Bulletin of Faculty of Education, Nagasaki University: Curriculum and Teaching 1991, No.16, 17-27

「リサジュー図形」の教材研究
——高等学校「数学C」におけるコンピュータを利用する前に——

三　野　榮　治*

(平成2年10月31日受理)

Developing Understanding of the Lissajous Figures:
Before its computer experience in the high school mathematics

Eiji MINO

(Received October 31, 1990)

1．はじめに

(1)　高等学校数学の新しい科目「数学C」は，コンピュータを活用して数学を学習することをねらいとして設けられているが，そこにおけるコンピュータの位置づけは『伝統的な高等学校数学の内容やそれらの発展的な内容を理解するための道具として利用するものである。したがって，「数学C」の指導に当たっては，数学の内容をきちんと理解させてからコンピュータの実習を行うことが大切である。』[1] とされている。当然のことであろう。

その「数学C」の構成内容として，「いろいろな曲線」が導入されている。それは『コンピュータグラフィックスが手近なものになった。その結果，関数のグラフを容易にコンピュータの画面の上に描くことができるようになり，高等学校数学の新しい可能性が開けてきた。』[2]からである。そのうち，『簡単な式で表される美しい曲線をコンピュータを利用して描き，鑑賞させる。簡単なプログラムでかなりきれいな曲線が描けるので，生徒にプログラムを作らせることも考えられる。』[3] として，「リサージュ曲線」等をその例示に挙げている。

(2)　確かに，この図形を描かせるためのプログラムは簡単であり，したがって，コンピュータの実習には適うものといえよう。しかし，与えられる式が簡単であり，プログラムも簡単であるということが却って，この図形がもっている数学的な意味や性質をほとんど承知していなくても，プログラム上の技術的な扱いだけによって，それだけで済まされうる，という危険性をはらんでいるともいえる。

プログラムを作ってコンピュータ上で実行させるのと，電気的に操作するのとの方法上

＊長崎大学教育学部数学教育教室

の違いはあれ，電気的にオシロスコープ内に図形を描かせて鑑賞する，というのと同じような扱いでは「数学C」の趣旨に合わない。

直線や円のように，すでにその数学的性質や図形的性質を十分に理解している図形であるなら，コンピュータの画面上に描かれた図形に対して，用いた方程式とその図形との対応関係が直観でき，また，必要な数学的判断が下せる。安心して方程式とその図形とに対処することができる，というものである。「リサージュ曲線」等についても，やはり，このような数学的な必要な判断が行えるだけの理解があってのコンピュータ実習でありたい。それが「数学C」のねらいであるというものである。もちろん，コンピュータを活用するという立場から遊離しての数学的な深入りを意味するものではない。

必要な数学的性質を理解した上でのコンピュータ実習であり，しかも，コンピュータの画面上に描かれた図形から必要な数学的情報を読みとることができる，ということが，基本的に要請されることである。

その意味でのコンピュータの活用に関連して，教室内で初等的に手軽に理解でき，また，数学的にも直観できる数学的教材研究を「リサージュ曲線」について考えてみる。

2．Lissajous Figures

(1)　学習指導要領解説には，前述のごとく，この用語を「リサージュ曲線」としている。この図形は，フランスの物理学者 Jules A. Lissajous (1822—1880) の名にちなむもので，通常「リサジュー図形」(または，リサジューの図形) と呼ばれているものである。この言い方を以後採ることにする(註1)。

言うまでもなく，これは『2つの互いに垂直な方向において単振動を行うような，そのような点が描く平面図形』のことである。

単振動が，等速円運動を行う点の直線上への平行射影として得られる（いわば，分解）のに対して，2つの互いに垂直な方向において単振動を行うときのその合成として得られるものが「リサジュー図形」である。物理的には，以前からオシロスコープ内においてそれを得ることができ，そのことから2つの運動の振動数（または角速度）と位相の比較を行うのに用いられているが，この比較の観点は数学上も大切なものである。

(2)　ところで，学習指導要領解説には，リサジュー図形を

『$x=\sin mt$，$y=\sin nt$』

で示してある [4]。

「リサジュー図形」を2つの互いに垂直な方向における単振動の合成として得る立場から，そのための導入として，先ず，等速円運動を行う点の x 軸及び y 軸方向への分解を考える（図1）(図2)。これが意味理解のための最初に必要な概念である。このとき，x 軸への平行射影，すなわち x 成分は余弦関数で表される。したがって，「リサジュー図形」の x 成分を余弦関数で直接的に表示することが自然であり適切でもある。

次に，振幅は，コンピュータグラフィックスの立場からは固定した特定の値でよい。なお，一般性を少しでも表現するためには振幅は等しくないほうがよい。

さらに，位相の概念も考察の対象にすることが「リサジュー図形」の特質を明らかにすることになる。角速度の簡単な比較（互いに素の整数比）にもとづく図形，初期位相の違いによる相対的な図形関係等，数学的にも「リサジュー図形」を特徴づけ興味を喚起して

くれるものが位相の概念である。

このような立場から，$x=\sin mt$，$y=\sin nt$ に対して，たとえば

$x=3\cos mt$，$y=2\sin(nt+\alpha)$ ……………………………………………………（＊）

の形で「リサジュー図形」を考えていくことが，一般性も理解しやすく，作図法も楽であり，また，適当であると考えられる。

なお，$x=3\cos(mt+\beta)$，$y=2\sin(nt+\alpha)$ の形がより一般的な形であり，もちろん，それで考えていってよい。それは，図形の上からは $x=3\cos mt$，$y=2\sin(nt+(\alpha-\beta))$,つまり（＊）式に帰着されうるものであり，図を描き始める出発点は異なるものの図形としては同一のものである。

もちろん，$x=3\cos(mt+\beta)$，$y=2\sin nt$の形にもとづいて「リサジュー図形」を考えることもよい。この場合も，（＊）式と対等であることは容易に理解できよう。

(3) 「リサジュー図形」を描くのにコンピュータグラフィックス機能を待たなければ出来ないことだろうか。また，コンピュータの力を借りなければ出来ないほどむずかしいものだろうか。数学的に初等的な扱いは出来ないというのだろうか――答えは，否である。決してそのようなことはない。

以下に示すように，〝方眼紙〞を用意することによって「リサジュー図形」は手軽に初等的に描くことができる。また，その〝方眼紙〞上に図形を描く作業手順そのものが「リサジュー図形」の数学的・グラフィックス的特質の理解を深めることに役立ちうる。

その〝方眼紙〞とは「三角関数目盛りによる方眼紙」であり，それは手作りできるものである。必要に応じて，〝単位目盛り〞を定めることができる〝方眼紙〞である。たとえば，「$\frac{\pi}{18}$単位での方眼紙」，いわば〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〞は手軽につくることができるものの一例である（図6）。

3．「リサジュー図形」の教材研究

(1) **導入**：

i）円の周上を一定の速度で運動する点 $P(x, y)$ は，x 軸方向及び y 軸方向の 2 つの単振動に分解することができる―― $P(x, y)$ の x 軸，y 軸への平行射影が単振動である。

角速度が ω，初期位相が α のとき

単振動（Q_1の動き）：$x=r\cos(\omega t+\alpha)$

単振動（Q_2の動き）：$y=r\sin(\omega t+\alpha)$　　（図1），（図2）

ii）逆に，垂直方向（x 軸，y 軸）における単振動の変位がそれぞれ

$$x=r\cos(\omega t+\alpha),\ y=r\sin(\omega t+\alpha)$$

で表されるような，そのような点 $P(x, y)$ はどのような平面図形を描くだろうか――垂直方向の 2 つの単振動の合成がそれである。

たとえば，$\omega=\frac{\pi}{9}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$ とする（CG では具体的数値を用いての扱いであり，いわば具体的一般化の思考であるから，これで本質を失わない）。

点Pの動きを求めることは i）の逆思考であり，（図2）の逆操作としての作図によって求めることができる（図3）。

先ず，$t=0$ のときの，単振動のそれぞれの位置 $x_0=r\cos\frac{\pi}{6}$，$y_0=r\sin\frac{\pi}{6}$ を合成して点 P_0（出発点）が定まる。

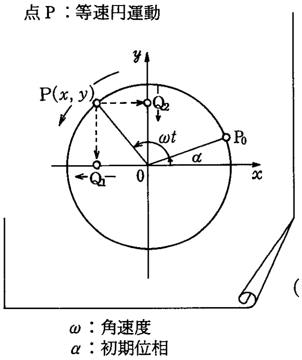
次に，$t=1$ のときの，単振動のそれぞれの位置 $x_1=r\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right)$，$y_1=r\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right)$ を合成して点 P_1 が定まる。

以下，同様にして点 P_2，P_3，……が得られる（図３）。

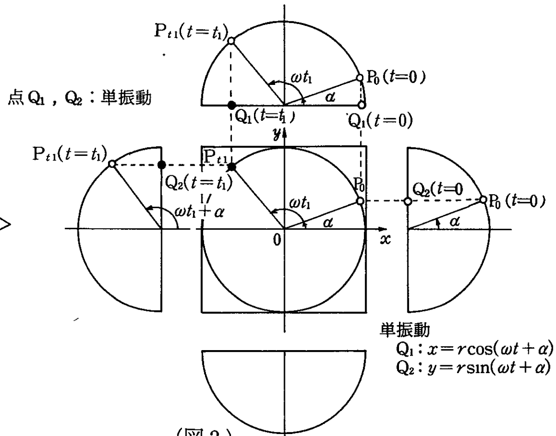
t の値を連続的に多くとることによって，点 P が $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$, ……を通る滑らかな曲線になることは，単振動の動きから判断できるところであるから，曲線の連線性についての数学的な深入りは不要である。

なお，（図３）のように，中心角 $\frac{\pi}{18}$ で円周を等分したモデルを利用するときには，$\omega=\frac{\pi}{9}$ であるから t の各整数値に対しては２目盛りずつの動きで考えることになる。もし t を $\frac{1}{2}$ 単位で考えるなら１目盛りずつ動かすことは言うに及ばない。

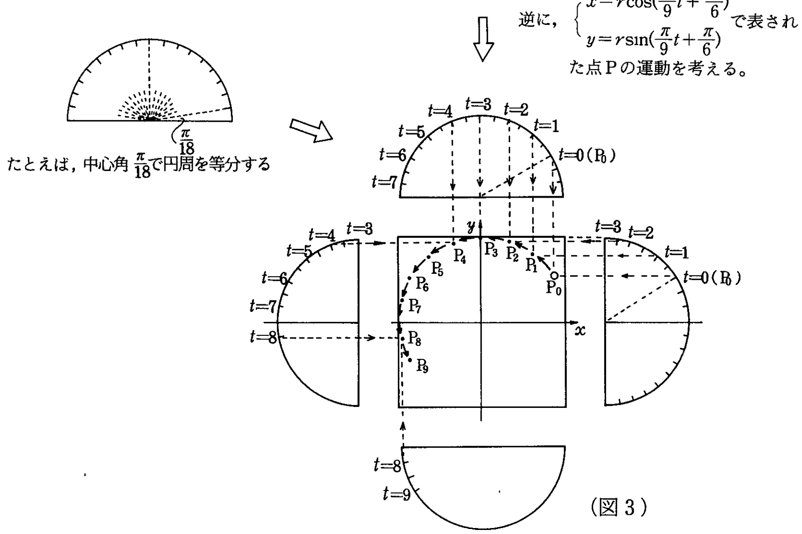
代数的には，この場合の点 P は $x^2+y^2=r^2$ で示されることは明らかである。



（図１）



（図２）



（図３）

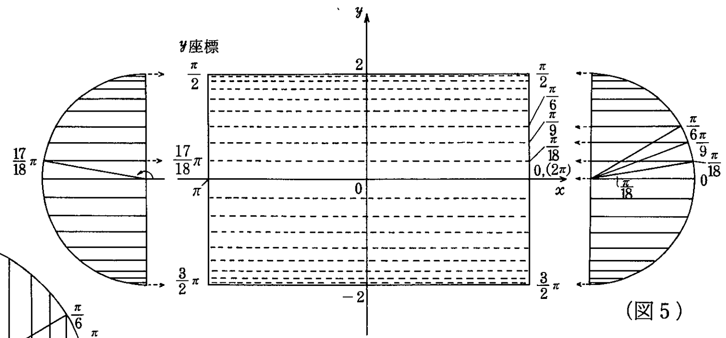
(2) 「リサジュー図形」のための〝方眼紙〟の工夫：

「リサジュー図形」を描くに当たって，先ず，「三角関数目盛りによる方眼紙」――たとえば〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〟をあらかじめ用意しておくのがよい。

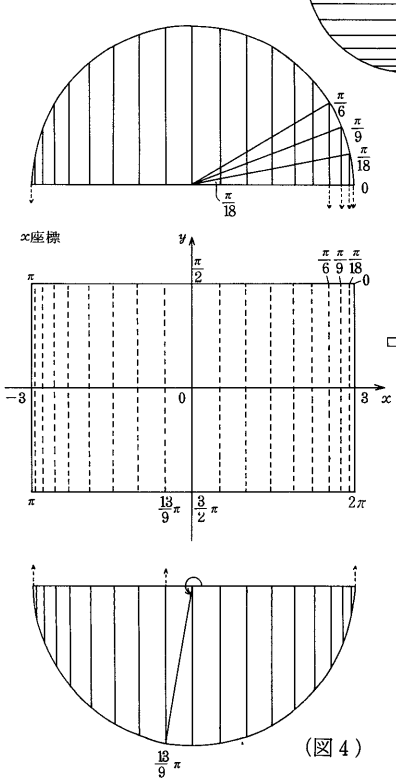
〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〟は次のようにして作成する。（図4）及び（図5）のように$\frac{\pi}{18}$単位でx座標系及びy座標系を作成し，それらを一つにまとめる。それが〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〟である（図6）。

「リサジュー図形」を描く手順は次の通りである。与えられた単振動の式において

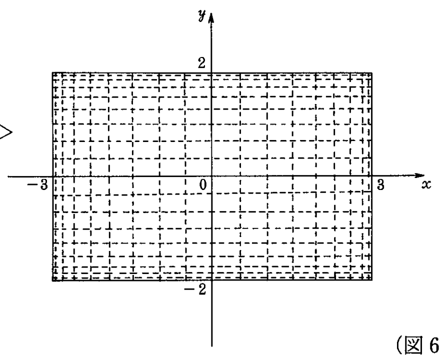
・$t=0, 1, 2, 3,$ ……（必要に応じて$t=\frac{1}{2}, \frac{3}{2},$ ……等々）のそれぞれに対応する点P_0, P_1, P_2, P_3, ……（あるいは$P_{\frac{1}{2}}$, $P_{\frac{3}{2}}$,……等々）を〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〟上にとり，



（図5）



（図4）



（図6）

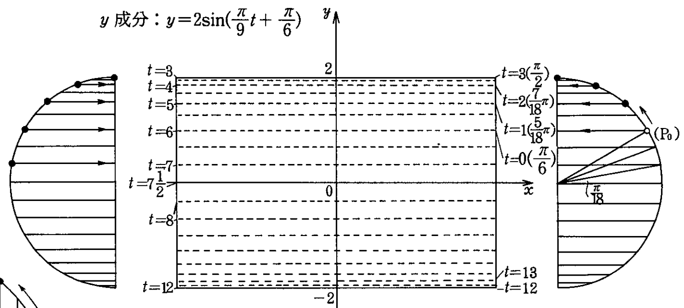
・それらの点をその順序に滑らかな曲線で結ぶ（図９）。
このようにして図形は得られる。

なお，以下の事例でわかるように，角速度の比が整数比で与えられる場合，単振動の性質から点Ｐの動きは元の位置 P_0 に戻ることになり，したがって閉じた図形になる。以下，同じ図形をくり返し描き続ける。

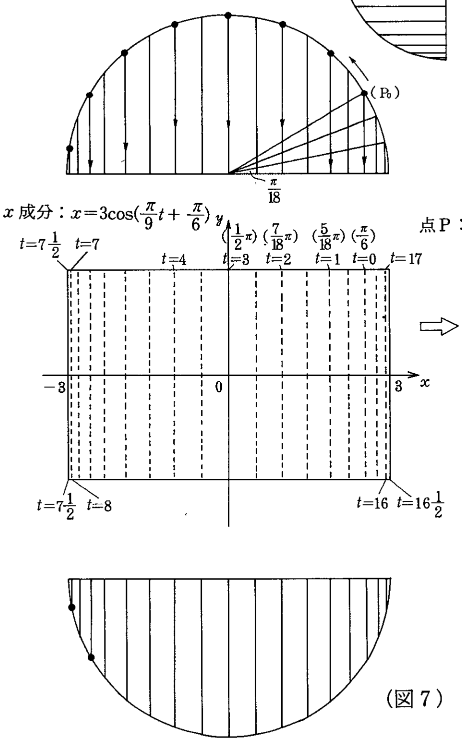
(3)　**展開**：

ｉ）［例１］　$x=3\cos\left(\dfrac{\pi}{9}t+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{9}t+\dfrac{\pi}{6}\right)$ で表される点Ｐが描く「リサジュー図形」を求めよ。

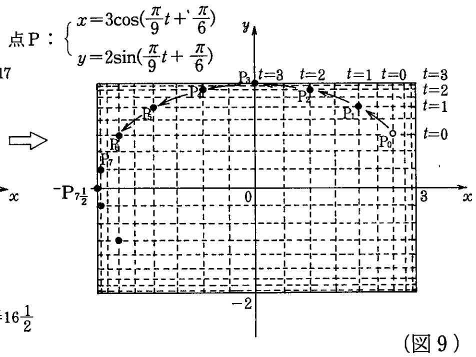
［考え方］　$t=0$，すなわち $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ に対応する点が出発点の P_0 である（図７，８から９へ）。$t=1$ のときの $\left(\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{6}\right)$，すなわち $\left(\dfrac{5}{18}\pi,\ \dfrac{5}{18}\pi\right)$ に対応する点 P_1 は，P_0 から左へ２目盛り，上へ２目盛り移動した点である（図７，８から９へ）。



（図８）



（図７）



（図９）

$t=2$の，$\left(\frac{7}{18}\pi,\ \frac{7}{18}\pi\right)$に対応する点$P_2$は，〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙〟上，$P_1$からさらに左へ2目盛り，上へ2目盛り移動した点である（図9）。
以下，同様であり，$t=18$で元の位置$P_0\,(=P_{18})$に戻るところの閉じた図形である。それらをその順序に滑らかな曲線で結ぶ。なお，その際，1目盛ずつ移動した点（$t=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$，……に対応する点も）をも通ることに注意したい。

ここに出来上がった図形が，求める「リサジュー図形」である。それは楕円である。

ii）［例2］　初期位相を少しずつ変化させた（たとえば，$\frac{\pi}{6}$ずつ）次の一連の「リサジュー図形」を描け。

① $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\frac{\pi}{18}t \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

④ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{5}{6}\pi\right) \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\pi\right) \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{7}{6}\pi\right) \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} x=3\cos\frac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$

（図10）の①から⑩の一連の図形が求めるものである。初期位相のちがいがみせる面白さが感じられよう(註2)。

ところで，［例2］は角速度の比が1：1の場合の例であるが，この例でもって一般な角速度の比が1：1である「リサジュー図形」——$x=3\cos\omega t$，$y=2\sin(\omega t+\alpha)$——を代表しうる，ということがわかる。その図形は，一般に楕円を表す。しかし退化した場合があり（図10の④，⑩），それは線分（往復して描かれた線分）である。

なお，生徒の興味や関心に応じて，式の上からxとyの関係式を求め，描いた図形と対比させてみる，ということは十分に考えられる。しかし，無理をすることはない。

iii）［例3］　角速度が異なる場合，たとえば，角速度の比が1：2の場合の

$$x=3\cos\frac{\pi}{18}t,\quad y=2\sin\left(\frac{\pi}{9}t+\alpha\right)$$

について，$\alpha=-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$としたときのそれぞれの「リサジュー図形」を描け。

この場合の作図もこれまでの例とまったく同様である。

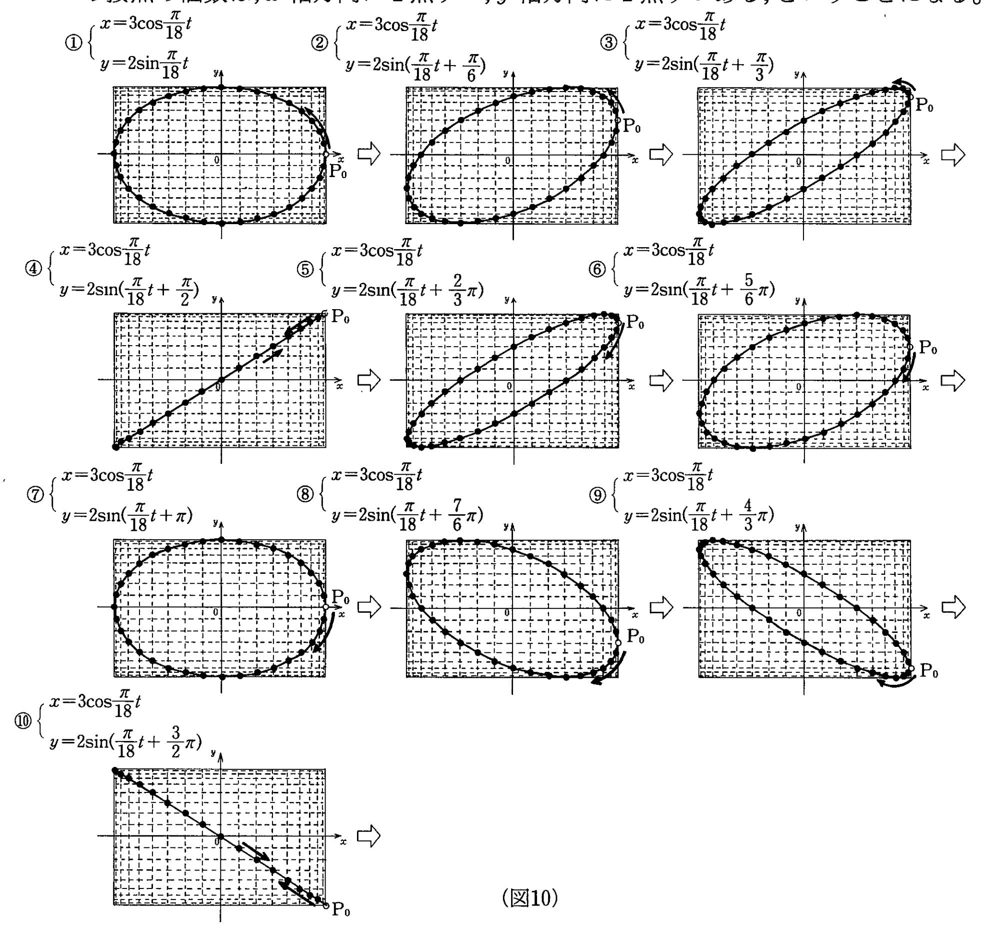
描き始めの点P_0は$t=0$のときの$(0,\alpha)$に対応する点であり，$t=1$，2．3，……

に対しての$\left(\frac{\pi}{18},\ \frac{\pi}{9}+\alpha\right)$，$\left(\frac{\pi}{9},\ \frac{2}{9}\pi+\alpha\right)$，$\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，……に対応するそれぞれの点 P_1, P_2, P_3,……は，〝$\frac{\pi}{18}$方眼紙″上で，x 軸方向に 1 目盛（$t=18$ までは左へ，$t=18$ から $t=36$ に対しては右へ動く），y 軸方向に 2 目盛（初期位相に応じて上または下へ動きはじめる）ずつ P_0 から順に移動した点として求められることは言うまでもない。$t=36$ で元の位置 $P_0(=P_{36})$ に戻る図形である（図11①～⑤)。

このうち，(図11)①，⑤が退化した図形であり，それは放物線（二重に描かれた放物線）である。

さらに，これらの場合の一般的な図形から読みとれる性質として，〝方眼紙″の外枠との共有点(接点)は，x 軸方向に 2 点ずつ，y 軸方向には 1 点ずつある，ということもいえる。

ところで，角速度の比を，逆に，２：１とした場合の「リサジュー図形」はどのようなものになるだろうか。その作図法の特性から（図11）が横向きになった形の図形として表されることは容易に推察される。もちろん，実際にいくつかを作図して確かめるのもよい(手軽に描けるから)。したがって，〝方眼紙″の外枠との接点の個数は，x 軸方向に 1 点ずつ，y 軸方向に 2 点ずつある，ということになる。



(図10)

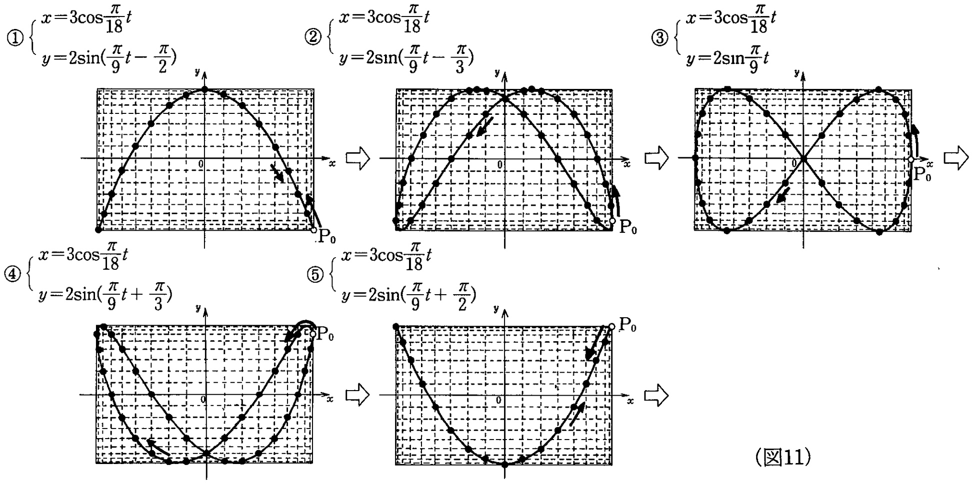
iv）［例４］　角速度の比を１：３及び２：３とした場合の

$$\begin{cases} x=3\cos\dfrac{\pi}{18}t \\ y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\alpha\right) \end{cases} \quad \text{及び} \quad \begin{cases} x=3\cos\dfrac{\pi}{9}t \\ y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\alpha\right) \end{cases}$$

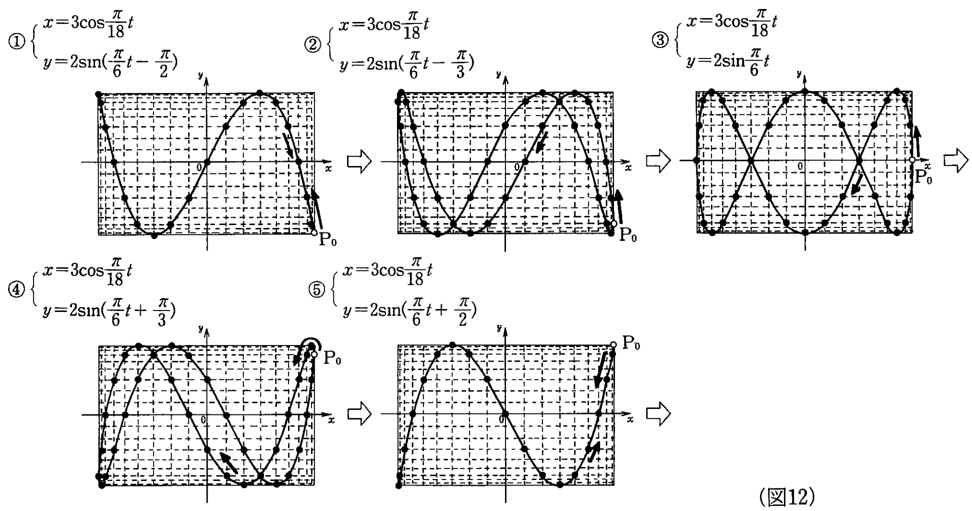
について描いた「リサジュー図形」が，それぞれ（図12）①〜⑤と，（図13）①〜⑨である。

〝方眼紙〟上での作図法は，これまでの例とまったく同様である。先ず P_0 を定め，その点から，x 軸方向に１目盛，y 軸方向に３目盛ずつ移動した点を求め，順次結んでいく（図12）。（図13）では，P_0 から，x 軸方向に２目盛，y 軸方向に３目盛ずつ移動した点を求めて曲線をつくる。

角速度の比が，たとえ，３：１あるいは３：２の場合であっても，同様に考えることができる。



（図11）



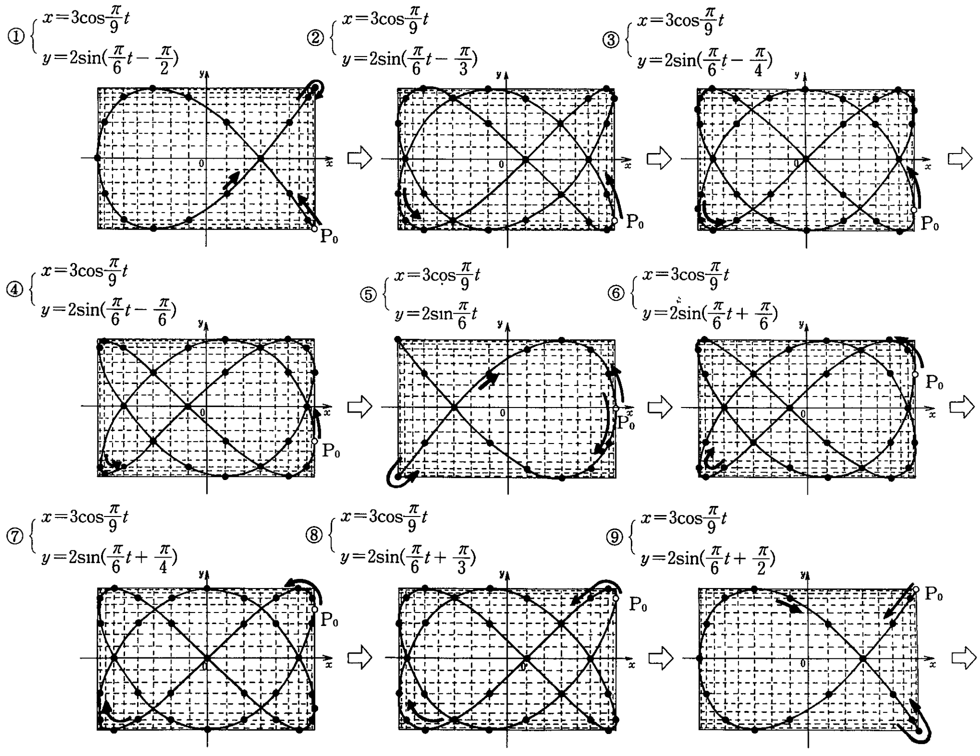
（図12）

いずれの場合においても，それらの「リサジュー図形」は，〝方眼紙〟上で容易に，想像するよりは短時間で完成させられ得るものである。

4．おわりに

「リサジュー図形」における角速度の比が，簡単な比の２：３（３：２）や３：４（４：３），……の場合であっても，それから代数的に x，y に関する方程式を求めることは一般にはむずかしい。たとえ求められたとしても，それにもとづいて図を描くことはきわめて困難である。方程式の上からは初等的に図形のイメージをとらえることさえほとんど不可能に近い，とさえいえる。直観もきかない。

しかしながら，上述の〝方眼紙〟を用いるなら，「リサジュー図形」の作図は，すでにみてきたように，初等的に容易にでき，作図法の規則も単純であり明瞭である。それでいながら数学的な本質は十分に生かされているといえよう。〝方眼紙〟は，教材として十分に機能するものでもある。



（図13）

註

（註１）「リサジュー」：ランダムハウス英和大辞典，小学館，1985．には，
「lí:səʒù:」 と発言記号を記し，「リサジュー」としている。
Robert Grand Dictionnaire Français-Japonais, SHOGAKUKAN, 1988.
「リサジュ」 ：岩波西洋人名辞典（増補版），岩波書店，1981.
日外アソシエーツ：西洋人名よみかた辞典，紀伊国屋，1984．等々
「リサジュー図形」：小野周一也（監訳）：マグロウヒル英和物理・数学用語辞典，森北出版，1989.
久保亮五他（編）：岩波理化学辞典（第４版），岩波書店，1989.
都築洋次郎（編）：科学・技術人名事典，北樹出版，1986.
インタープレス科学技術25万語大辞典（英和），インタープレス，1983.
Robert Grand Dictionnaire Français-Japonais, SHOGAKUKAN, 1988.
その他.
「リサジューの図形」：文部省：学術用語集　物理学編（増訂版），培風館，平成２年.
「リサージュ図形」：池田光男他（監訳）：物理学大百科，朝倉書店，1989.
国際科学振興財団（編）：科学大辞典，丸善書店，1985.

（註２） $x=3\cos\left(\frac{\pi}{9}t+\frac{\pi}{6}\right)$，$y=2\sin\left(\frac{\pi}{9}t+\frac{\pi}{6}\right)$ の「リサジュー図形」（図９）と，$x=3\cos\frac{\pi}{18}t$，$y=2\sin\frac{\pi}{18}t$ による「リサジュー図形」（図10①）とは，図形としてまったく同一のもの（楕円）である。しかし，動きとして周期が異なり，動き始めの点もずれている。

また，$x=3\cos\frac{\pi}{18}t$，$y=2\sin\left(\frac{\pi}{18}t+\pi\right)$ の「リサジュー図形」（図10⑦）は，式変形によって $x=3\cos\frac{\pi}{18}t$，$y=-2\sin\frac{\pi}{18}t$ の「リサジュー図形」に等しい。つまり，（図10⑦）は（図10①）とまったく同形であり，周期も出発点も同じである。しかし，動きが逆向きである，ということがわかる。

引用文献

［１］　文部省：高等学校学習指導要領解説　数学編，ぎょうせい，平成元年12月，p. 91.
［２］　同書，p. 93.
［３］　同書，p. 101.
［４］　同書，p. 101.