条件Aを満足する単純準群

江　口　俊　男

Simple semigroups satisfying Condition A

By Tosio Eguchi

本文の目的とする所は，前回の定理5にのべた単純右イデヤルの存在が idempotent の存在を確かめる唯一のものであり，又これが定理5の証明を簡単にするものであることを示すことである。

記号はすべて前回と同じ記号を用いる。

定　理　1

Sを単純左イデヤルの階和である所の核をもつ準群とする。

若し，$S-N$ が idempotent をもつならば，$S-N$ に属する各 idempotent は素である。

証　明

$e \in S-N$ を idempotent とする。idempotent $x \in S$ が $ex=xe=x$ を満足するならば，$x=e$ であることを示す。

Sは単純左イデヤルの和であるから，$x \in L$ ならば，$L=N+Sx$ となるような単純左イデヤルLがある。

a)　先づ，$xe=x$ を用いる。

$e=\bar{x}x$ なる$\bar{x}$が存在し，$e \in Sx$ から，$e \in L$。

b)　関係 $ex=x$ を用いる。元x，eはLに属し，$ex=x^2$ を満足する。前回の定理1bから，xを約して，$e=x$ をうる。

定　理　2

Sを条件Aを満足する単純準群とする。Sは idempotent $e \in S-N$ をもつ。このときSは完全に単純である。

証　明

若し，Sが少くとも唯一の non―N 単純右イデヤルをもつということが示されれば，定理は証明されたことになる。何故ならば定理5の（前回）仮定がこのとき満足されるからである。

この為，$N+eS$ がSの単純右イデヤルであることを示す。$N \subset R \subset N+eS$ なるSの右イデ

ャルRが存在すると仮定する。

このとき

$$N \subset N+(a,\ aS) \subseteqq R \subset N+eS \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

これが不可能なることを示す。

Sは単純であり，aは $N_0=N$ に属しないから，$SaS=S$ である。x，$y \in S-N$ に対して $xay=e$。$x^*=exe$，$y^*=ye$，$f=ay^*x^*$。

$x^*ay^*=exeaye=e(xay)e=e^3=e$，元$x^*$，$y^*$はNに属しない。

$ef=f$（$ea=aa \in eS$だから）

$fe=ay^*x^*e=ay^*x^*=f$（$x^*e=x^*$），$f^2=ay^*(x^*ay^*)x^*=ay^*ex^*=f$（何故ならば，$x^*ay^*=e$）

$ef=fe=f$を満足する単位元fはNに属しない。何故なら，$x^*=ex^*=x^*(ay^*x^*)=x^*f \in N$ は$x^* \in N$を含まぬ。之は不可。定理1によりeは素である。

故に　$f=e$。故に$e=ay^*x^*$，$e \in aS$，$eS \subseteqq aS$。

$$N+eS \subseteqq N+(a,\ aS) \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

関係式（1）（2）は共に$N+(a,\ aS)=R=N+eS$，之は仮定に反する。之で証明ができた。

定理2は次のように前回の定理4を用い，この定理1を用いないでも証明できる。即ち，上述の如く，$N+eS$ はSの単純右イデヤルであるという事を証明すれば十分であるが，今，$N \subset R \subset N+eS$ をもつSの右イデヤルRが存在すると仮定する。

$a \in R-N$ とすると$N \subset N+(a,\ aS) \subseteqq R \subset N+eS$。$SaS=S$。従って二つの元x，$y \cdot \mathrm{non} \in N$，$xay=e$（*）が存在する。

Sは単純左イデヤルの和であるから，一つの単純左イデヤルL，$e \in L$故に$L=N+Se$が存在する。関係（*）は，Lに属する$ay=\bar{x}e$なる$\bar{x}$の存在を含み更には，元ayはNに属しない，然して之は（*）に反する。$ay \in aS \subset R$ から $ay \in L \cap R$ は明らかである。

a）関係 $ay \in eS$ は $eay=ay$ を含む。

b）元ayはLの或る群一類G_αに属する。若しe_αがこの群の単元ならば，$e_\alpha ay=ay$，元e，e_α ayはLに属する。

　故に　$eay=e_\alpha ay$。　ayを略して　$e=e_\alpha$。

　さて　ayに対して，$ay \cdot \bar{a}=e$ なる元$\bar{a}$をとる。このとき $eS=ay\bar{a}S \subseteqq aS \subseteqq R$。故に $N+es \subseteqq R$。之は仮定に反する。

定理2の証明と前回の定理3を用いて次の命題をうる。

定理2の逆。

Sを条件Aを満足する単純準群とする。若しSの単純左イデヤルの一つが，少くとも一つの idempotent∈S—N をもつならば，このとき，Sのすべての単純左イデヤルは idempotent∈S—N をもつ。更に，Sには，各々単位元をもつ単純右イデヤルが存在する。

更には，Sの単純左，右イデヤルが idempotent によって一般化される。

前回にのべた結果を用いると，こゝにもっとはっきりした，核をもつ単純準群の構造をきわめることができる。

定 理 3

Sを条件Aを満足する単純準群とする。Sは少くとも一つの idempotent S—N をもつ。このときSは二つの独立なる集合の和として S=G+Q とかゝれる。集合Gは独立なる準同型なる群の和であり，集合Qは N—potency 2 なる index をもつ N—potent 準群の和である。これらの準群の任意の二つの交わりはNである。

証 明

仮定より，S は単純左イデヤルの和であることは明らかである。各単純左イデヤルを前回の定理4に従って分解すると，同じ定理5，定理6もより当然本定理が導かれる。

注 意

GとQが一意的に定まることは容易にわかる。R は S のすべてのNべキ元の集りであり，G はSのすべてのnonNべキ元の集りである。集合GとRは一般には準群ではない。これはRのNべキ準群への分解が一意的に決定されないという事実に注目すればわかる。之と反対に，Gの独立なる群えの分解は一意的であることを知る。

今二つの異る群G_α，G_βに属する元aが存在すると仮定してみる。すると

$$a=e_\alpha a=e_\beta a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

元aはLの或る単純左イデヤルに属する。aに対しすべての元SaはLに属する。

特にG_αのすべての元とG_βのすべての元もそうである。故にa，e，e_βはLの元である。

$e_\alpha a$ non∈Nだから，(3) に於てaで約すことができる。従って$e_\alpha=e_\beta$，之は仮定に反する。

定理3と前回の定理4から次の命題をうる。

定理3の逆

Sを条件Aを満足する単純準群とする。S—N が独立なる準同型群の和であるための必要且十分条件は，S—N が少くとも一つの idempotent を含み，且つ如何なるNべキ元をも含まぬことである。

Summary

1. Let S be a semigroup with kernel, which is a class sum of its simple left ideals. If S—N has idempotents, then every idempotent ∈S—N is Primitive.

2. Let S be a simple semigroup satisfying Condition A. Let S have an idempotent e∈S—N. Then S is completely simple,

3. Let S be a simple semigroup satisfying Condition A. Let S have at least one idempotent∈S—N. Then S can be written as a sum of two disjoint isomorphic groups. The set Q is a sum of N—potent semigroups with the index of N—potency equal to 2. The intersection of any two of these semigroups is N.

Literature cited

[1] Semigroups without nilpotent ideals, J, Math, 71 (1949), 837—844.

[2] Extention of semigroups, Trans, Amer, Math, soc, 68 (1950), 195—173.

[3] Smigroups contaning minimal ideals, Amer J. Math, 70 (1948) 521—526.