Title	数学教育における抽象と具体—構造と導入をめぐって—
Author(s)	若槻, 実
Citation	長崎大学教育学部教育科学研究報告, 18, pp.97-105; 1971
Issue Date	1971
URL	http://hdl.handle.net/10069/31064
Right	

数学教育における抽象と具体
——構造と導入をめぐって——

若　槻　　　実

まえがき

19世紀末のカントールの集合論以来，ペアノの数の概念，ヒルベルトの幾何学基礎論は，それぞれ，数や現象空間をモデルとしながら集合と公理による構造の上で打ち立てられた数論，幾何学であった。その後ルベーグの測度論，ハウスドルフの位相空間論，シュタイニッツやネーターの抽象代数，コルモゴルフの確率論の研究など，数学はすべて，抽象的な数学的構造の上での研究となった。対象をすべて集合と，その要素間の関係の概念でとらえ，その基本的な関係を公理にして一つの構造を作る。この方法で過去の数学は整理され統合され，論理的に厳しい吟味を受けた。見通しの良くなった数学はすばらしく発展し，思いもかけない多種多様な科学の上での応用を見ることになった。数学は抽象的に生まれ変わって，発展しつつある。

数学の抽象化はやがて科学技術の発展と相伴って，数学教育の中に抽象的な内容を盛り込むことを求めてきた。たとえば，ＯＥＥＣ（欧州経済協力機構）の数学科指導要目案によると，Cycle　Ⅰ（11歳〜15歳）において，集合，群，環および体の概念を導入し，数や代数演算の構造の理解に重点をおく。Cycle　Ⅱ（15歳〜18歳）集合，環，体，群および線形代数を優位におき，代数の骨組みを構成するとある。これに基づいて書かれたといわれる，フランスの C. Breard(1)，ベルギーの Papy(2)，西ドイツの H. Pittman(3) の教科書，また米国において，数学教育の現代化を目指して結成された研究団体，SMSG (4)，UICSM(5) などの教科書には，群，環，体などの数学的構造が盛り込まれている。また，ソビエトでも，第９学年で，環，体が教えられている。(6)

これら数学教育における内容の高度化は，ヴィゴッキーの最近接の発達領域の理論，ブルーナーの理論などをその教育論的根拠としていると思われる。

正しく組織された教授は，子どもの知能の発達を先導し，教授の外では一般に不可能であるような多数の発達過程を生ぜしめるのである。（ヴィゴッキー）(7)

科学的概念を教えるには，小学校の水準においてさえも，子どもの認知力が発達する自然の経路に応従する必要はない。科学的観念は教え方によっては，子どもをさらに先に向って発達させるよう

に，彼をはげますものであって，しかも彼が使いこなせる機会を提供することによって，子どもの知的発達をうながすことができる。（ブルーナー）(8)

しかし，このような方針に対して，C.クライン,G.ポリアなどの反対意見もある。(9)

(1) 数学者が教育方法を犠牲にして，数学の内容を重視しすぎている。
(2) 誰のための数学か。学校数学はすべての生徒のための教養の背景を与えるべきものであり，将来数学者になる少数のためのものではない。
(3) 未成熟のうちに形式化を急ぎ，描象化の導入がはかられるべきではない。
(4) 数学的思考は演繹的思考のみではない。帰納的推論，類推も極めて重要である。

わが国でも荒木雄喜氏のように，数学の抽象化に反対する意見もある。荒木氏はSMSGの教科書を批判して，次のように述べている。

これまで，常識とさえ考えられていた具体から描象への原則は，ここでは全く無視され，逆に抽象から具体へといった錯覚をさえ感じる。……わが国の子どもをこのような学問の暴力から守らねばならない。(10)

SMSGの教科書は小・中学校の子どもに対して，余りにも急速な描象化を要求し，その結果として，かえって数学学習の意欲を失い，さらにこれを嫌悪する事態を招来する危険があるとさえ考えられる。(11)

以上のように，数学数育の中に構造を持ち込もうとする主張にも，またこれに反対する意見にも，それぞれそれなりの根拠があると思われる。筆者はここで，数学教育における構造の意義と，教育方法における問題点について考察してみよう。

〔1〕数学における構造の役割

まず数学における構造の役割から考察しよう。数学教育にとって，数学および，数学的方法を学ぶことは，その大きな目的の一つである。その主役である構造の役割は，そのまま数学教育における役割に通じる。

構造（structure）という用語がはじめて現われたのは，ブルバキの数学原論においてだといわれる。この集合論要約(12)につぎのような定義がのっている。

いくつかの集合，たとえばE，F，Gが与えられたとして，これらの巾集合または直積（自分自身の直積も含む）の一つMをとる。Mの元についての，具体的な記述されたいくつかの性質を与え，それらの各性質によって定養されたMの部分集合全体の共通部分をTとする：そのときTの一つの元のは，E，F，Gの上に種Tの一つの構造を定義する。

ごく大まかに集合とその要素間の関係の総合概念と解して置く方が便利である。（遠山啓氏）(13)

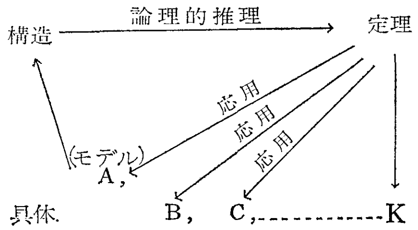
この構造の役割について考えてみよう。

能率化　ヒルベルトの幾何学は，点，直線，平面という材料の集合とヒルベルトの公理という設計図を用いてつくられた一つの構造という建築物にたとえられよう。

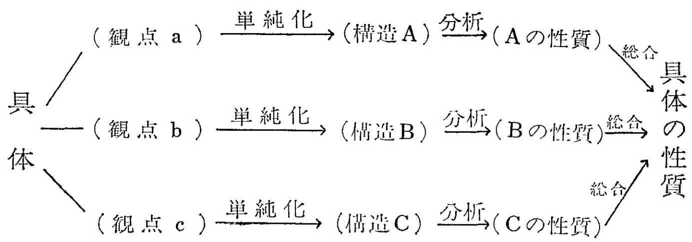
ここで点，直線，平面の関係は，現象空間のそれをモデルとしているから，この幾何学の定理は現象空間によくあてはまる。しかし点，直線，平面は無定義語であるから何か他の具体でこの公理を満足する集合があれば，この定理はその具体にもあてはまることができる。

ヒルベルトの幾何学は実数体の上で構成されているが，有限体の上で作れば有限幾何学になる。これが実験計画法に利用され，「組み合せ理論」ないしは「離散的数学」として生まれ代った。

このように構造の中で得られた定理は，同じ構造をもつ多くの具体にあてはまる。すなわち，各具体について一々個別訪問的研究をせずに済む訳である。しかも上のように全く思いもかけない具体間の関係が発見されたりするのである。これを図示して見ると次のようになる。



単純化　ガロアは代数方程式の問題をガロア群の中に投影して，代数方程式が代数的に解けるための条件と，その方程式から得られるガロア群が可解であるための条件が同じであることを発見し，五次以上の代数方程式は，一般的には代数的に解けないことを導いた。ある空間（図形）の上にさまざまな群を考えるのも，それらがある意味で空間の構造を表わすからである。レントゲン撮影で骨の構造を調べるが，その他神経系統だけを，あるいは，循環器系統だけを，調べる機械があったら非常にありがたいであろう。複雑な人体をある観点に立って他の属性を捨象し単純化して捉えるのである。一つの具体の上でさまざまな構造を考えるのはこのためである。図示すれば，次のようになる。



統合整理 17世紀になって急速に発展，膨張，複雑化した数学は，急速に発展，膨張した都市にたとえられる。この都市では，あちこち至る所に勝手に家が建てられ，道は迷路のようになり，かつ狭くなった。いざ事があったときのために区画整理し，大きな道をつける必要がある。数学においても19世紀になって非常に複雑化してしまった数学を，構造の立場で**統合整理**することになった。どんな位相か，どんな代数系か，どんな測度か，どんな順序構造かなどによって，整然と並べられ，必要な時に必要な理論がすばやく取り出せるようになった。

厳密化 ユークリッドの原論における定理の多くは，ユークリッドの公理だけからは証明されないことが19世紀になってわかった。

たとえば「2辺夾角が等しい三角形の合同」を証明するのに「2つの直線が面積を囲む」ことが不可能であることを用いるがこれは原論にある直線の定義と公理からは導びかれない。

この事は紀元前300年から19世紀末まで誰も疑わなかった。ヒルベルトがはじめて厳密な公理（無矛盾，完全，独立）を作りあげたが，このとき，無定義語の考え方が役立ったと思われる。姿，形のない無定義語（たとえそれが現象空間をモデルにしていても）の集合の上で考えることにより，直観から，解放され，自由に論理的構想が練られるのである。

〔2〕 数学教育における構造の役割

数学教育の目的は，事象を数理的に捉え，論理的に考え，統合的，発展的に考察し処理する能力を育てることである。このことは，上で考察した構造の役割と不可分の関係にある。**子どもに構造を教えることは，数学教育の一つの重要な目的である**といえよう。子どもが将来社会に出るとき，至る所で構造的な考え方——集合およびその要素間の関係による考え方——が必要となるであろう。彼がもし，何かの研究者（自然科学，社会科学，行動科学を問わず）になるのだとしたら，その必要性は一層増す。したがって，構造やその用法を習得させることがもし可能ならば，**構造それ自身が非常に重要な教材なのだ**といえる。すなわち**構造の教育それ自身が数学教育の一つの的目なのだ**といえる。

また構造は子どもが**数学を習得するための手段**としても，大きな役割をもつ。構造による指導がもし可能ならば，学習は能率的，効果的に行なわれる。次に，その理由をあげてみよう。

数学の教材には自然数，整数，有理数，実数，複素数，整式，有理式，方程式，不等式，図形，関数，ベクトル，運動，論理などさまざまあるが，これらは群，環，体，連続，連結，稠密，離散的，順序などの立場で**統合的に捉えられる**。いまここにあげたのだけが構造なのではなく，もっと primitive なもの，例えば，可換性だけのもの，結合性だけのもの，可逆性だけのものなどいろいろ考えられる。このような立場で見るとあるものは，同型であったり，あるものは，準同型であったりする。さまざまな教材が，統合整理され，関連づけられるとき，**記憶され易く，応用され易い**。かって生活単元学習の中で，数学の系統性が軽視されたとき，著しい学力の低下をもたらした。このことは，断片的で脈絡のない知識というものが，記憶され難くかつ応用され難いことを物語っている。（勿

論，戦後社会の混乱，時間数の減少などの原因も考えなければならないが）

生活単元学習による算数の系統性や論理性の軽視などに対して，教育現場において強い批判の声が起こった。また，国立教育研究所や日本教育学会などによる学力調査の結果，それぞれ算数の基礎学力の著しい低下が指摘された。

また，ある教材を学習し，次にそれと同型の他の教材をやるとき，前者と同型であることを指摘すれば後者におけるさまざまな考察に要する時間は大巾に減少させることができるし，後者の学習において前者の復習を兼ねていることにもなる。すなわち**時間的に経済的**なのである。

われわれは，類似のものを並べて考察するとき，その共通性と異質性などを発見し観察がより緻密になる。たとえば双生児の兄弟を一人一人見るときは，その違いが全くわからないが，並べるとわずかな違いを発見する。有理数と実数は体（ともに標数0）という意味でも，稠密であるという意味でも，共通である。このように似通っているが数列の極限を考えるとき，前者と後者は完備性において異なっていることがわかる。さまざまな構造の立場で，われわれは**教材の比較をし，教材をより深く認識することができる**のである。

こども達にとって，学習したことが生かされることは，嬉しいことである。子どもにとって，ある教材を学んだ構造が，他のより高い教材のところで早速生かされるなら，**学習に興味を持つ**だろう。いうまでもなく子どもが興味をもって学習するかどうかは，学習効果の上で，極めて重要なことである。

構造による学習がうまく行われるとき，小中高大における数学教育が**一貫性をもつ**ことになる。中学校で習う実数も，高校で習う（ことになった）ベクトルも，ともに実数体上のベクトル空間(の要素)である。高校でベクトルを習いながら実数の一つの面を発見できる。小中高大における教育が切れ切れではなく，一貫性を持つことは望ましいことである。

群盲が象をなでる話があるが，われわれが物を知ろうとするとき，各部分のみではなく全容を見るのは大切なことである。構造はある意味で，**数学の全容を見るための視点を与えてくれる**。構造の観点から教材の全容を捉え，基本的原理を探ることは重要である。

以上のように，構造はもしも教えることができるなら，それ自身が価値ある教材であると同時に，全体の学習を効果的，能率的ならしめるためにも重要である。

〔3〕　数学における具体の役割

ユークリッドの原論における定理は，すべて公理から論理のみで得られた筈であった。子どもがよくやるような具体を媒介とした論理の飛躍などはない筈であった。ところが，今日では，ユークリッド（またはユークリッド以前の数学者）が，この子どものように，具体にだまされて，多くの定理を誤って証明していることがわかった。これは前世紀，ヒルベルトによる徹底的な再検討でわかったことである。たとえば，円が内部と外部をもっていることは，ユークリッドの公理から論理で導びくことはできない。にもかかわらず，このことをユークリッドは認めてしまっている。直観の入り込むことを厳重に警戒していたユークリッドの監視の目をごまかして直観が入り込み，ユークリッドをだましたのである。けれども，知らぬが仏のユークリッドは幸いであった。それによって多くの定理を発

表することができたからである。また，それ以来二千年間だまされて，その定理を信じ用いて来た多くの数学者，自然科学者も幸いであった。この定理を応用することにおいては何の不都合も起らない。なぜなら，その定理は正しいからである。それはヒルベルトの厳重な吟味にも堪える。ユークリッドの犯したのは，**形式上の誤り**なのである。彼はもっと多くの公理をはじめにつくって置きさえすれば，良かったのである。

もう一つの似たような例をあげる。カントール実数の考察から出発して集合論を打ち立て，次々に多くの定理を発見した。やがてラッセルがカントールの定義自身の中に矛盾があることに気づいた。（ラッセルの逆理）この集合論における形式上の不備は今日まで尾を引く大問題なのであるが，[14]それによってカントールの定理が損われることはないのである。カントールの研究したのは実際そこに存在している具体性をもった実数，空間，関数……などだからである。そして今日，この集合論なしでは数学は存在しないのである。集合論を発表した当時，師のクロネッカーをはじめ多くの数学者から非難をあび，精神病院で死んだ内気なカントールが，もし最初にこの形式上の，しかし抜き差しならない不備に気がついたらどうであっただろうか。知らぬが仏のカントールが大胆に発表した集合論の恩恵を，今日の数学がどれほど蒙っていることか。

C.B.アーレンデルファーは，定理の発見の多くが，「まず**観察にもとずいて定理を推定する**。それを応用の面からためして見る。そこで生き残ったものを組織化する。それにもとづいてこれらが証明できるような公理を見い出して証明する。」の形であることを指摘している。[15]定理は発表されるとき公理，証明，定理，応用の順であるが，発見の動機はまず**具体の観察**なのであり，この観察において，最初に働くのが直観である。ユークリッドの幾何学にしても集合論にしても，まず定理が発見されて，後から形式上整備されているのであり，この定理の発見に役立つのが**具体の観察**なのである。

〔4〕 数学教育における具体の役割

前節〔3〕において具体を通じて，定理が発見されることを述べた。これは数学教育における具体の重要性を示している。

理解に役立つ 子どもはリンゴ3個，猫3匹などの具体から“3”という抽象を得，りんご3個とりんご5個でりんご8個，また猫3匹と猫5匹で猫8匹……などを通じて“3＋5＝8”を知る。もしこれをペアノの公理で自然数を抽象的に教えても“3＋5＝8”を理解することは，天才を除いては不可能であろう。われわれの講義においても，群や位相空間など抽象の中で述べるとわかりにくいが，何か具体例をあげると“ああ，わかった”ということが多い。日常の会話でも具体的に話されると理解し易いことを良く経験する。抽象を理解するためには，具体の裏づけが非常に役立つことがわかる。

思考に役立つ 子どもが“3＋5＝8”を導びくときも，この抽象的な思考の裏側に具体——3個と5個で8個など——を見ているのである。われわれが抽象的に論理を展開するとき，その裏側でなんらかの具体での analogy を描いていることが多い。抽象のままで展開できるのは，抽象そのものが具体にまで脳裡で変質しているのである。最初は抽象であった。“3＋5＝8”が具体と同様な働きをするように。

応用に役立つ 一般的な理論さえ知っていれば，その一般論の中に含まれてしまうような問題は容易に解けるかというと，実際はなかなかそうはいかない。われわれはいろいろ

な具体に習熟していないとなかなか応用しにくいものである。

〔5〕　抽象と具体の実際のあり方

以上で抽象と具体がそれぞれ数学教育にとって欠かせない重要なものであることを述べた。そして〔3〕と〔4〕で具体が抽象に優先すること，特に〔4〕において具体に裏づけられない抽象は，理解しにくく活用しにくいことを示した。**多くの具体に習熟したのち，抽象の一つである構造を導入し，その構造によつていろいろな具体を総合整理し，一般的基本的原理を把握するようにしなければならない。**このような原則を踏まえた上で，実際に構造をどのように導入すべきかを考察しよう。

1.　**初歩的な集合の概念を早く導入しておく方が良い。**なぜなら，子ども達は極く低学年でも，日常生活において，初歩的な集合——友人，家族，動物，器物，がん具，本など——この中で，共通集合，和集合，補集合，包含関係，空集合（からっぽ）などを体験している。二三の例をあげて説明しさえすれば，そうわかりにくいものではない。のみならず，中学生に教えた江原氏（長崎市立小島中）出光氏（活水中）等の経験によれば子ども達は，“集合ってこんなに易しいものなのか”といって非常に興味を示したという。荒木雄喜氏は，

> 集合概念は，数個の玩具や花などの例を示すことで簡単に形成される概念ではない。このことはG・カントルが，はじめて集合論を公表したとき，学界はその学問的な価値を理解しなかった事実から考えても肯定できるであろう。しかも幼稚園の幼児に＜空集合＞を指導する＜SMSG＞の無暴さは，むしろ，滑稽というべきであろう。幼児には，＜無＞ということを形に表現して思考の対象にする意義が理解できないのである。[11]

というが，カントールの集合論と初歩的な集合との間には，大変な隔たりがあるのである。また要素が一つもないこと，そのような場合に空集合というのだということが，それ程難解なものだとは思えない。実際，子ども達は，空集合を何のためらいもなくなく理解したと前記両氏はいっている。われわれの概念形成は，もともと all or none ではない。**それぞれの発達段階に応じて形成されていく。**われわれが集合論を習ったときでも，ユークリッド幾何を習ったとでも，それぞれの段階でそれにふさわしい概念を形成して来た。

all でなければ，知る価値がないというならすべての学問は知る価値がないということになる。子どもたちが**初歩的な集合概念を得ると**，この概念は，早速，**関数，方程式，不等式，数の分類，図形の一般と特殊，などの理解に生かされるし**，日常生活において**論理的思考の訓練になる。**また，ものの属性を捨象して等質化して見る抽象の訓練でもある。

2.　**負の数が導入された後，整数の加群環，0を除く有理数，実数，正の有理数，正の実数などの群，有理数，実数の体，有理数，実数の稠密性，全順序性などを教える。**いずれも，各具体の上で成り立つ共通な性質を調べるという形で公理を教え，どのような公理が成り立つときに群，環，体などといかれるかについてふれておく，逆元の逆元がもとの元になること，すなわち　$-(-a)=a$　$1 \Big/ \frac{1}{a}=a$　などには触れるが，あまり抽象的な議論はしない方が良い。たとえば，Papy の教科書（第6学年を対象に実験した結

果書かれた教科書であるが）は　ａｂ＝ｂａ　ａ（ｂ＋ｃ）＝ａｂ＋ａｃ……　などの証明に力を入れている。これは，ほんの一部の優秀な生徒には，暗黙のうちで認めていた事が，証明されることによって驚きと興味を示すかも知れない。しかし，一般の生徒にとっては，はじめの抽象的な議論にいやいやついていって，漸く証明された結果が自明なことに過ぎないとき，数学に対する興味を失ないはしないだろうか。一度数学嫌いになった子どもはそのまま永久に数学嫌いを続けることが多く，しかも，われわれの見聞する所，数学嫌いは決して少ない数ではない。内容がいかにあっても，**相手が逃げてしまつては無に等しい。**

なるほど，ブルーナ等の子どもに対する科学教育の可能性に関する理論はあるが，習う子どもの精神的準備，教える側の十分な実力と準備があってその可能性があるということなので，一般の（ということは勉強よりも遊ぶことの好きな）子ども達に，雑用を多くかかえた一般の教師が教えることとは区別して考えるべきである。（勿論，教育の可能の問題を無視する訳ではない。）筆者は，義務教育においては，数学嫌いを作らないようにすること，具体的なものについて十分習熟すること，構造はその後で各具体における基本的原理を示すことによって教えるべきだと考える。

3.　高校では，最初に群，環，体などを公理で示し，それまで習った例を上げこれらの構造で成り立つ易しい定理を証明する。なぜなら，中学で一度習っていること，具体例にいくつか習熟していと，高校で習うベクトル，行列などを構造の立場で統一的に論ずることができることによる。また，群，環，体は公理が少なくて，既知のことと未知のことがはっきりしていて論理的考察をし易いこともある。高校においては，演算的訓練も必要であるが，そのための丁度よい教材でもある。

4.　ブール代数は高校の間でどこかでやらなければならない。はじめにやった，群，環，体の次にやるのが良いと思う。代数的な構造についてまとめること，記号論理学の基礎であること（記号論理学は高校で是非やるべきだと思う）による。

む　す　び

われわれは，抽象と具体のありかたについて，適切な姿を探ってみた。教育は本来，試行錯誤的な面が強く，いかなる教育プランも実践なくしては，最適かどうかはわからない。最もふさわしい教育内容は，子どもたちの教育的可能性を探るブルーナー等の研究だけでは，決定することができない。（そういう研究も必要だが）それには広く教育の現場での実験を積み重ね，厳密な教育的統計的な判断が必要となってくる。このような方法によって，はじめて，正しい教育方法が確立できるのである。

(1)　C. Bréard : Mathématique

(2)　Papy : Mathématique Moderne（矢野健太郎訳　パピイの現代数学）

(3)　H. Dittman : Algebreishe Structure und Greichungen　（時田幸男「群について」数学教育 No.120 で内容の一部が紹介されている）

(4)　School Mathematics Study Groop E.G. Begle を指導者にして1958年に総織される。

(5)　University of Illinois Committee on School Mathematics M. Beberman を指導者に

1952年に組織される。
(6) 三橋重男：ソビエトの数学教育　200頁
(7) 駒林邦男：思考力形成の授業　34頁
(8) Ｊ.Ｓ.ブルーナー著　鈴木祥蔵，佐藤三郎訳　教育の過程
(9) 佐々木元太郎：イギリスのＳＭＰ　193頁
(10) 荒木雄喜：ＳＭＳＧを中心とする数学教育現代化の動向　算数と数学　No.163
(11) 同上：現代化の目的と実践との間，算数と数学　No.169
(12) 前原昭二訳：ブルバキ数学原論集合論要　約48頁〜49頁
(13) 遠山啓：数学教育の新しい構想，数学教育　No.32
(14) Ｇ.Ｔ.ニーボン　安藤洋美訳　数学基礎論　212頁〜242頁
(15) Ｃ.Ｂ.アーレンデルファー　数学の性格　数学セミナー