「あまりのあるわり算」

——その意味と表記について——

三　野　栄　治*

(昭和60年10月31日受理)

Division With Remainders : Its Semantics and Syntax

Eiji MINO

(Received October 31, 1985)

I　は じ め に

小学校第3学年の学習内容に，「あまりのあるわり算」がある。たとえば，

『わり算の式で，次のように書きます。

30÷8＝3あまり6

「三十 わる 八は，三あまり六」　』（A社　3上，p.51）

という，おなじみの内容である。

これに関連した次のような質問を，学生(当大学　小学校教員養成課程・数学選修　3年次生）にした。

「　30÷8＝3あまり6

33÷9＝3あまり6

この右辺どうしは等しい。

したがって，30÷8＝33÷9

———どこが正しく，どこが正しくないか。また，なぜ？」

解答は次のようである。

- 「余り」は，8に対する6と，9に対する6で，性質を異にする。だから，除数が違うのに2つを等しいとするところに問題がある。
- 30÷8及び33÷9において，その解を余りを用いて表わしているところに問題点がある。
- 答が同じであっても，30÷8と33÷9は等しくない。
- 規準となる単位が一定でない。
- 商3の意味がちがう。∴正しくない。
- 30÷8は$\frac{30}{8}$，　33÷9は$\frac{33}{9}$で表される。$\frac{30}{8} \neq \frac{33}{9}$，したがって等しくない。

＊長崎大学教育学部数学教室

・除法の解答における数字は加法や減法における数字とははたす機能（その数字が意味すること）が違うように思える。

等々（原文のまま)。

II　意味と表記

たとえば,「自然数」を考えよう。これは抽象的概念である。われわれは，この概念が抽象であるがゆえに，それに記号（書きことばや話しことばという〝形体〟）を与え，その情報の伝達を可能にする。

情報の受け手からいえば,その記号を通して思考の内的世界の数実体をとらえ,したがってまた，外的世界との対応も可能にする。

いわば，概念構造の「何」を，記号などの「どのように」によって記号体系化し，その「どのように」の記号体系を通して「何」を認知していくわけである。この記号体系はわれわれの思考の内的世界と外的世界の接合点であり，しかも，その記号体系においてすべての情報伝達がなされる。

記号体系は孤立して存在するものではないことは言うまでもない。概念構造があってのその記号体系であり,いわば表層を形成するものである。数学情報の意義は概念構造においてあるものであるが，数学的記号体系において数学的操作がなされ伝達される。直接的には，数学的記号体系が対象言語となる。数学の対象言語は，本来，暗黙のうちに母国語の中にかたちづくられてきている。それは，特定された特別な性質をもつものとなり，日常的言語とは異なっている。この特別な性質を与えられた数学の対象言語――数学的記号体系――を通して概念構造をとらえたり，外的世界と対応づけたりするには，したがって，対象言語を説明したり解釈したりするための言語の必要性を生む。それに用いられる言語は日常的な言語である。あるいは，形式ばらない図表であったりする。

数学教育においてまず大事なことは，数学の意味がわかること（概念構造）であり，それを説明したり解釈したりすることができることである。もちろん，これは日常的な，また形式ばらない言語においてなされる。この豊かさは，結局，記号体系を生み出したり，的確に取り扱ったりすることを可能にする。また，陥りがちな無内容な記号操作に終始することをも防ぐ。

その上に立って，徐々に子ども達を数学の言語の世界に導き入れていくことが数学教育の大きな仕事になる。数学の対象言語と，説明したり解釈したりするときに用いる言語との区別に十分な配慮を示すことが，ここでの中心的仕事である。わが国の子ども達にとっては，数学的言語が日本語の中にかたちづくられたものでないだけに，説明・解釈のための言語（メタ言語）がとりわけ重みをもつことになる。

また，数学学習をむずかしくしているものに，意味することとその記号体系との対応が一対一対応であってほしいのに現実には必ずしもそうはなっていない，という問題もある。たとえば，多義性・同義性・文脈において意味をもつものが文脈を欠いたり不十分であったりするためのあいまいさ等々である。初学者にとっては大きな問題点である。

数学教育においては，数学的意味（概念構造）とその記号体系（対象言語）だけでなく，それらを理解したり，説明・解釈などを行うためのいろいろな表現や記号（メタ記号）を

も用いる。しかも，すべての数学にわたって用いられる。数学教育において取り扱われるこれらのものを「数学教育における表記」とよぶことにする。

III 一つの例

算数教科書から一つの例をとり上げる。小学校第1学年の初めて「しき」が取り扱われる部分である。

『 みんなで なんびき いますか。 …………………………①

…………………②

3と 2を あわせると 5に なります。…………………③

3 ＋ 2＝5……④ こたえ 5ひき …………………⑥

3たす2は5……⑤

(ただし，番号①〜⑥は筆者による)』(A社 1ねん，p.27)

数学の対象言語は④である。これが数学での考察対象となるものである。とはいえ，それは数学的概念の世界①，②があっての記号である。「同時共存の2つの集合があって，それを1つの集合とみなすこと」という意味の反映である。数学的概念とその定式化の間にあって説明を与えるのが③である。この説明には，説明者（教科書の著者）の数学認識が表れる。したがって，説明に表れる数学認識が学習者の理解を方向づける力をもちうるものともなる。

たとえば，③は②からの直接の橋渡しではなく，すでに「一般」を認識しての説明である。「1つの集合とみなすこと」を「あわせる」ということばによってとらえ，しかも，「……になります」と結果を与える立場を表明している。そして，

3と2をあわせる ⟷ 3＋2
5になります ⟷ ＝5

である〔注1〕。

等号「＝」とは，等しいこと——数学的な記号ではなく，意味的な記号であって，2つのものが変わりがないという性質を指摘することを意味する——の表現である。しかし，結果を与えるもの——ちょうど〝計算機上の操作〟によって得られるもの——としても永く用いられてきているのも事実である（たとえば，第一期国定教科書『尋常小学算術書 第1学年教師用』明治38年，p.8）。前者は関係概念であり，後者は操作概念である。

もし，等号「＝」に対して，子ども達が後者の認識のもとにくり返し置かれるなら，子ども達のノートにしばしば見受けられる次のような誤った書き方は，決して不思議なもの

とも，不自然なものとも思えなくなる。

「３×４＝12＋５＝17

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 1\ 2 \\ +\ \ 5 \\ \hline 1\ 7 \end{array}$$

３×４は12になるでしょう。だから３×４＝12
それに５をたして17
しきにすると，　　　　３×４＝12＋５＝17
　だって，（左の筆算形式の）「せん―――」はけいさんをすることだから「＝」と同じことです。「せん―――」のかわりに「＝」をつかうと，しきになります。
３×４＝12＋５＝17　　　　　　　　　　　　　　」

教科書の『８＋３＝11
　　　　８に２をたして10
　　　　10と１で11　　　　　　　　』（B社　１ねん，p. 60）
という記述もまた，計算機上の操作による説明であるから，注意を要する。

筆算形式といわれるものは，意味的・操作的な形式であり，作業のための形式である。数学的に特定された「式」と，作業上の形式とは区別されなければならないものであって，数学教育上の大切な留意点である。

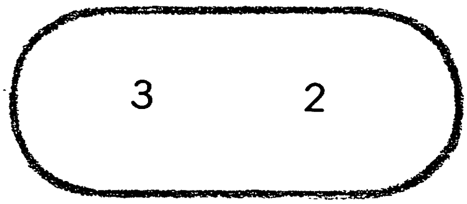
等号「＝」を結果を与える行為だと考えてしまうなら

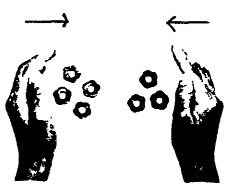
５＝２＋３

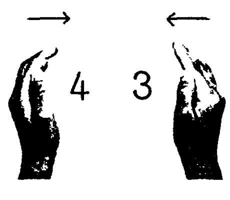
を左から読んでいく（先例の，読み方⑤と同じように）とき，この式は意味をなさなくなるだろう。

等号「＝」はかなりむずかしい概念の形体化であり，学習者のみならず指導する側にとっても要注意である。

次に，③の「３と２をあわせると５になります」の「あわせる」を考える。







左図は，②と，それと同じ立場にある別の教科書のもの（C社　１ねん，p. 33），である。

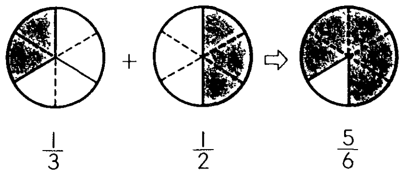
ここでのわれわれの数学は「ものの数（個数）」を考えることである。そこで，これらの左図で，りすの絵やおはじきの絵に替えて，直ちにそれらの「ものの数」であるところ

の３と２，４と３をそれぞれ置いてみよう。それが右図である〔注２〕。

さて，この右図で「３と２を「あわせる」」(また，「４と３を「あわせる」」)と，どうか――「32」であることを印象づける。「３と２を（この順序に）｜「あわせ」」て三十二という数の表記とすることにする，という言い方も可能であるからである。右下図では，より一層鮮明に，四十三の表記「43」を意図させられる。

「あわせる」ということばを用いながら，概念構造や文脈のちがいで異なる意味をもちうることがわかる。事柄を正しく理解していくというのは，まず考察対象や文脈が的確に把握されているということである。

『　図を見て，$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ の計算のしかたを考えましょう。



』

この例では，「等しい大きさ」の円で考えていく，という文脈があるから，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

という式が考察可能であり，$\frac{5}{6}$ も意味をもつ〔注３〕。

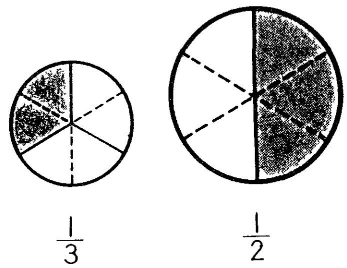
もし，円の大きさが異なれば（たとえば，右図），

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

はむずかしいものとなる。したがってまた

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

は正しいのだろうか，考え込まされよう。



このような文脈の問題や，対象言語とメタ言語の区別の問題は，言葉尻をとらえての議論でも，議論をむずかしくしているのでもない。子ども達が数学の世界に入っていくときの大きな関門であるからである。

このような問題を考えるとき役立ちそうな話題がある。

〝なぞなぞ〟遊び――

・２と３はどちらが大きい？
・８の半分は？
・１－１（いち　ひく　いち）は？

などである。これらは「３と２をあわせると何？」とまさに同一の話題である。

数学とは何か，を垣間見させてくれるたいへん興味ある，しかも大事な〝なぞなぞ〟であるといえる。

算数学習の出発点である第１学年に，「数学的な考え」のための大切な視点がいくつかすでに現われていることに注目しなければならない。

このような視点を通して，「あまりのあるわり算」について，その表記や意味するものについて考えていくことにする。

Ⅳ　「あまりのあるわり算」――現状と問題点

既述の通り，小学校第３学年の学習内容である。第一期国定教科書以来，ずっと第３学年の内容である。次いで，第５学年において，拡張された「あまりのあるわり算」が扱われる。

教科書から，まず概念と表記をとり上げる。

例１　『みかんを１ふくろに４こずつつめます。

　　　㋐みかん20こでは何ふくろできるでしょう。

　　　㋑みかん30こではどうでしょう。

　　30こでは，７ふくろできて，２こあまります。

　　このようなとき，つぎのようにかきます。

　　　30÷４＝７…２

　　「30わる４は７あまり２」

　　あめ15こを６人に同じ数づつに分けてあげたいと思います。１人に何こずつあげられるでしょう。

　　　15÷６

　　「六二 12」２あまり３

　　　15÷６＝２…３

　　　　　　　　２こずつあげられて，３こあまる。　　』

（Ｂ社　３上，p. 90,92）

例２　『色紙が30まいあります。８まいずつたばねると，何たばできますか。

　　　30÷８

　　（中略）

　　このことをわり算の式で，次のように書きます。

　　　30÷８＝３あまり６

　　「三十わる八は，三あまり六」　　　　　　　　　　』

（Ａ社　３上，pp. 50–51）

他社の記述もほぼ同様である。すべての教科書を通じて，表記は次の２形式である。

$$m \div n = q \cdots r$$

$$m \div n = q \text{ あまり } r$$

なお，上のような記述に続けて，

『図を見て，上のわり算の答えが次の計算でたしかめられるわけを考えましょう。

　（８×３）＋６＝30　………………わられる数　　　　』（Ａ社）

のように，〝たしかめの式〟を付け加えている教科書もあれば，それがない教科書もある。一社のみ，上でいう〝たしかめの式〟を初めにもってきて，

『30cmのひごから，８cmのひごは，３本とれて６cmあまります。

　８×３＋６＝30

　このことを，つぎのようにかきます。

　30÷８＝３あまり６　　　　　　　　　　』（Ｅ社）

としている。

この「あまりのあるわり算」の置かれている位置は，どの教科書とも，自然数（0を含む）の世界においてである。分数や小数はまだ導入されていず，したがって有理数の四則もない。いわゆるユークリッドのアルゴリズムの中における除法であり，「ユークリッドの除法」といえるものである。

教科書の例でもわかるように，q を求めることを要求しながらも，q と r を対のようにして取り扱っている。

「あまりのあるわり算」について，藤沢利喜太郎［1］は，次のように述べている。

『例へバ23ヲ 7 デ割ルハ割リ切レヌ場合ナリ，此場合ニ於テ剰余 2 ヲ如何ニ処分スベキカト問フニ其儘剰余トシテ存在セシムルモ可ナレド，其外ニ尚二通リノ処分方アリ。

結局リ，………$23 \div 7 = 3\frac{2}{7}$　……。第二ノ方法ハ　……　$7\overline{)2\ 3}$

$3.2\ 8$　』

最近の出版である『The Prentice-Hall Encyclopedia of Mathematics』［2］にも，

『時に割り算がうまくいかないことがある。

残された数は「余り」とよばれる。

この余りは，分数を用いて次のように書き表される。

$$14 \div 3 = 4\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)1\ 4} \\ \underline{1\ 2} \\ 2 \end{array}$$ 余り

』

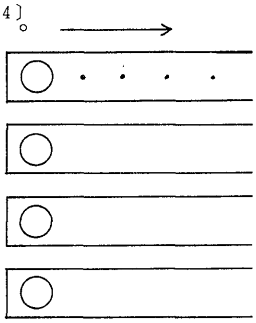
有理数の世界においてこの問題を論じるのであれば，上の資料の通りである。 しかしユークリッドの除法として論じるのであれば，数学上明らかに「23÷ 7」という演算は「できない」。つまり，

$23 \div 7 = *$

なる自然数は存在せず，等式すら成立しない。$3\frac{2}{7}$ も，$4\frac{2}{3}$ も，3.28も存在しない記号である。

V　除法について――ユークリッドの除法

初等数論における 4 つの演算のうちの 1 つであるが，除法はもともと累加の逆操作，つまり累減によって現れてくる（乗法は累加によって現れる）〔注4〕。



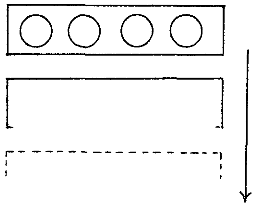
その操作は，2 つの別な事実をつくり出す。たとえば，

(a)「30個のみかんを 4 人に同じ個数ずつ与える。各人に与えられる最大個数はいくらか。

―――これは各人に 1 個ずつ，残りの個数が 4 個より少なくなるまでくり返し与えていくこと，すなわち 4 個ずつの累減によって示される(右上図)。

(b)「30個のみかんを 1 人 4 個ずつ与える。与えられる最大人数はいくらか。

――これも，4個ずつをひとつかみにして，残りの個数が 4 個より少なくなるまでくり返し与えていくこと，すなわち 4 個ずつの累減に



よって示される（前頁右下図）。

このように，「1人あたりの最大個数（部分集合あたりの個（要素）の個数）」を知る場にも，また「対等な部分集合の最大数（個の集合の個数）」を知る場にも，累減という同一の操作によって意味が与えられる。しかも，その両者とも，累減がぴったりとうまく終る場合もあれば，ぴったりとはうまくいかなくて操作のできない残りものがある場合もある。これがユークリッドの除法の世界である。

教科書では，これら4つのどの場合にも，同一記号「m÷n」を与えている。つまり，1人あたりの最大個数を求める場合，30÷5＝6であり，30÷4＝7あまり2，である。部分集合の最大数を求める場合でも，30÷5＝6であり，30÷4＝7あまり2，である。答えのところで，文脈から，6個としたり，6人としたり区別される。

「m÷n」を分析してみよう。

$\mathbf{N}_0=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$ とする。まず，

1. $f:\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$　　　$g:\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$

$m\xmapsto[+n]{}m+n$　　　$(m,\ n)\xmapsto[+]{}m+n$

はともに加法を示し，和はつねに存在して　$m+n$　である。

2. $f:\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$　　　$g:\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$

$m\xmapsto[\times n]{}m\times n$　　　$(m,\ n)\xmapsto[\times]{}m\times n$

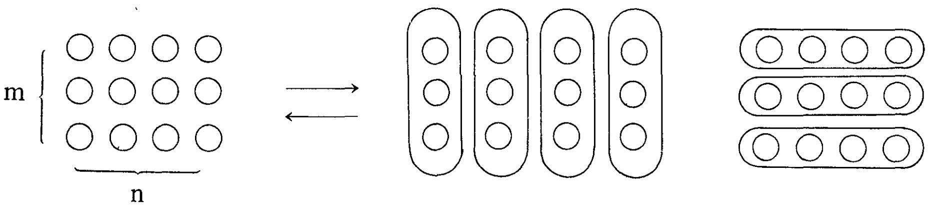
は乗法であり，積はつねに存在する。

乗法はもともと累加によって定められるものであるから，それは

$$a\times 1=a$$
$$a\times(n+1)=a\times n+a$$

によって帰納的に定められることを示す。

たとえば，下左図のような長方形配列された「ものの数」は，下右図の意味づけによって把握され，それゆえ長方形配列の「ものの数」はm×n（または，n×m）である，と導くことができるものである。



3. 減法は，

$f:\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$　　　$g:\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0\longrightarrow\mathbf{N}_0$

$m\xmapsto[-n]{}m-n$　　　$(m,\ n)\xmapsto[-]{}m-n$

である。

記号「m－n」は限定された意味をもち，m≧nなら，つねに存在して差は「m－n」，しかし，m<nなら，m－nは意味をもたない。したがって，算数では扱われない。

4.(i) $f: \mathbf{N}_0 \longrightarrow \mathbf{N}_0$

$m \xmapsto[\div n]{} m \div n$

はユークリッド除法の１つである。減法の場合と同様に，「$m \div n$」がつねに意味をもつものではないことは示唆してきたところである。ところが，減法の場合とちがって，除法に関しては意味をもたない場合にも，

$m \div n = q$ あまり r

のように「等式」を用いて表現している。これは許されることだろうか。

$\mathbf{M} = \{n \times 0,\ n \times 1,\ n \times 2,\ n \times 3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\} \subset \mathbf{N}_0$ に対しては

$f: \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}_0$

$m \xmapsto[\div n]{} m \div n$

はつねに存在（操作がうまくぴったりいく）して，「商」は q である。すなわち，

$m \div n = q$ （ただし，$q \in \mathbf{N}_0$ ）

が成立する。

たとえば，$n = 3$ とすれば，$\mathbf{M} = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\cdots\}$ であるから

m	0	3	6	9	12	15	18	21	24	…………
m ÷ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	………

である。もし $m \in \mathbf{N}_0$ であるなら，

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	·
m ÷ n	0			1			2			3		·

であるから，すべての $m \in \mathbf{N}_0$ に対して「$m \div n$」が意味をもつものではないことが読みとれる。すなわち，

$\mathbf{N}_0$ に対する $\mathbf{M}$ の補集合を $\mathbf{M}'$ とすれば，$\mathbf{M}'$ に対して

$f: \mathbf{M}' \longrightarrow \mathbf{N}_0$

$m \xmapsto[\div n]{} m \div n$

は，形式「$m \div n$」を用いたものの，それに対する数実体は存在しない。したがってこの場合，

$m \div n = *$

という等式自体が存在しない。

たとえば，「$30 \div 4 = 7$ あまり２」という「式」自体が存在しえないことになる。

$\mathbf{M}'$ においては，操作的には操作することのできない個が残る，ということであるから，この未処理の残りの個の個数（ r とおいてみる）は，累減操作を用いて最終的には，

$m - n \times q\ (= r)$ ただし，$0 < r < n$ をみたすもの。

によって定められる。「余り」の概念はこうして規定されるが，教科書では，「余り」を的確におさえていない。また，このときの q に，$\mathbf{M}$ における用語と同一の「商」を使用している。

ユークリッドの除法は，もともと定量的である。操作的でもある。したがって，その作業の結果を記録するものとして，処理しきれないものがある場合

$m \div n$ については，〝商〟q，余り r，である

と記述することができる。これは記述であって，数学的記号体系にあるものではない。操作がぴったりうまくいく場合には，操作上だけでなく数学上

$$m \div n = q$$

が可能である，すなわち，

「$m \div n$」に対しては，ユークリッドの除法において，数学的記号体系の中にある場合（いわゆる「わりきれる」）と，そうでない場合（「わりきれない」）がある。つまり，「$m \div n = q$あまりr」は関係概念としての数学的等式ではなく，操作概念としての状態の記述である，とみるべきものである。一方，

m，n，q，r（$\in \mathbf{N}_0$，ただし$n \neq 0$）の間の関係性をとらえ，同じレベルで考えようというのが定性的な立場で，そこでは

$$r = m - n \times q,\quad 0 < r < n \quad をみたす q,\ r が存在する。$$

という認識になる。

これは数学的記号体系の中にあり「式」となる。ここでは，$r = 0$の場合も含めて考えることが可能となる。

定性的な立場では，数対としての（q，r）を把握することになるが，定量的な「$m \div n$」では，qだけ，rだけを対象にすることができる。たとえば，$n = 3$なら，

m	0	1	2	4	5	7	8	10	11	……
q	0	0	0	1	1	2	2	3	3	……

m	1	2	4	5	7	8	10	11	13	……
r	1	2	1	2	1	2	1	2	1	……

上右表は，$(30 - 3 \times a) \div 3$では，余りは変わらないことを示している。

定性的にいえば，

$$m - n \times a = (n \times q + r) - n \times a$$
$$= n \times (q - a) + r \quad ただし，0 \leqq r < n,\ a \leqq q$$

(ii) 除法のもう1つの場，

$$g: \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \longrightarrow \mathbf{N}_0$$
$$(m,\ n) \xmapsto[\div]{} m \div n$$

についても，同様に，「$m \div n$」は限定された数実体をもつ。次表でそれを示す。表の内部に示された自然数（0を含む）に対応するm，nについてのみ，等式

$$m \div n = q，ただし，q \in \mathbf{N}_0$$

は意味あるものである。

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	………
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1							
2	2	1						
3	3		1					
4	4	2		1				
5	5				1			
6	6	3	2			1		
7	7						1	
⋮								

また，〝q〟だけをとり出せば，次のようになる。

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	…………
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	0	0	
2	2	1	0	0	0	0	0	
3	3	1	1	0	0	0	0	
4	4	2	1	1	0	0	0	
5	5	2	1	1	1	0	0	
6	6	3	2	1	1	1	0	
7	7	3	2	1	1	1	1	
⋮								

Ⅵ 「あまりのあるわり算」の発展

小学校第3学年では，筆算形式（作業形式）を利用して求める。たとえば，

30÷4は，〝商〟7，余り2，である。

同様にして，

(30×2)÷(4×2)は，〝商〟7，余り4，である。

(30×10)÷(4×10)では，〝商〟7，余り20，である。

と，〝商〟は変らないが，余りは変わる。

3000÷400なら，(30×100)÷(4×100)によって，〝商〟7，余り200，であることが推定される。

この推定が正しいことは，定性的に

$$(m\times a)-(n\times a)\times q=\{m-n\times q\}\times a=r\times a$$

によって明らかであることは言うまでもない。

小学校第5学年に，次のような学習内容がある。

『1.2÷0.3

小数でわる計算では，わる数の小数点を右はしにうつして整数にし，わられる数の小数点もこれと同じけた数だけ右にうつして計算します。…＊』

があって，次のページに

『20.3÷1.8

小数のわり算のあまりは，わられる数のもとの位取りにそろえます。

…………＊＊

```
          1 1
1/8 ) 2 0/3
      1 8
      -----
        2 3
        1 8
        ---
          5
```
』

と続く。　　(ただし，記号＊，＊＊は筆者による)（D社　5上，pp, 77－78)

これは，第３学年の「あまりのあるわり算」を，m，$n \in \mathbf{Q}_0^+$（ただし，$n \neq 0$）の世界にまで拡張したものである。まとめの（＊＊）は，技法的とらえ方であり，しばしば指摘されるように，子どもにとってむずかしい概念である。

子どもの立場からいえば，まとめ(＊)にもとづいて，

〝 1.2÷0.3＝（1.2×10)÷（0.3×10)
でうまくいった。
それなら，
20.3÷1.8も（20.3×10)÷（1.8×10）すなわち 203÷12でよい。
つまり，20.3÷1.8＝203÷18
右の計算から
203÷18は，〝商〟11，あまり５
だから，
20.3÷1.8は，〝商〟11，あまり５

```
      1 1
1 8 ) 2 0 3
      1 8
        2 3
        1 8
          5
```

と。

余りが除数より大きいから，上は間違っている，といわれれば，結果は少なくとも正しくないことは納得するだろう。

教科書では，ひき続き，次の内容を扱う。

『27.8÷1.6
商を小数第二位まで求め，あまりも出しなさい。』（D社　５上，p.83）

これは，〝商〟の概念をさらに有理数の世界にまで広げたものである〔注５〕。これについて子どもが，

〝27.8÷1.6＝（27.8×10)÷（1.6×10)　である。
右の計算から，
27.8÷1.6は，〝商〟17.37，
あまり0.08
このあまりは，わる数1.6より小さいから，よい。
（答）〝商〟17.37，あまり0.08

```
      1 7 . 3 7
1 6 ) 2 7 8 ¦
      1 6   ¦
      1 1 8 ¦
      1 1 2 ¦
          6 ¦ 0
          4 ¦ 8
          1 ¦ 2 0
          1 ¦ 1 2
            ¦   8
```

とすれば，どのように納得させればよいだろうか。

作業形式を用いて「あまり」を推論する場合には，

第３学年での，m÷nは，〝商〟q，余りｒ に対して
（m×a)÷（n×a）は，〝商〟q，余りｒ×a

がヒントになろう。これが，まとめの（＊＊）に対する原理を示唆する。

教科書で扱われるような，単に　$m-n \times q$　によって確かめよ，からだけでは，まとめの（＊＊）の原理は抽出しがたい。確かめれば，なるほどそうである，ということを知らせることはできるが，技法的な感じを子どもに与えることになろう。

〔注1〕「同時共存」の2つの集合を1つの集合とみなすことであるから，「3「と」2をたす」。「1つの集合にもう1つの集合を添加」して1つの集合とみなすことであるなら，「3「に」2をたす」と言うことになろう。どちらの場合も3＋2で表記される。

〔注2〕「ものの数」を考えるために絵に替えて数字を用いたのであるなら，本来なら，「1つの集合とみなすこと」を表示している外側の枠(右上図)や矢印(右下図)に対しても記号化(対象言語化)することである。

〔注3〕この教科書は，円と円の間に記号「＋」を入れて意味づけしようとしている。しかし，この図はここでは概念的扱いであるから，対象言語の「＋」を用いるのは適切ではない。

〔注4〕この原理は，すでにユークリッドの『原論』第5巻・第7巻にみえる。
καταμετρεῖν ——Heath［3］は「to measure」と訳し，中村［4］は「割りきる］としている。「to measure（はかること）」とは，ある量Aを量Bで切断する（思考的に，または物理的に）ことをくり返し続けていくとき，その操作がぴったりとうまく終る，つまり「how many（数えること）」の対象に変えられるうることを示したものである。
それに対して，ぴったりとうまくは終わらない，いわゆる余りが存在する場合がある。これを「do not measure」といい，この場合ユークリッドの互除法が工夫されている。

〔注5〕有理数の世界でも，17.37は本来の商ではない。

引用及び参考文献

［1］藤沢利喜太郎：算術教科書　上巻，大日本図書，明治29年，pp.67−68.

［2］West, B. H. et al. (Eds.) : The Prentice-Hall Encyclopedia of Mathematics, Prentice-Hall, 1982, p. 45.

［3］Heath, T.L. : The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.II, Dover,1956

［4］中村幸四郎他：ユークリッド原論，共立出版，昭和52年

［5］Winter,H. : Zur Division mit Rest (Der Mathematikunterricht, 24,4,1978, s.38-65)

［6］Skemp,R. R. : Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures (Visible Language, XVI, 3, 1982, pp. 281-288)

［7］文部省：尋常小学算術書　第1学年教師用，日本書籍，明治38年，p. 8（海後宗臣他編：日本教科書大系　近代編　第13巻，講談社，昭和50年）

［8］算数教科書　各社，1985