複占スーパーゲームと推測的変化

是　枝　正　啓

目　次

Ⅰ．　はじめに

寡占における企業行動の特徴は相互依存関係と推測であるといえよう。相互依存関係は，寡占企業の産出量あるいは販売量の大きさが財の価格に影響し，それを通じて他企業の産出量あるいは販売量に影響を与えるという形の需要関数を導入することによって，その側面が考察されてきた。一方推測は自己の産出量の変化に対して他企業がどのように産出量を変化させるかについての予想を表わす意志決定変数である。その係数は推測的変化とよばれる。Cournot 以来この推測的変化をどのように決定するかが寡占理論の一つの核心と考えられてきた。

推測的変化に関する伝統的寡占理論の中心はその一般的定式化にあり，自己の推測と他企業の実際の反応との不一致についてはほとんど分析されてこなかったといってよい。最近になってこの問題が注目を集め，一つの方向として，Bresnahan (1981), Perry (1982), Kamien and Schwarz (1983) によって，推測と反応が一致するコンシステントな推測的変化（*consistent conjectural variation*）およびそのもとでの均衡の存在が考察されるようになった。もう一つの方向は，Friedman (1968), Cyert and DeGroot (1970), Kalai and

Stanford (1985) におけるように，Cournot の反応関数の欠点として指摘される企業の近視眼的行動を修正することである。すなわち現行期間の利潤最大化だけを目的とする意志決定ではなく，現行期間の意志決定の将来への影響を考慮にいれた上で，長期にわたる利潤の総和を最大にするということである。

Kalai and Stanford は企業の利潤の最大化の問題を Cournot 的推測的変化をともなうくり返しスーパーゲームとして考察し，Nash 均衡をもたらす一意的な均衡戦略が存在することを明らかにした。このスーパーゲーム・モデルは伝統的な寡占理論における推測的変化とゲーム理論における戦略を明示的に結びつけた最初のもので，興味深いモデルといえよう。

本稿は，この Kalai and Stanford モデルにもとづいて，一意的な Nash 均衡戦略が存在することを示すとともに，このモデルの特徴と問題点を明らかにしたい。

II. 推測的変化をともなう複占スーパーゲーム

本節では線型の需要関数のもとで，複占スーパーゲームにおける Nash 均衡戦略の存在を考察する。まず企業の行動を以下のように仮定しよう。いま同一財を生産する二つの企業1，2が存在し，それらの t 期の産出量を x_t，y_t とする。また価格 p に対して t 期の線型需要関数を $p=a-b(x_t+y_t)$ $(a>0,\ b>0)$ とし，企業1の t 期の利潤 $\pi_1(x_t,\ y_t)$ を

$$\pi_1(x_t,\ y_t)=x_t(a-b(x_t+y_t))$$

と表わすことにする。企業1の目的は

$$\sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}x_t\ (a-b(x_t+y_t))$$

を最大にすることである。ここで α は割引率を表わし，$\alpha\in[0,\ 1)$ である。スーパーゲームにおける企業戦略は各期における産出量の選択であり，それぞれ $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$，$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ と書くことができる。経済的意味をもつためには，各期の産出量は非負でなければならず，また生産設備の制約から有界でなけ

ればならない。そこで，企業は各期において産出量を有界区間 $I=[0,K]$ の範囲で選択するものとしよう。ただし $K=a/b$ とする。さらに企業は完全情報のもとで，行動を同時に決定し，拘束的な合意はないものとする。また各期の終りに各企業はその期に相手企業が選択した産出量を知らされるとする。したがって，企業のその期の産出量は相手企業の前期の産出量に依存して決定されることになる。このような状況のもとでは，企業1，2の戦略はそれぞれ次のような関数の集合として表わすことができる。

$$\{X_t\}_{t=1}^{\infty}=\begin{cases}X_1\in I\\ X_t:(I\times I)^{t-1}\to I\end{cases}$$

$$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}=\begin{cases}Y_1\in I\\ Y_t:(I\times I)^{t-1}\to I\end{cases}$$

つぎに，これらの関数を定式化するために，以下のように企業の反応を定義する。

定義1　$c_i\in[-1,\ 1]$ $i=1$，2および $\alpha\in[0,\ 1)$ に対して

$$\bar{x}=\frac{a(1+\alpha c_1)}{b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]},\quad \bar{y}=\frac{a(1+\alpha c_2)}{b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]}$$

とするとき，

$$X_1\in I,\qquad\qquad Y_1\in I \tag{1}$$
$$X_{t+1}(\sigma_t)=\bar{x}+c_1(y_t-\bar{y}),\qquad Y_{t+1}(\sigma_t)=\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})$$

ここで $\sigma_t=(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \cdots\cdots x_t,\ y_t)\in(I\times I)^t$ であり，これは両企業の第1期から第 t 期までの生産量の流れを表わす。[1)]ただしすべての t に対し

1）Kalai and Stanfordにおいては，$X_{t+1}(\sigma_t)=g(\bar{x}+c_1(y_t-\bar{y}))$ に対して

$$g(\mu)=\begin{cases}0 & (\mu<0\ のとき)\\ \mu & (\mu\in I のとき)\\ K & (\mu>K\ のとき)\end{cases}$$

と定義されている。この定義は本文の $g(\mu)=\mu$ より一般的形をとっているものの，$\mu<0$ および $\mu>K$ が起りうるケースはないので，本文の定義は一般性を失うことはない。これを以下に示そう。

(I) $\mu<0$ の場合。(I_i) $c_1>o$，$c_2>0$ とする（$c_1=0$ の場合は明らかであるので以下で

て$x_t \in$〔0, K〕であるとする。戦略(1)は次のように解釈することができる。$x_t(\sigma_t)$は企業1の戦略であるとともに，企業2からみた企業1のとると推測される戦略である。この意味でc_1は企業2の推測的変化であるといえる。そこでx_tの流れを明示的な形で考えてみよう。(1)は次のような連立差分方程式に書き直すことができる。

$$\begin{cases} X(t+1)-c_1 Y(t)=\bar{x}-c_1\bar{y} \\ Y(t+1)-c_2 X(t)=\bar{y}-c_2\bar{x} \end{cases} \tag{2}$$

ただし$X_t=X(t)$である。(2)を解くには$c_1c_2>0$と$c_1c_2<0$の二つのケース

は　$c_1 \neq 0$，$c_2 \neq 0$とする)。このときの連立差分方程式(2)の解は本文で後に示されるように，(3)，(4)で表わされる。そこで(3)，(4)の組み合わせ解である(7)によって証明しよう。tを奇数とする。$\mu<0$は，あるtに対して$\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})=\bar{y}+2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}<0$を意味する。$A>0$ならば，$\bar{y}$, $c_1^{\frac{t+1}{2}}$，$c_2^{\frac{t+1}{2}}>0$より，$\bar{y}+2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}>0$となり矛盾。また$A>0$ならば，$0>\bar{y}+2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t+2}{2}}>\bar{y}+2Ac_2=y_1$となり，$y_1>0$であることに矛盾。$t$が偶数の場合は(8)により，上と同様に証明される。（Ⅰii）$c_1>0$，$c_2<0$あるいは$c_1<0$，$c_2>0$の場合の連立方程式の解は(5)，(6)で与えられる。そこで(5)と(6)の組み合わせの解である(11)によって示そう。$c_1>0$，$c_2<0$とし，t（$\geqq 3$）を奇数とする。$\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})=\bar{y}+C'c_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}$であるから，$C'>0$，$c_2^{\frac{t+1}{2}}<0$ならば，$0>\bar{y}+C'c_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}>\bar{y}+Cc_1c_2\sqrt{-c_1c_2}=y_3$となり，$y_3>0$であることに矛盾する。また$t$が偶数の場合も(12)を用いて証明される。（Ⅰiii）$c_1<0$，$c_2>0$の場合も（Ⅰiv）$c_1<0$，$c_2<0$場合も結局（Ⅰii），（Ⅰi）に帰着される。よって$\mu=\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})<0$となるケースはないことが示された。

つぎに（Ⅱ）$\mu=\bar{y}+c_2\ (x_t-\bar{x})>K$となる場合を考えよう。（Ⅱi）$c_1>0$，$c_2>0$とし，$t(\geqq 3)$を奇数としよう。また差分方程式解(7)を用いよう。$A>0$ならば，$K<\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})=\bar{y}+2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}\leqq\bar{y}+2Ac_2=y_1$となり，$y_1<K$であることに反する。$A<0$ならば，$\bar{y}>K$となり矛盾。（Ⅱii）$c_1>0$，$c_2<0$の場合。$A<0$，$c_2^{\frac{t+1}{2}}<0$ならば，上と同様$\bar{y}>K$となり矛盾。$A<0$，$c_2^{\frac{t+1}{2}}<0$ならば，$K<\bar{y}+2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}\leqq\bar{y}+2Ac_2=y_1$となり，$y_1\in$〔0, K〕に反する。（Ⅱiii）$c_1<0$，$c_2>0$の場合も（Ⅱii）$c_1<0$，$c_2<0$の場合も（Ⅱii）および（Ⅱi）に帰着される。tが偶数の場合も全く同様にして示すことができる。よって$\mu=\bar{y}+c_2\ (x_t-\bar{x})>K$となるケースはない。

以上（Ⅰ），（Ⅱ）より$g(\mu)=\mu$の場合しか成立しないことが示された。この結果 Kalai and Stanford の *Lemma* は不要となるとともに，*Lemma* 3 の証明は全く容易になる。

に分けて考えなければならない。[2)]

まず$c_1>0$，$c_2>0$あるいは，$c_1<0$，$c_2<0$の場合は

$$\begin{cases} X(t)=A\{(c_1c_2)^{\frac{1}{2}t}+(-(c_1c_2))^{\frac{1}{2})t}\}+\bar{x} \\ Y(t)=\dfrac{1}{c_1}A\{(c_1c_2)^{\frac{1}{2}(t+1)}+(-(c_1c_2)^{\frac{1}{2}})^{t+1}\}+\bar{y} \end{cases} \tag{3}$$

となるか，あるいは

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{1}{c_2}A\{(c_1c_2)^{\frac{1}{2}(t+1)}+(-(c_1c_2)^{\frac{1}{2}})^{t+1}\}+\bar{x} \\ Y(t)=A\{(c_1c_2)^{\frac{1}{2}t}+(-(c_1c_2)^{\frac{1}{2}})^{t+1}\}+\bar{y} \end{cases} \tag{4}$$

となる。ただしAは任意定数である。

$c_1>0$，$c_2<0$あるいは$c_1<0$，$c_2>0$の場合の連立差分方程式(2)の解は

$$\begin{cases} X(t)=\{C(\sqrt{-c_1c_2})^t cos(90t)+C'(\sqrt{-c_1c_2})^t sin(90t)\}+\bar{y} \\ Y(t)=\dfrac{1}{c_1}\{C(\sqrt{-c_1c_2})^{t+1}cos(90(t+1))+C'(\sqrt{-c_1c_2})^{t+1} \\ \qquad sin(90(t+1))+\bar{y} \end{cases} \tag{5}$$

か，あるいは

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{1}{c_2}\{C(\sqrt{-c_1c_2})^{t+1}cos(90(t+1))+C'(\sqrt{-c_1c_2})^{t+1} \\ \qquad sin(90(t+1))\}+\bar{x} \\ Y(t)=\{C(\sqrt{-c_1c_2})^t cos(90t)+C'(\sqrt{-c_1c_2})^t sin(90t)\}+\bar{y} \end{cases} \tag{6}$$

で表わされる。ただし，C，C'は任意定数である。(3)，(4)の形の解による産出量の流れは初期値をどちらで与えるかによって４つの組み合わせが可能である。[3)] それらは$X(1)$，$Y(1)$をそれぞれ(3)で与えるか(4)で与えるかによって決

2）c_1，c_2のいずれかがゼロまたは双方ゼロの場合は，戦略としての意味がないので省略する。

3）連立差分方程式の解(３)においては，$X(1)=\bar{x}$，$Y=(1)=2Ac_2+\bar{y}=y_1$である。これは，Nash 均衡$(\bar{x},\ \bar{y})$に対して，企業２のみが均衡量から離れて産出量を変更したことを意味する。しかし産出量の変更は両企業同時に行われると仮定する方が一般的であろう。どちらも産出量を変更する組み合わせは５通りあることが容易に知られる。

まる。(4)において$X(1)$，(3)において$Y(1)$を初期値として与えた場合の一般解が(7)，(8)式である。

$$\begin{cases} X(t)=2Ac_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}+\bar{x} \\ Y(t)=2Ac_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t+1}{2}}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は奇数}) \qquad (7)$$

$$\begin{cases} X(t)=2Ac_1^{\frac{t}{2}}c_2^{\frac{t}{2}}+\bar{x} \\ Y(t)=2Ac_1^{\frac{t}{2}}c_2^{\frac{t}{2}}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は偶数}) \qquad (8)$$

この流れは次のように書くこともできる。

$$\begin{array}{ll} X(1)=2Ac_1+\bar{x}=x_1 & Y(1)=2Ac_2+\bar{y}=y_1 \\ X(2)=2Ac_1c_2+\bar{x} & Y(2)=2Ac_1c_2+\bar{y} \\ X(3)=2Ac_1^2c_2+\bar{x} & Y(3)=2Ac_1c_2^2+\bar{y} \\ X(4)=2Ac_1^2c_2^2+\bar{x} & Y(4)=2Ac_1^2c_2^2+\bar{y} \\ X(5)=2Ac_1^3c_2^2+\bar{x} & Y(5)=2Ac_1^2c_2^3+\bar{y} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

一方，$c_1>0$，$c_2<0$あるいは$c_1<0$，$c_2>0$の場合も同様に(5)，(6)式から産出量の流れを表わす式を求めると４通りあることがわかる。そのなかで(6)によって$X(1)$，$Y(1)$を与えた場合と，(5)によって$X(1)$，(6)によって$Y(1)$を与えた場合はそれぞれ以下のように(9)，(10)および(11)，(12)で示すことができる。

$$\begin{cases} X(t)=Cc_1^{\frac{t+1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}+\bar{x} \\ Y(t)=C'c_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は奇数}) \qquad (9)$$

$$\begin{cases} X(t)=C'c_1^{\frac{t}{2}}c_2^{\frac{t-2}{2}}\sqrt{-c_1c_2}+\bar{x} \\ Y(t)=Cc_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は偶数}) \qquad (10)$$

$$\begin{cases} X(t)=C'c_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}+\bar{x} \\ Y(t)=C'c_1^{\frac{t-1}{2}}c_2^{\frac{t-1}{2}}\sqrt{-c_1c_2}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は奇数}) \qquad (11)$$

$$\begin{cases} X(t)=C' c_1^{\frac{t}{2}} c_2^{\frac{t-2}{2}} \sqrt{-c_1 c_2}+\bar{x} \\ Y(t)=C' c_1^{\frac{t-2}{2}} c_2^{\frac{t}{2}} \sqrt{-c_1 c_2}+\bar{y} \end{cases} \quad (t\text{は偶数}) \tag{12}$$

以上のように(1)によって表わされる戦略は，結局(2)に変換され，そしてそれは８通りの産出量の流れになることがわかった。[4] これらの流れはすべて t →∞に対して$(x_t, y_t)\to(\bar{x}, \bar{y})$になることは明らかである。このような産出量の流れに対して，Nash 均衡戦略が一意に存在することが示される。すなわち次の定理が成立する。

定理１　需要関数が線型であるとき，次の(13)で表わされる戦略の組

$$\bar{x}=\frac{a(1+\alpha c_1)}{b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]}, \qquad \bar{y}=\frac{a(1+\alpha c_2)}{b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]}$$

$$\begin{aligned} &X_1=\bar{x}\in I & &Y_1=\bar{y}\in I \\ &X_{t+1}(\sigma_t)=\bar{x}+c_1(y_t-\bar{y}), & &Y_{t+1}(\sigma_t)=\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\sigma(t)=(x_1, y_1, x_2, y_2\cdots\cdots x_t, y_t)\in(I\times I)^t$$

は複占スーパーゲームの Nash 均衡戦略である。さらにベクトル$(\bar{x}, \bar{y})$は一意である。すなわちc_1，c_2およびαが与えられれば，他のどのようなベクトル$(\hat{x}, \hat{y})$もこのスーパーゲームの均衡戦略ではない。

証明）　Nash 均衡戦略は，企業１に対しては，

$$x_1(a-b(x_1+\bar{y}))+\sum_{t=2}^{\infty}\alpha^{t-1}x_t(a-b(x_t+\bar{y}+c_2(x_{t-1}-\bar{x}))) \tag{14}$$

を最大にする戦略である。まずこの Nash 均衡戦略が$\bar{X}=(\bar{x}, \bar{x}, \cdots\cdots, \bar{x}, \cdots\cdots)$であることを以下に示そう。

いま任意の産出量ベクトル$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_t, \cdots\cdots)\in I^{\infty}$に対して，

4）ここで注意しなければならないことは，A，C，C'は(3)，(4)，(5)，(6)においては任意定数であるけれども，産出量の流れはすべてのtに対して$(x_t, y_t)\in I^2$という制約があるため，実際にはかなりの制約を受けるということである。すなわちここで考察の対象となる両企業の産出量の流れ$\sigma_\infty=(x_1, y_1, x_2, y_2\cdots\cdots x_t, y_t, \cdots\cdots)$は，(3)，(4)，(5)，(6)のいずれかをみたす解で$\sigma_\infty\in I^{\infty}$をみたすものにかぎられるということである。

$$H_N(X)=x_1(a-b(x_1+\bar{y}))+\sum_{t=2}^{N}\alpha^{t-1}x_t(a-b(x_t+\bar{y}+c_2(x_{t-1}-\bar{x})))$$

とすれば，⒁の最大化問題は結局$X\in I^{\infty}$に対して$H_{\infty}(\overline{X})\geqq H_{\infty}(X)$を示すことに帰着される。そこで

$$\overline{H}_N(X)=H_N(X)-\alpha^N bc_2\bar{x}x_N,\qquad \overline{X}=(\bar{x},\ \bar{x},\ \cdots\cdots,\ \bar{x},\ \cdots\cdots),$$

$$H_{\infty}(X)=lim_{N\to\infty}H_N(X)$$

と定義し，あるXに対して$H_{\infty}(X)>H_{\infty}(\overline{X})$としよう。この仮定が矛盾を導けば，われわれは目的を達成する。

いま$\delta>0$に対して，$H_{\infty}(\overline{X})+\delta=H_{\infty}(X)$となるとしよう。そのときすべての$(x_{t-1},\ x_t)\in I^2$に対して$|x_t(a-b(x_t+\bar{y}+c_2(x_{t-1}-\bar{x})))|\leqq m$となる$m$が存在することは明らかである。そこで$\nu\geqq N_1$ならば$m\sum_{t=\nu}^{\infty}\alpha^{t-1}\leqq\delta/8$となる$N_1$，および$\nu\geqq N_2$ならば，すべての$x_t\in I$に対して，$\alpha^{\nu}bc_2\bar{x}x_{\nu}\leqq\delta/8$となる$N_2$を選び，$N=max\{N_1,\ N_2\}$としよう。そのとき$\nu\geqq N$に対して

$$|H_{\infty}(\overline{X})-H_{\nu}(\overline{X})|=|\sum_{t=\nu}^{\infty}\alpha^t x_{t+1}(a-b(x_{t+1}+\bar{y}+c_2(x_t-\bar{x})))|$$
$$\leqq m\sum_{t=\nu}^{\infty}\alpha^t x_{t+1}\leqq\delta/8$$
$$|H_{\infty}(X)-H_{\nu}(X)|\leqq\delta/8$$
$$|H_{\nu}(\overline{X})-\overline{H}_{\nu}(\overline{X})|=\alpha^N bc_2\bar{x}x_N\leqq\delta/8$$
$$|H_{\nu}(X)-\overline{H}_{\nu}(X)|=\alpha^N bc_2\bar{x}x_N\leqq\delta/8$$

となる。これらより

$$\delta/4\geqq|H_{\infty}(\overline{X})-H_{\nu}(\overline{X})|+|H_{\nu}(\overline{X})-\overline{H}_{\nu}(\overline{X})|$$
$$\geqq|H_{\infty}(\overline{X})-\overline{H}_{\nu}(\overline{X})|$$
$$\delta/4\geqq|H_{\infty}(X)-H_{\nu}(X)|+|H_{\nu}(X)-\overline{H}_{\nu}(X)|$$
$$\geqq|H_{\infty}(X)-\overline{H}_{\nu}(X)|$$

を得る。さらにこの二式より

$$\delta/2\geqq|H_{\infty}(\overline{X})-\overline{H}_{\nu}(\overline{X})|+|H_{\infty}(X)-\overline{H}_{\nu}(X)|$$
$$\geqq|\overline{H}_{\nu}(\overline{X})+\delta-\overline{H}_{\nu}(\overline{X})|$$

が導かれる。もしこのようなνに対して$\overline{H}_{\nu}(\overline{X})\geqq\overline{H}(X)$ならば，仮定$H_{\infty}(\overline{X})+\delta=H_{\infty}(X)$に矛盾する。以下$\overline{H}_{\nu}(\overline{X})\geqq\overline{H}_{\nu}(X)$を示そう。

$\overline{H}_{\nu}$の一階の最大化条件は

$$\frac{\partial \overline{H}_\nu(X)}{\partial x_1}=-2bx_1+a-b\bar{y}-\alpha bc_2x_2=0$$

$$\frac{\partial \overline{H}_\nu(X)}{\partial x_t}=-2bx_t+a-b\bar{y}-\alpha bc_2x_{t+1}-bc_2(x_{t-1}-\bar{x})=0$$

$$t=2,\ \cdots\cdots,\ \nu-1 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \overline{H}_\nu(X)}{\partial x_\nu}=-2bx_\nu+a-b\bar{y}-\alpha bc_2\bar{x}-bc_2(x_{\nu-1}-\bar{x})=0$$

である。$\bar{y}=a(1+\alpha c_2)/b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]$とすれば，計算によって$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_\nu=\bar{x}=a(1+\alpha c_1)/b[(2+\alpha c_1)(2+\alpha c_2)-1]$が(15)の解になることが確かめられる。さらにこの解が二階の条件をもみたすことを示すことができる。まず，(15)によって$\overline{H}_\nu$のヘッセ行列をF_νとすると，

$$F_\nu=\begin{pmatrix} -2b & -\alpha bc_2 & 0 & & & 0 & \\ -\alpha bc_2 & -2\alpha b & -\alpha^2bc_2 & & & & \\ 0 & -\alpha^2bc_2 & -2\alpha^2b & -\alpha^3bc_2 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & -\alpha^{\nu-2}bc_2 & -2\alpha^{\nu-2}b & -\alpha^{\nu-1}bc_2 \\ & & & & & -\alpha^{\nu-1}bc_2 & -2\alpha^{\nu-1}b \end{pmatrix}$$

となる。行列の性質より，$t=1$，……，νに対して，

$$|F_t|=(-1)^tB\left.\begin{vmatrix} 2 & c_2 & 0 & & & 0 \\ \alpha c_2 & 2 & c_2 & & & \\ 0 & \alpha c_2 & 2 & c_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & \alpha c_2 & 2 & c_2 \\ & & & 0 & \alpha c_2 & 2 \end{vmatrix}\right\}t$$

が得られる。ただし$B=(-b)(-\alpha b)\cdots\cdots(-\alpha^{t-1}b)=\alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}b$である。そこで$F_t$について

$$\begin{aligned} |F_t|&<0 \qquad (t\text{は奇数}) \\ |F_t|&>0 \qquad (t\text{は偶数}) \end{aligned} \qquad (16)$$

が成り立てば，F_tは負定値符号行列となり，$F_\nu(X)$が$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_\nu=\bar{x}$

において最大となる。(16)は次のように帰納法で示される。 $|F_1|=-2$, $|F_2|=4-\alpha c_2^2>0$。t が3以上の任意の奇数で $|F_{t-2}|<0$, $|F_{t-1}|>0$ とする。そのとき $|F_t|/(-1)^t B=|\overline{F}_t|$ とおけば, $|\overline{F}_{t-2}|<0$, $|\overline{F}_{t-1}|>0$ となり，さらに

$$|\overline{F}_t|=(-1)^{2t-1}c_2\begin{vmatrix} 2 & c_2 & 0 & & & \\ \alpha c_2 & 2 & c_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & \alpha c_2 & 2 & c_2 \\ & & & & 0 & \alpha c_2 \end{vmatrix}+(-1)^{2t-2}2\begin{vmatrix} 2 & c_2 & 0 & & \\ \alpha c_2 & 2 & c_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 2\alpha c_2 & 2 & c_2 \\ & & & \alpha c_2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2|\overline{F}_{t-1}|-\alpha c_2^2|\overline{F}_{t-2}|>2|\overline{F}_{t-1}|-|\overline{F}_{t-2}|>|\overline{F}_{t-1}|>0$$

となる。よって $|F_t|<0$. t が偶数の場合も同様にして証明される。

一意性は次のように証明することができる。

$$\begin{aligned} G(x,\ y,\ \bar{x},\ \bar{y})&=x(a-b(x+\bar{y}))+\sum_{t=2}^{\infty}\alpha^{t-1}x(a-b(x+\bar{y}+c_2(x-\bar{x}))) \\ I(x,\ y,\ \bar{x},\ \bar{y})&=y(a-b(y+\bar{x}))+\sum_{t=2}^{\infty}\alpha^{t-1}y(a-b(y+\bar{x}+c_1(y-\bar{y}))) \end{aligned} \tag{17}$$

とおこう。そのとき Nash 均衡戦略は $\partial G/\partial x=0$, $\partial I/\partial y=0$ をみたす $(\bar{x},\ \bar{y})$ である。

これは

$$G_x=\frac{\partial G}{\partial x}\bigg|_{x=\bar{x}}=0,\ I_y=\frac{\partial I}{\partial y}\bigg|_{y=\bar{y}}=0 \tag{18}$$

を意味する。したがって，もし $(\hat{x},\ \hat{y})$ が Nash 均衡戦略であるならば

$$G_x'=\frac{\partial G(x,\ y,\ \hat{x},\ \hat{y})}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}}=0,\quad I_y'=\frac{\partial I(x,\ y,\ \hat{x},\ \hat{y})}{\partial y}\bigg|_{y=\hat{y}}=0 \tag{19}$$

をみたす。(17)の G および I は $\bar{x}$ と $\bar{y}$ に関して線型であるから，(18)の G_x, I_y も $\bar{x}$, $\bar{y}$ に関して線型となり，G'_x, I'_y も $\hat{x}$, $\hat{y}$ に関して線型となる。よって(18)をみたす $(\bar{x},\ \bar{y})$ と(19)をみたす $(\hat{x},\ \hat{y})$ は一致する。

証明終)

Ⅲ．加速化された複占スーパーゲームと完全ε均衡

前節では複占ゲームが1年単位でプレーされる単一期間モデルを考察したが，本節では1年に何回もプレーされる小ゲームの均衡について考えてみよう。

ゲームが年にT回に分けてプレーされるとき（以下T回小ゲームという），年間割引率，および年間需要量を次のように分割しよう。T回小ゲームの割引率α_Tを年間利子率rに対して$\alpha_T=\alpha^{1/T}=(1+r)^{-\frac{1}{T}}$とする。また需要曲線$p_T$を年間需要曲線$p=a-b(x+y)$に対して，$p_T(x+y)=p(T(x+y))=a-bT(x+y)$と表わすことにする。ここで$T-t$（$t=0$，1，……，$T-1$）回目の需要量$\hat{x}_{T-t}$は，需要曲線$p_{T-t}$における需要量$x_{T-t}$から$p_{T-t-1}$における需要量$x_{T-t-1}$を引いたものとして，すなわち$\hat{x}_{T-t}=x_{T-t}-x_{T-t-1}$として表わされることに注意しよう。$\hat{y}_{T-t}$についても同様である。これらの$\hat{x}_{T-t}$，$\hat{y}_{T-t}$に対して（$\hat{x}_{T-t}$，$\hat{y}_{T-t}$）$\in$〔0，$K/T$〕^{2}（$t=0$，1，……，$T-1$）としよう。[5] 以上の定義によって，年間の最大利潤はT回小ゲームの利潤の総和として表わされることを以下のように示すことができる。

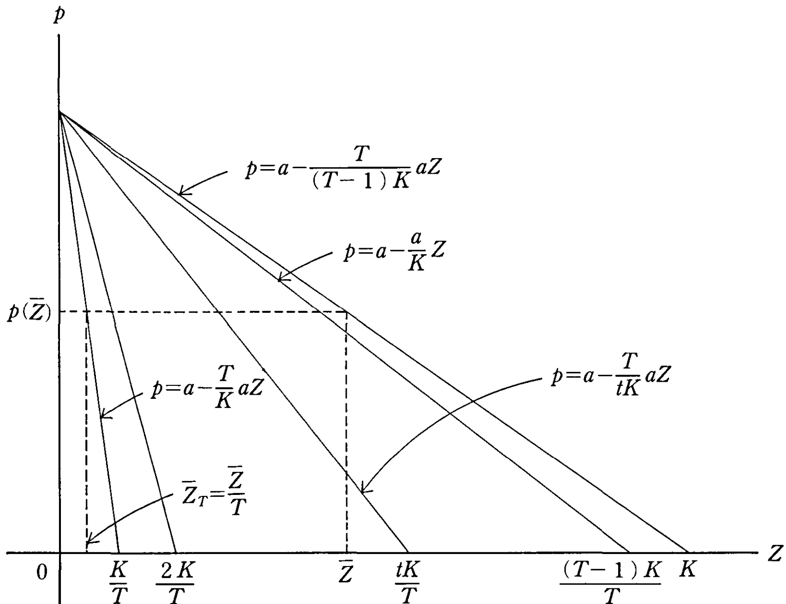
企業1の年間最大利潤$\bar{\pi}$は定理1により，

$$\bar{\pi}=\bar{x}(a-b(\bar{x}+\bar{y}))+\sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}\bar{x}(a-b(x+y))=\frac{1}{1-\alpha}\bar{x}(a-b(x+y))$$

である。一方T回小ゲームの第1回目の小ゲームの最大利潤$\bar{\pi}_T$を与える戦略(以下T戦略とよぶ）は，以下の定理2で与えられるように，

$$x_1=\bar{x}_T=\frac{a(1+\alpha_T c_1)}{bT[(2+\alpha_T c_1)(2+\alpha_T c_2)-1]} \tag{20}$$

5）Tが大きくなく，年間の生産はT回に分けて行わなければならないような生産期間あるいは生産設備の制約があるならば，$(x,\ y)\in I^2=$〔0，K〕^{2}であることから，この仮定は不要である。しかし後の定理2を成立させるTがきわめて大きい場合には，生産設備の制約として解釈するのは難しい。なぜならその場合には産出量および生産設備はきわめて小さくなり，経済的意味がほとんどなくなるからである。



図－1

$$y_1=\bar{y}_T=\frac{a(1+\alpha_T c_2)}{bT[(2+\alpha_T c_1)(2+\alpha_T c_2)-1]}$$

$$X_{t+1}=\bar{x}_T+c_1(y_t-\bar{y}_T),\qquad y_{t+1}=\bar{y}_T+c_2(x_t-\bar{x}_T)$$

であり,[6)]

$$\bar{\pi}_T=\frac{1}{1-\alpha_T}\bar{x}_T\ (a-b(\bar{x}_T+\bar{y}_T))$$

である。(図－1参照。なお図－1では $K=a/b$, $Z=x+y$である。) また第2回目以後の最大利潤は(21)のように表わされる。ここで$\bar{\pi}_{T-t+1}$ ($t=1$, 2, ……T) は$t+1$回目の利潤を表わす。またπ_{T-t+1}は需要曲線が$p=a-(aT/tK)Z$である場合の最大利潤を表わし,

$$\pi_{T-t+1}=\{1/(1-\alpha_{T-t+1})\}\{\bar{x}_{T-t+1}\ (a-b(\bar{x}_{T-t+1}+\bar{y}_{T-t+1}))\}$$

---

6) 厳密には(20)におけるx_t, y_tはx_t^T, y_t^Tの記号を使用することによって, (1)におけるx_t, y_tと区別しなければならないが, 以下では混乱することはないので, 煩雑さをさけるため添字Tを省略する。

である。ただし$\pi_1=\bar{\pi}$である。

$$
\begin{aligned}
&\bar{\pi}_T=\frac{1}{1-\alpha_T}\bar{x}_T\ (a-b(\bar{x}_T+\bar{y}_T))\\
&\bar{\pi}_{T-1}=\pi_{T-1}-\bar{\pi}_T\\
&\ \vdots \qquad \vdots\\
&\bar{\pi}_{T-t+1}=\pi_{T-t+1}-\bar{\pi}_{T-t}\\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\bar{\pi}_1=\pi_1-\pi_2=\bar{\pi}-\bar{\pi}_2
\end{aligned}
\tag{21}
$$

したがって

$$\sum_{t=1}^{T}\bar{\pi}_{T-t+1}=\bar{\pi}$$

となることは明らかである。

つぎにわれわれは完全εと均衡を定義し，それにもとづいて定理2を与えよう。

定義2　完全ε均衡戦略とは，$\varepsilon>0$が与えられたとき，任意の小ゲームにおいて相手の戦略から誘発された戦略によって得られた利得がその小ゲームの最大利得のε内にあるようなスーパーゲームの戦略の組である。

定理2　任意のTに対して，任意のT戦略はT回小ゲームの Nash 均衡戦略である。さらに，$\varepsilon>0$，c_1，$c_2\in[-1,\ 1]$および$\alpha\in[0,\ 1)$が与えられたとき，$T\geqq T_0$に対してそれに対応する任意の戦略の組がT回小ゲームの完全ε均衡戦略となるようなT_0が存在する。

定理2の証明の準備として，次の *Lemma* を証明しておく。

Lemma　GおよびHを集合S上の実数値有界関数とする。そのとき，すべての$s\in S$とある$\varepsilon>0$に対して，$|G(s)-H(s)|\leqq\varepsilon$であるならば，

$$\left|\sup_{s\in S}G(s)-\sup_{s\in S}H(s)\right|\leqq\varepsilon$$

である。

証明）　すべての$s\in S$に対して

$$\sup_{s\in S}|G(s)-H(s)|\geqq\left|\sup_{s\in S}G(s)-\sup_{s\in S}H(s)\right|$$

が成立つことは容易にわかる。仮定より，すべての$s \in S$に対して｜$H(s) - G(s)$｜$\leqq \varepsilon$であるから

$$\varepsilon \geqq \sup_{s \in S} | H(s) - G(s) | \geqq | \sup_{s \in S} G(s) - \sup_{s \in S} H(s) |$$

である。証明終）

定理２の証明）(20)に示されるT戦略が Nash 均衡戦略であることを示すには，定理１においてbをbT，αをα_Tに置きかえるだけよいことが，容易に示される。

そこで，任意の初期値（$\tilde{x}$，$\tilde{y}$）$\in$〔０，K〕^{2}に対して，あるT_0が存在して，$T \geqq T_0$ならば，戦略の組

$$x_1 = \tilde{x},\ y_1 = \tilde{y} \tag{22}$$

$$x_{t+1}\ (\sigma_t) = \bar{x}_T + c_1 (y_t - \bar{y}_T), \qquad y_{t+1}\ (\sigma_t) = \bar{y}_T + c_2 (x_t - \bar{x}_T)$$

によって得られる利潤は，T回小ゲームの Nash 均衡戦略による利潤のε内にあることを示そう。いま，企業１の産出量の流れ$X = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots) \in$〔０，$K/T$〕$^\infty$とし，企業２が初期産出量を$\bar{y}_T$，それ以後の産出量$y_{t+1}$を

$$y_{t+1}\ (x_t)\ = \bar{y}_T + c_2\ (x_t - \bar{x}_T)$$

である戦略をとるという仮定のもとで，企業１が戦略Xをとったときの利潤を$H(X)$とする。そのとき，x_1，$\bar{y}_T$，$\hat{y} \in$〔０，a/bT〕であることより，

$$| G(X) - H(X) | = | x_1 - bT(\hat{y} - \bar{y}_T)\ \ | \leqq a^2/bT \tag{23}$$

となることがわかる。さらに，両企業が(22)に示される戦略をとったとき，企業１が獲得する利潤を$\bar{H}$とすると

$$\bar{H} = \tilde{x}(a - bT(\tilde{x} + \tilde{y})) + \alpha x_2 \{a - bT(x_2 + \bar{y}_T + c_2 (\tilde{x} - \bar{x}_T)\}\ + \cdots \tag{24}$$

と表わされる。結局定理２の証明は，Tを十分大きくとることによって｜$H - \sup G(X)$｜が任意に小さくなることを示すことに帰着される。そのため次の不等式を考えよう。

$$| \bar{H} - \sup H(X) | \leqq | \bar{H} - \sup G(X) | + | \sup G(X) - \sup H(X) |$$

Lemma と(23)によって，Tを十分大きくとれば(24)の右辺の第２項は任意に小さくすることができる。したがって十分大きいTに対して右辺の第１項が任意に小さくなることを示せば証明は完成する。それは以下のように示すこと

ができる。

最初に示したように

$$supG(X)=\bar{x}_T\ (a-bT(\bar{x}_T+\bar{y}_T))\ +\alpha\bar{x}_T\ (a-bT(\bar{x}_T+\bar{y}_T))\ +\cdots\cdots$$

であるから(24)の$\overline{H}$の第$i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$項から$supG(X)$の第$i$項をさし引いた値の絶対値を$J_i$と定義する。まず

$$J_1=|\hat{x}=(a-bT(\hat{x}+\hat{y})-\bar{x}_T\ (a-bT(\bar{x}_T+\bar{y}_T))\ |$$
$$=|a(\hat{x}-\bar{x}_T)\ -bT\{(\hat{x}^2-\bar{x}_T^2)\ +\ (\hat{x}\hat{y}+\bar{x}_T\bar{y}_T)\}\ |$$

となる。$\hat{x}$, x_2, $\hat{y}$, $\bar{y}_T\in[0,\ a/bT]$より，$\hat{x}-\bar{x}_T\leqq a/bT$, $\hat{x}^2-\bar{x}_T^2\leqq(a/bT)^2$, $\hat{x}\hat{y}-\bar{x}_T\bar{y}_T\leqq(a/bT)^2$, および$a/b>1$を合わせて考えれば，十分大きな$T$に対して

$$J_1\leqq\frac{1}{T}(\frac{a}{b})+\frac{1}{T}+(\frac{a^2}{b^2})\ +\frac{1}{T}(\frac{a^2}{b^2})\ \leqq\frac{1}{T}(\frac{3a^2}{b^2})$$

また

$$J_2=|\alpha_Tx_2\ \{a-bT(x_2+\bar{y}_T+c_2(\hat{x}-\bar{x}_T))\}-\alpha_T\bar{x}_T(a-bT(\bar{x}_T+\bar{y}_T))\ |$$
$$=|-\alpha_Tc_1c_2bT\bar{x}_T(\hat{x}-\bar{x}_T)-\alpha_Tc_1c_2bT\bar{x}_T(\hat{y}-\bar{y}_T)+\alpha_Tc_1c_2a(\hat{x}-\bar{x}_T)$$
$$+\alpha_Tc_1c_2bT(\hat{x}-\bar{x}_T)\ \bar{x}_T+\alpha_Tc_1^2c_2^2bT(\hat{x}-\bar{x}_T)^2-\alpha_Tc_1c_2bT(x-\bar{x}_T)$$
$$\bar{y}_T-\alpha c_1^2c_2^2bT(\hat{x}-\bar{x}_T)\ (\hat{y}-\bar{y}_T)\ |$$

となる。ここで $max\ \{|c_1|,|c_2|\}=\bar{c}$とおく。そのとき$c_1,c_2\in[-1,1]$であるから，

$$\bar{c}\geqq c_1c_2,\quad \bar{c}\geqq c_1^2c_2^2 \tag{25}$$

である。この(25)と，J_2の右辺の第二式の各項がすべてa^2/b^2Tより小さいか等しいことを合わせて考えれば

$$J_2\leqq\frac{1}{T}\alpha_T\bar{c}(\frac{7a^2}{b})$$

を示すことができる。このようにして

$$J_i\leqq\frac{1}{T}(\alpha_T\bar{c})^{i-1}\ (\frac{7a^2}{b^2})\qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

を導くことができる。したがって

$$|\overline{H}-supG(X)|\leqq J_1+J_2+\cdots\cdots$$

$$\leqq \frac{1}{T}\frac{7a^2}{b^2}\left(1+\alpha_T\bar{c}+(\alpha_T\bar{c})^2+\cdots\cdots\right) \tag{26}$$

$$\leqq \frac{1}{T}\frac{7a^2}{b^2}\sum_{t=1}^{\infty}(\alpha_T\bar{c})^{t-1}=\frac{1}{T}\frac{7a^2}{b^2}\frac{1}{1-\alpha_T\bar{c}}$$

となる。Tを十分に大きくとれば(26)の左辺を任意に小さくすることができることは明らかである。証明終)

Ⅳ．結び

以上，われわれは単一期間スーパーゲームにおける Nash 均衡戦略の存在および加速化されたスーパーゲームにおける完全ε均衡戦略の存在を示した。以下，Kalai and Stanford モデルの特徴と若干の問題点を述べて結びとしたい。

まず，(1)に定義された戦略は，伝統的寡占理論の中心問題の一つである推測的変化とゲーム理論の意志決定変数である戦略を結びつけたもので，推測的変化に規定された戦略ということができる。このような試みは初めてのものであり，寡占理論の発展の方向を探す一つの手がかりを示しているという意味で，意義あるものといってよい。

しかしこのモデルについて全く問題がないわけではない。以下三つのことを指摘しておこう。第１は戦略についてである。(1)に示されるような戦略は，初期の戦略X_1が与えられれば，それ以後の期間の戦略X_2，X_3，……が決まる。よって戦略X＝(X_1，X_2，……）はX_1によって決まるため，戦略の選択範囲がきわめて限られたものになっているということができる。第２は推測的変化についてである。$X_t(\sigma_t)=\bar{x}+c_1(y_t-\bar{y})$は企業１の戦略であるとともに，企業２からみて企業１がとると推測される戦略でもあるということから，c_1が推測的変化を表していると解釈することができる。しかし，これは伝統的寡占理論で取扱われる推測的変化とは厳密な意味で異っている。というのは，前者のc_iは自己の前期の産出量の変化に対する相手企業の今期の産出量の変化の予測であり，後者は自己の今期の産出量の変化に対

する相手企業の今期の産出量の変化の予測であるからである。したがって後者の意味ではこのモデルの推測的変化はゼロと考えられ，それは Cournot 的推測とみなすことができるのである。当然このモデルの拡張の方向としてより一般的な推測的変化の導入が考えられるであろう。第３はc_iの範囲についてである。c_i∈〔－１，１〕は仮定としてきわめて厳しいといえる。なぜなら寡占・複占における企業行動はきわめて戦略的側面をもっており，利潤の減少が予想されるにもかかわらず，報復措置をとることもありうるからである。その場合はc_iは１以上の値をとることも十分予想される。このケースも今後検討さるべき課題といえる。

参　考　文　献

Benoit, J. P., and V. Krishina (1985), "Finitery Repeated Games," *Econometrica,* 53, 905 － 922.

Boyer, M and M. Moreaux. (1983), "Conjectures, Rationality and Duopoly Theory," *International Journal of Industrial Organization,* 1, 23 － 41.

Bresnahan, T. (1981), "Duopoly Models with Consistent Conjectures," *The American Economic Review,* 71, 934 － 945.

Cyert, R. and M. Degroot (1970), "Multperiod Decision Models with Alternative Choice as a Solution to the Duopoly Problem," *Quartely Journal of Economics,* 84, 410 － 429.

Friedman, J. (1968), "Reaction Function and the Theory of Duopoly," *Review of Economic Studies,* 35, 257 － 272.

Friedman, J. (1977), *Oligopoly and the Theory of Games,* North Holland.

Kalai, E. and W. Stanford (1985), "Conjectural Variations Strategies in Accelerafed Cournot Games," *International Journal of Iudustrial Organization,* 3, 133 － 152.

Kamien, M. I. and N. L. Schwartz (1983), "Conjectural Variations," *Canadian Journal of Economics,* 13, 191 － 211.

Laitner, J. (1980), "Rational Duopoly Equilibrium," *Qurterly Journal of Economics,* 95, 641 – 662.

Perry, M. K. (1982), "Oligopoly and Consistent Conjectural Variations," *Bell Journal of Economics,* 13, 197 – 205.