $-\infty$ を許せば，$f'(z;h)$ は必ず存在する。しかも，

$$f'(z;h)=\inf_{\lambda>0} \frac{f(z+\lambda h)-f(z)}{\lambda}$$

が成り立つ[注9)]。

〔補助定理2．2〕 f を R^n 上で定義された実数値凸関数とし，$z \in R^n$ を任意にとる。このとき，すべての $h \in R^n$ に対して，$f'(z;h)$ は有限値をとる。

（証明） 任意に z，$h \in R^n$ をとる。f の凸性から，任意の正の数 $\nu>0$ および $\lambda>0$ に対して，

$$\frac{f(z)-f(z-\nu h)}{\nu} \leqq \frac{f(z+\lambda h)-f(z)}{\lambda}$$

注7） $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0}$ は $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}}$ を意味する。

注8） もし f が点 z において微分可能であれば，明らかに，$f'(z;h)=\nabla f(z)\cdot h$ が成り立つ。

注9） Rockafellar [11], p213—p214. Theorem 23. 1 参照。

が成り立つ。[注10)] ここで，$\lambda \downarrow 0$ とすると

$$-\infty < \frac{f(z) - f(z - \nu h)}{\nu} \leqq f'(z; h)$$

を得る。他方，任意の z, $h \in R^n$ に対して，$f'(z; h) < +\infty$ が成り立つことは，定義2.2から明らかである。Q.E.D.

R^n 上で定義された実数値凸関数 f が点 $x^0 \in R^n$ において微分可能であれば，すべての $x \in R^n$ に対して，

$$f(x) - f(x^0) \geqq \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0)$$

が成り立つことが知られている。[注11)]

このことから，一般の R^n 上で定義された実数値凸関数に対して，勾配の概念を次のように拡張することができる。

〔定義2.3〕　f を R^n 上で定義された実数値凸関数とする。点 $x^0 \in R^n$ に対して，

$$\partial f(x^0) \equiv \{y \in R^n \mid f(x^0) + (x - x^0) \cdot y \leqq f(x), \ ^{\forall}x \in R^n\}$$

とおき，これを f の点 x^0 における劣微分（subdifferential）という。また $\partial f(x^0)$ の元 y を f の点 x^0 における劣勾配（subgradient）という。さらに $\partial f(x^0) \neq \phi$ のとき，f は点 x^0 において劣微分可能（subdifferentiable）であるという。

〔補助定理2.3〕　f を R^n 上で定義された実数値凸関数とする。このとき，任意の $x^0 \in R^n$ に対して，

$$\partial f(x^0) \neq \phi。$$

（証明）　$E_f \equiv \{(x, \gamma) \in R^n \times R \mid f(x) \leqq \gamma\}$ とおく。[注12)] このとき，f の凸性から，E_f は凸集合である。また明らかに $E_f \neq \phi$ である。$(x^0,$

注10）$\nu > 0$ および $\lambda > 0$ に対して，$z = \frac{\lambda}{\nu + \lambda}(z - \nu h) + \frac{\nu}{\nu + \lambda}(z + \lambda h)$ と表わされる。f は凸関数であるから，$f(z) \leqq \frac{\lambda}{\nu + \lambda} f(z - \nu h) + \frac{\nu}{\nu + \lambda} f(z + \lambda h)$ が成り立つ。整理すると $\frac{f(z) - f(z - \nu h)}{\nu} \leqq \frac{f(z + \lambda h) - f(z)}{\lambda}$ を得る。

注11）福島雅夫［4］,p40，定理2-26 参照。

注12）E_f は f のエピグラフ（epigraph）とよばれる。

$f(x^0))$ は E_f の境界上にあるので，$(x^0, f(x^0))$ を通る E_f の支持超平面 (supporting hyperplane) が存在する。[注13] すなわち，ある $y \in R^n$, $\alpha \geqq 0$ $(\in R)$, $(y, \alpha) \neq (0, 0)$ が存在して，すべての $(x, \gamma) \in E_f$ に対して，

$$(y, \alpha) \cdot (x - x^0, \gamma - f(x^0)) \geqq 0$$

が成り立つ。また，すべての $x \in R^n$ に対して，$(x, f(x)) \in E_f$ であるから，

$$(y, \alpha) \cdot (x - x^0, f(x) - f(x^0)) \geqq 0$$

が成り立つ。すなわち，すべての $x \in R^n$ に対して，

$$y \cdot (x - x^0) + \alpha (f(x) - f(x^0)) \geqq 0 \qquad (2.4)$$

が成り立つ。$\alpha=0$ と仮定すると，(2.4) から，$y=0$ となり，$(y, \alpha) \neq (0, 0)$ に反する。従って，$\alpha > 0$ を得る。ゆえに，すべての $x \in R^n$ に対して，

$$f(x^0) + (x - x^0) \cdot (-y/\alpha) \leqq f(x)$$

が成り立つ。ゆえに，

$$-\frac{y}{\alpha} \in \partial f(x^0)。$$

すなわち，$\partial f(x^0) \neq \phi$ を得る。Q. E. D.

〔定義2.4〕 R^n の空でない部分集合 A に対して，

$$\delta^*(h \mid A) \equiv \sup_{y \in A} h \cdot y$$

によって定義される R^n から $R \cup \{+\infty\}$ への拡張実数値関数 $\delta^*(\cdot \mid A)$ を A の支持関数 (supporting function) という。

R^n 上で定義された実数値凸関数に対し，劣微分と方向微係数との間には，次の関係が成り立つ。

〔補助定理2.4〕 f を R^n 上で定義された実数値凸関数とし，$x^0 \in R^n$ とする。このとき，すべての $h \in R^n$ に対して，

$$f'(z; h) = \delta^*(h \mid \partial f(x^0))$$

が成り立つ。

注13) Stoer and Witzgall [14], p103, (3. 4. 12) 参照。

証明は省略。(Rockafellar [11], p 217, Theorem 23.4 参照。)

〔定義２．５〕 R^n の空でない任意の部分集合 S に対して,

$$S^p \equiv \{y \in R^n \mid y \cdot x \leqq 0, \quad {}^{\forall}x \in S\}$$

を S の極錐 (polar cone) という。

〔補助定理２．５〕 R^n の空でない任意の部分集合 S に対して, S^p は閉凸錐である。

(証明) まず, S^p が閉集合であることを示す。各 $x \in S$ に対して, $S^p(x) \equiv \{y \in R^n \mid y \cdot x \leqq 0\}$ は閉集合である。従って, $S^p = \cap_{x \in S} S^p(x)$ も閉集合である。次に S^p が凸錐であることを示す。y^1, y^2 を S^p の任意の元とする。任意の $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ に対して, $y \equiv \alpha y^1 + \beta y^2$ とおく。このとき, すべての $x \in S$ に対して,

$$y \cdot x = (\alpha y^1 + \beta y^2) \cdot x = \alpha y^1 \cdot x + \beta y^2 \cdot x \leqq 0$$

ゆえに, $y \in S^p$ を得る。すなわち, S^p は凸錐である。Q. E. D.

〔補助定理２．６〕 S を R^n の閉凸錐とする。このとき, $S = S^{pp}$ が成り立つ。ただし, S^{pp} は S^p の極錐を表わす。

証明は省略。(Rockafellar [11], p121, Theorem 14.1 参照。)

〔補助定理２．７〕 S を R^n の閉凸集合とする。このとき, $0 \in S$ であるための必要十分条件は, すべての $x \in R^n$ に対して, $0 \leqq \delta^*(x \mid S)$ が成り立つことである。

(証明) 必要性は定義２．４から明らかなので, 十分性のみを証明する。すべての $x \in R^n$ に対して, $0 \leqq \delta^*(x \mid S)$ であって, かつ $0 \notin S$ と仮定する。S は閉凸集合なので, 強分離定理から, ある $y \in R^n$ が存在して,

$$0 > \sup_{x \in S} y \cdot x = \delta^*(y \mid S)$$

が成り立つ。これは, 最初の仮定に反する。ゆえに, $0 \in S$ である。Q. E. D.

第３節 Pareto 最適解のための必要条件のよび十分条件

この節では, 点 $z \in R^n$ が, 第１節で定義した問題 (P) のPareto 最適

解であるための必要条件および十分条件を与える。このため，以下の議論で重要な役割を果す接錐（tangent cone）の定義を与える。

〔定義3．1〕 Qを R^n の任意の集合，さらに $z\in Q$ とする。このとき，

$$T(Q\,;z)\equiv\{h\in R^n \mid \lambda_n(x^n-z)\to h \quad x^n\to z\ (n\to\infty),\ \lambda_n>0,\ x^n\in Q,\ n=1,2,\cdots\}$$

をQのzにおける接錐という。

〔補助定理3．1〕 $T(Q\,;z)$は空でない閉錐である。

（証明） 接錐の定義から，明らかに $0\in T(Q\,;z)$。ゆえに，$T(Q\,;z)\neq\phi$ を得る。次に，錐であることを示す。$h\in T(Q\,;z)$ を任意にとる。このとき，zに収束するQの点列 $\{x^n\}$ および正の実数列 $\{\lambda_n\}$ が存在して，$\lambda_n(x^n-z)\to h$，$x^n\to z$ $(n\to\infty)$ が成り立つ。任意の正の実数 $\alpha>0$ に対して，$\mu_n\equiv\alpha\lambda_n$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく。このとき，各$n=1,2,\cdots$に対して，$\mu_n>0$。この実数列 $\{\mu_n\}$ および $\{x^n\}$ に対して，$\mu_n(x^n-z)\to\alpha h$，$x^n\to z$ $(n\to\infty)$ を得る。従って，$\alpha h\in T(Q\,;z)$。$T(Q\,;z)$ が閉集合であることは，定義3．1から明らかである。Q. E. D.

さて，いよいよ点 $z\in Q$ が問題（P）の弱 Pareto 最適解であるための必要条件を与える。

〔定理3．1〕 問題（P）において，f_1，$f_2,\cdots$，f_l，g_1，$g_2,\cdots$，g_mをそれぞれ R^n 上で定義された実数値凸関数とする。さらに，点$z\in Q$ に対して，$I(z)\equiv\{i\in\{1,2,\cdots,m\}\mid g_i(z)=0\}$，$F_i\equiv\{h\in R^n\mid f_i'(z\,;h)<0\}$ $(i=1,2,\cdots,l)$，$G_i\equiv\{h\in R^n\mid g_i'(z\,;h)<0\}$ $(i\in I(z))$，$F_0\equiv\cap_{i=1}^{l}F_i$，$G_0\equiv\cap_{i\in I(z)}G_i$ とおく。このとき，$z\in R^n$ が問題（P）の弱 Pareto 最適解であれば，$F_0\cap G_0\cap T(Q_0;z)=\phi$ が成り立つ。

（証明） $h\in F_0\cap G_0\cap T(Q_0;z)$ なるhが存在するものとする。このとき，$h\in T(Q_0;z)$であるから，あるQ_0の点列 $\{x^n\}$ と正の実数列 $\{\mu_n\}$ が存在して，$x^n\to z$，$\mu_n(x^n-z)\to h$ $(n\to\infty)$ が成り立つ。$\lambda_n\equiv1/\mu_n(n=1,2,\cdots)$ とおくと，$(x^n-z)/\lambda_n\to h\,(n\to\infty)$ を得る。一方，$h\in F_0$ であるから，$h\neq0$。従って，$\lambda_n\downarrow0$ $(n\to\infty)$ を得る。

次に，ある自然数 n_0 が存在して，$n>n_0$ なるすべての自然数nに対して，

$$f_i(x^n) < f(z), \qquad i=1,2,\cdots,l$$

$$g_i(x^n) \leqq 0, \qquad i=1,2,\cdots,m$$

が成り立つことを示す。各 f_i $(i=1,2,\cdots,l)$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(x^n)-f_i(z)}{\lambda_n} = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{f_i(x^n)-f_i(z+\lambda_n h)}{\lambda_n} \right.$$

$$\left. + \frac{f_i(z+\lambda_n h)-f_i(z)}{\lambda_n} \right\} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(x^n)-f_i(z+\lambda_n h)}{\lambda_n}$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(z+\lambda_n h)-f_i(z)}{\lambda_n}$$

を得る。補助定理 2.1 から, f_i $(i=1,2,\cdots,l)$ は局所リプシッツ的であるので, z のある近傍 $V_i(z)$ $(i=1,2,\cdots,l)$ および正の定数 $K_i>0$ $(i=1,2,\cdots,l)$ が存在して, すべての $y^1, y^2 \in V_i(z)$ に対して,

$$|f_i(y^1)-f_i(y^2)| \leqq K_i \| y^1-y^2 \|, \quad i=1,2,\cdots,l$$

が成り立つ。また $x_n \to z$, $\lambda_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ であるから,

$$\left| \limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(x^n)-f_i(z+\lambda_n h)}{\lambda_n} \right| \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{|f_i(x^n)-f(z+\lambda_n h)|}{\lambda_n}$$

$$\leqq \mathrm{imsup}_{n\to\infty} \frac{K_i \| x^n - z - \lambda_n h \|}{\lambda_n} \leqq \limsup_{n\to\infty} K_i \left\| \frac{(x^n-z)}{\lambda_n} - h \right\| = 0,$$

$$i=1,2,\cdots,l。$$

さらに,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(z+\lambda_n h)-f_i(z)}{\lambda_n} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{f_i(z+\lambda h)-f_i(z)}{\lambda}$$

$$= f_i{}'(z;h) < 0, \quad i=1,2,\cdots,l。$$

ゆえに,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_i(x^n)-f_i(z)}{\lambda_n} < 0, \quad i=1,2,\cdots,l。$$

ゆえに, ある n_i $(i=1,2,\cdots,l)$ が存在して, $n>n_i$ $(i=1,2,\cdots,l)$ なるすべての自然数 n について,

$$f_i(x^n)-f_i(z) < 0, \quad i=1,2,\cdots\ l$$

が成り立つ。

他方，$i \notin I(z)$ なる g_i に対して，$x^n \to z\ (n \to z)$ および g_i の連続性から，

$$\lim_{n\to\infty} g_i(x^n) = g_i(z) < 0$$

が成り立つ。ゆえに，ある自然数 $n_{l+i}\ (i \notin I(z))$ が存在して，$n > n_{l+i}\ (i \notin I(z))$ なるすべての自然数nに対して，

$$g_i(x^n) < 0\,,\quad i \notin I(z)。$$

を得る。また，$i \in I(z)$ なる g_i に対しては，$h \in G_i$ から $g_i'(z;h) < 0$。さらに，$h \in F_0$ であるから，先と同様にして，ある自然数 $n_{l+i}\ (i \in I(z))$ が存在して，$n > n_{l+i}\ (i \in I(z))$ なるすべての自然数 n に対して，

$$g_i(x^n) < g_i(z) \leqq 0$$

が成り立つことが示される。従って，$n_0 \equiv \max_{1 \leqq i \leqq l+m} n_i$ とおくとき，$n > n_0$ なるすべての自然数 n に対して，

$$f_i(x^n) < f_i(z),\quad i = 1, 2, \cdots, l$$

$$g_i(x^n) \leqq 0\,,\quad i = 1, 2, \cdots, m$$

が成り立つ。また，明らかに，$x^n \in Q_0\ (n = 1, 2, \cdots)$ である。これは，z が問題（P）の弱 Pareto 最適解であることに反する。ゆえに，

$$F_0 \cap G_0 \cap T(Q_0;z) = \phi$$

が成り立つ。Q. E. D.

〔系3.1〕 定理3.1の仮定は満たされているとする。このとき，$z \in R^n$ が問題（P）の Pareto 最適解であれば，$F_0 \cap G_0 \cap T(Q_0;z) = \phi$ が成り立つ。

（証明） $z \in R^n$ が問題（P）の Pareto 最適解であれば，命題1.1から，これは，弱 Pareto 最適解である。従って，$F_0 \cap G_0 \cap T(Q_0;z) = \phi$ が成り立つ。Q. E. D.

〔定理3.2〕 定理3.1の仮定に加えて，$T(Q_0;z)$ が凸集合であると仮定する。このとき，$z \in R^n$ が問題（P）の弱 Pareto 最適解であれば，次のことを満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ が存在する。

$$\lambda_i \geqq 0\,,\ i = 1, 2, \cdots, l,\ \mu_j \geqq 0\,,\ j = 1, 2, \cdots, m, \tag{3.1}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m) \neq (0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0) \qquad (3.2)$$

$$\mu_j g_j(z) = 0, \qquad j=1, 2, \cdots, m \qquad (3.3)$$

$$0 \in \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \partial f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \partial g_j(z) + T(Q_0;z)^p \qquad (3.4)$$

（証明） 記号を簡単にするため，$B_i \equiv \partial f_i(z)$，$B_{l+j} \equiv \partial g_j(z)$，$M \equiv T(Q_0;z)$ とおく。補助定理2.4から，

$$F_i = \{h \in R^n \mid \delta^*(h \mid B_i) < 0\}, \qquad i=1,2,\cdots,l,$$

$$G_j = \{h \in R^n \mid \delta^*(h \mid B_{l+j}) < 0\}, \qquad j \in I(z)$$

を得る。また，

$$F_0 \cap G_0 = \{h \in R^n \mid \delta^*(h \mid conv\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j \in I(z)} B_{l+j})\}) < 0\}$$

が成り立つ。一方，Mは閉凸錐なので，補助定理2.6から，$M = M^{pp}$ を得る。さらに，$0 \in M^p$ なので

$$M^{pp} = \{h \in R^n \mid \delta^*(h \mid M^p) \leqq 0\} = \{h \in R^n \mid \delta^*(h \mid M^p) = 0\} \qquad (3.5)$$

が成り立つ。また，zは弱 Pareto 最適解なので，定理3.1から，

$$F_0 \cap G_0 \cap M = \phi \qquad (3.6)$$

が成り立つ。ところで，任意に $h \in R^n$ をとると，$h \notin F_0 \cap G_0$，または $h \notin M$ のどちらかが成り立つ。従って，任意の $h \in R^n$ に対して，

$$\delta^*(h \mid conv\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j \in I(z)} B_{l+j})\}) \geqq 0, \text{ または，}$$

$$\delta^*(h \mid M^p) = +\infty$$

のどちらかが必ず成り立つ。$h \notin F_0 \cap G_0$ のときは，たとえ $h \in M$ であっても，

$$\delta^*(h \mid conv\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j \in I(z)} B_{l+j})\} + M^p) \geqq 0$$

が成り立つ。また，$h \notin M$ のときは，$h \in F_0 \cap G_0$ かどうかに関係なく，

$$\delta^*(h \mid conv\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j \in I(z)} B_{l+j})\} + M^p) = +\infty$$

となる。ゆえに，任意の $h \in R^n$ に対して，

$$\delta^*(h \mid conv\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j \in I(z)} B_{l+j})\} + M^p) \geqq 0$$

が成り立つ。$conv\,\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j\in I(z)} B_{l+j})\}$ はコンパクトな凸集合であり，M^p は閉凸集合である。従って，その和は，閉凸集合となる。ゆえに，補助定理2.7から，

$$0 \in conv\,\{(\cup_{i=1}^{l} B_i) \cup (\cup_{j\in I(z)} B_{l+j})\} + M^p$$

が成り立つ。従って，ある実数 $\lambda_1 \geqq 0$，$\lambda_2 \geqq 0$，…，$\lambda_l \geqq 0$，$\mu_j \geqq 0$，$j\in I(z)$　$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i + \sum_{j\in I(z)} \mu_j = 1$ が存在して，

$$0 \in \sum_{i=1}^{l} \lambda_i B_i + \sum_{j\in I(z)} \mu_j B_{l+j} + M^p$$

が成り立つ。$j \notin I(z)$ に対して，$\mu_j = 0$ とおくと，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ は，(3.1)～(3.4) を満足する。Q.E.D.

系3.1を得たのと同様にして，次の系を得る。

〔系3.2〕　定理3.2の仮定は満たされているものとする。このとき，$z\in R^n$ が問題（P）の Pareto 最適解であれば，(3.1)～(3.4) を満足する実数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ が存在する。

〔定理3.3〕　定理3.2において，(3.4) は次の (3.7) と同値である：

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i'(z;h) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j'(z;h) \geqq 0,\quad {}^{\forall}h \in T(Q_0;z) \tag{3.7}$$

（証明）　(3.4) から，ある $y^i \in \partial f_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, l)$ および，$y^{l+j} \in \partial g_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ が存在して，

$$-\sum_{i=1}^{l} \lambda_i y^i - \sum_{j=1}^{m} \mu_j y^{l+j} \in M^p$$

が成り立つ。ただし，$M \equiv T(Q_0;z)$。ゆえに，すべての $h\in M$ に対して，

$$h\cdot\left(-\sum_{i=1}^{l} \lambda_i y^i - \sum_{j=1}^{m} \mu_j\, y^{l+j}\right) \leqq 0$$

が成り立つ。すなわち，すべての $h\in M$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i h\cdot y^i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h\cdot y^{l+j} \geqq 0$$

が成り立つ。$\lambda_i \geqq 0$ $(i=1\ 2,\cdots,l)$, $\mu_j \geqq 0$ $(j=1,2,\cdots,m)$ であるから，すべての $h \in M$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \delta^*(h \mid \partial f_i(x)) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \delta^*(h \mid \partial g_j(z)) \geqq 0$$

が成り立つ。従って，補助定理2.4から，すべての $h \in M$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i'(z;h) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j'(z;h) \geqq 0$$

が成り立つ。すなわち，(3.7) が成り立つ。

逆に，(3.7) を仮定すると，補助定理2.4から，すべての $h \in M$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i\ \delta^*(h \mid \partial f_i(z)) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \delta^*(h \mid \partial g_j(z)) \geqq 0$$

が成り立つ。従って，すべての $h \in M$ に対して，

$$\delta^*(h \mid \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\ \partial f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \partial g_j(z)) \geqq 0 \tag{3.8}$$

が成り立つ。また，$0 \in M^p$ であるから，すべての $h \in M$ に対して，

$$\delta^*(h \mid M^p) = 0 \tag{3.9}$$

が成り立つ。(3.8) と (3.9) から，すべての $h \in M$ に対して，

$$\delta^*(h \mid \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\ \partial f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j\ \partial g_j(z) + M^p) \geqq 0 \tag{3.10}$$

を得る。一方，Mは仮定から，閉凸錐である。従って，補助定理2.6から，$M = M^{pp}$ を得る。ゆえに $h \notin M$ であれば，$h \notin M^{pp}$。すなわち，ある $z^0 \in M^p$ が存在して，$h\cdot z^0 > 0$ が成り立つ。M^p は錐なので，$\lambda > 0$ に対して，$\lambda z^0 \in M^p$。ゆえに，$\delta^*(h \mid M^p) = \sup_{x \in M^p} h\cdot x = +\infty$。以上から，すべての

$h \in R^n$ に対して，

$$\delta^*(h \mid \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \partial f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \partial g_j(z) + M^p) \geqq 0$$

が成り立つことが示された。従って，補助定理2.7から，すべての $h \in R^n$ に対して，

$$0 \in \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \partial f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \partial g_j(z) + M^p$$

を得る。Q. E. D.

〔定理3.4〕 定理3.2の仮定に加えて，Q_0 は凸集合であると仮定する。さらに，$g_i(x^0)<0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ なる $x^0 \in Q_0$ が存在すると仮定する。このとき，$z \in Q$ が問題（P）の弱 Pareto 最適解であるための必要十分条件は，

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \geq 0, (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m) \geqq 0 \qquad (3.11)$$

$$\lambda_i g_i(z) = 0, \qquad i=1,2,\cdots,m \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i'(z;h) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j'(z;h) \geqq 0, \quad {}^{\forall} h \in T(Q_0;z) \qquad (3.7)$$

が成り立つような実数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ が存在することである。

（証明） まず，必要性を証明する。z を問題（P）の弱 Pareto 最適解とすると，定理3.2および定理3.3から，(3.1)，(3.2)，(3.3) および (3.7) をみたす実数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_l, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m$ が存在する。ゆえに，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \geq 0$ を示せばよい。方向微係数の定義から，すべての $h \in R^n$ に対して，

$$f_i'(z;h) \leqq f_i(z+h) - f_i(z), \qquad i=1,2,\cdots,l$$

$$g_j'(z;h) \leqq g_j(z+h) - g_j(z), \qquad j=1,2,\cdots,m$$

が成り立つ。$h \in R^n$ のかわりに $x-z$ を代入すると，すべての $x \in R^n$ に対して，

$$f_i'(z;x-z) \leqq f_i(x) - f_i(z), \qquad i=1,2,\cdots,l \qquad (3.12)$$

$$g_j{}'(z;x-z) \leqq g_j(x)-g_j(z), \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{3.13}$$

が成り立つ。また，Q_0 の凸性から，$Q_0-z \subset T(Q_0;z)$ が成り立つ。従って，(3.12) および (3.13) から，すべての $x \in Q_0$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(z)$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i{}'(z;x-z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g'_j(z;x-z)$$

$$\geqq 0$$

が成り立つ。従って，すべての $x \in Q_0$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x) \geqq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(z)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z)$$

が成り立つ。いまここで，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_l=0$ と仮定すると，すべての $x \in Q_0$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_i(x) \geqq 0 \tag{3.14}$$

となる。(3.14) に $x=x^0 \in Q_0$ を代入すると，$g_i(x_0)<0(i=1,2,\cdots,m)$ から

$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_m=0$

となる。従って，$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)=(0,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0)$ となり，このことは，(3.2) に反する。ゆえに，

$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l) \geq 0$。

次に十分性を示す。g_i $(i=1,2,\cdots,m)$ の凸性から，$Q-z \subset Q_0-z \subset T(Q_0;z)$が成り立つ。すべての$x \in \cap_{i=1}^{m} Q_i-z$ に対して，$\mu_j>0$ であれば，

$$\mu_j g_j{}'(z;x) = \mu_j \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{g_j(z+\alpha x)-g_j(z)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mu_j g_j(z+\alpha x) - \mu_j g_j(z)}{\alpha} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mu_j g_j(z+\alpha x)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mu_j g_j(z+\alpha(y-z))}{\alpha} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mu_j g_j((1-\alpha)z+\alpha y)}{\alpha}$$

が成り立つ。ただし，$y \in \cap_{i=1}^{m} Q_i$。$0<\alpha<1$ としても一般性を失なわないので，$\cap_{i=1}^{m} Q_i$ の凸性から，$(1-\alpha)z+\alpha y \in \cap_{i=1}^{m} Q_i$。ゆえに，$\mu_j g_j((1-\alpha)z+\alpha y) \leqq 0$。従って，

$$\mu_j g_j{}'(z;x) \leqq 0。$$

$\mu_j = 0$ であれば，$\mu_j g_j{}'(z;x)=0$。従って，すべての $x \in \cap_{i=1}^{m} Q_i - z$ に対して，

$$\mu_j g_j{}'(z;x) \leqq 0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

となる。また，$Q-z \subset \cap_{i=1}^{m} Q_i - z$，$Q-z \subset T(Q_0;z)$ であるから，(3.7) から，すべての $x \in Q-z$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i{}'(z;x) \geqq -\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j{}'(z;x) \geqq 0$$

が成り立つ。ゆえに，すべての $x \in Q$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i{}'(z;x-z) \geqq 0$$

を得る。また，すべての $x \in Q$ に対して，(3.12) から

$$f_i(x) - f_i(z) \geqq f_i{}'(z;x-z),\quad i=1,2,\cdots,l$$

が成り立つので，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) \geqq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_j{}'(z;x-z) \geqq 0$$

を得る。すなわち，すべての $x \in Q$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x) \geqq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) \tag{3.15}$$

が成り立つ。zが弱 Pareto 最適解でないとしよう。このとき，ある $\bar{x}\in Q$ が存在して，$f(z)>f(\bar{x})$が成り立つ。従って，$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)\geq(0,0,\cdots,0)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) > \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(\bar{x})$$

となる。これは，(3.15) に反する。ゆえに，zは弱 Pareto 最適解である。Q. E. D.

定理3.4から，直ちに次の系を得る。

〔系3.3〕 定理3.4の仮定は，満たされているものとする。このとき，$z\in Q$ が問題（P）の Pareto 最適解であれば，(3. 3)，(3.7) および (3.11) が成り立つような実数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$ が存在する。

〔定理3.5〕 定理3.4の仮定は満たされているものとする。このとき，$z\in Q$ が問題（P）の Pareto 最適解であるための十分条件は，

$$\lambda_i>0,\ i=1,2.\cdots,l,\ \mu_j\geqq 0,\ j=1,2,\cdots,m \tag{3.16}$$

$$\mu_j g_j(z)=0,\ j=1,2\ \cdots,m \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i'(z;h) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j'(z;h) \geqq 0 \quad \forall h\in T(Q_0;z) \tag{3.7}$$

を満たす実数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_l,\mu_1\mu_2\cdots\mu_m$ が存在することである。

（証明） 定理3.4の十分性の証明と全く同様にして，すべての $x\in Q$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(x) \geqq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) \tag{3.15}$$

が成り立つことを示すことができる。zが問題 (P) の Pareto 最適解でないとしよう。このとき，ある $\bar{x}\in Q$ が存在して，$f(z)\geq f(\bar{x})$ が成り立つ。従

って，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) > (0,0,\cdots,0)$に対して，

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(z) > \sum_{i=1}^{l} \lambda_i f_i(\bar{x})$$

となる。これは，(3.15) に反する。よって，zは問題 (P) の Pareto 最適解である。Q.E.D.

おわりに

本稿では，微分不可能なベクトル値目的関数および制約関数をもつ多目的計画問題に対して，その理論的分析を行なった。その際，本稿に二つの特徴をもたせた。一つは，目的関数 f_i $(i=1,2,\cdots,l)$ および制約関数 g_j $(j=1, 2,\cdots,m)$ の微分可能性を仮定せずに，それらの凸性を仮定したことである。そして，R^n 上で定義された実数値凸関数に対し，劣微分および方向微係数を定義し，これらの概念を用いて，弱 Pareto 最適解や Pareto 最適解の必要条件および十分条件を与えた。もう一つの特徴は，集合制約 $(x \in Q_0)$ をもつ問題 (P) に対して，点 $z \in Q_0$ における Q_0 の線形近似である接錐を定義することによって，制約条件をゆるめたことである。ところで，問題 (P) において，$Q_0 = R^n$，とおき，さらにf_i $(i=1\ 2,\cdots,l)$ および g_j $(j=1,2.\cdots,m)$ が微分可能であると仮定することによって，本稿の結果から従来与えられていた結果[注14)]が導き出される。このことから，本稿の結果は，従来のそれの一般化となっていることがわかる。さらに，本稿の結果は，勾配ベクトルに代えて劣勾配を使用実行可能方向として選ぶことによって，あるいは，勾配ベクトルにかえて方向微係数を用いて，目的関数の減少方向を決めることによって，微分可能性の仮定の下で考案された従来の計算手順が，微分不可能なベクトル値目的関数と制約関数をもつ多目的計画問題の弱 Pareto 最適解および Pareto 最適解を求める場合にも，利用できることをも示している。

なお，非凸 (non-convex) なベクトル値目的関数をもつ多目的計画問題

注14) Lin [9], Theorem 7. 1 参照。

に対して，弱 Pareto 最適解や Pareto 最適解の必要条件を求めることや，劣勾配を求める効率的な計算手順を開発することなどの問題が，今後の課題として残されている。

参 考 文 献

[1] Canon, M. D., C. D. Cullum, Jr., and E. Polak, *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, McGraw-Hill, New York, N. Y., 1970.

[2] Clarke, F. H., "A New Approach to Lagrange Multipliers," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 1, No. 2, 1976.

[3] Da Cunha, N. C., and E. Polak, "Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite Dimensional Spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 19, No. 1, 1967.

[4] 福島雅夫『非線形最適化の理論』産業図書，1980.

[5] Geoffrion, A. D., J. S. Dyer, and A. Feinberg, "An Interactive Approach for Multi-criterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department," *Management Science*, Vol. 19, No. 4, 1972.

[6] Keeney, R. L., and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley & Sons, Inc. 1976; 高原康彦・高橋亮一・中野一夫訳『多目標問題解決の理論と実例』構造計画研究所，1980.

[7] Kelly, J. L., *General Topology*, D. Van Nostrand. Co., Inc., 1955; 児玉之宏訳『位相空間論』吉岡書店，1968.

[8] Kuhn, H. W., and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," *Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by J. Neyman, University of California Press, Berkeley, California, 1951.

[9] Lin, J. G., "Maximal Vector and Multi-Objective Optimization," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 18, No. 1, 1976.

[10] Pareto, V., *Cours d'Ecomie Politique*, Ronge, 1896.

[11] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

[12] 志水清孝『システム最適化理論』コロナ社, 1976.

[13] ———,『多目的と競争の理論』共立出版, 1982.

[14] Stoer, J., and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimensions* I, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[15] 竹之内脩『トポロジー』廣川書店, 1962.

[16] Yu, P. L., "Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 14, No. 3, 1974.

[17] ———, and M. Zeleny, "The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 49, No. 2, 1975.

[18] Zadeh, L. A., "Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria," *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-8, No. 1, 1963.

[19] Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.