Title	電気回路講義ノート
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路講義ノート; 2014
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/10069/34606
Right	

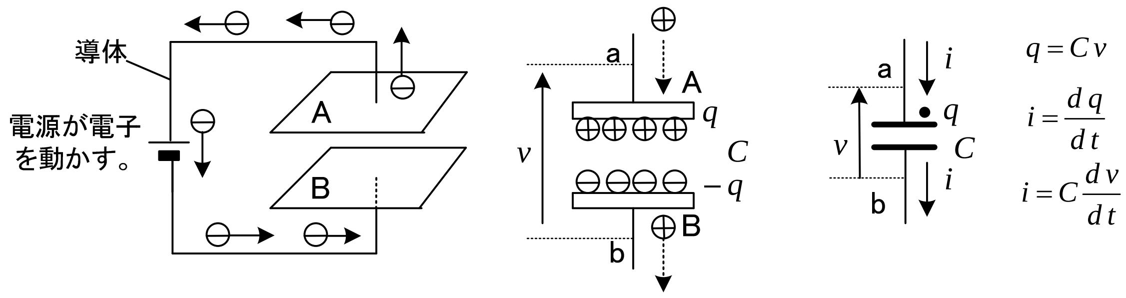
第3章　コンデンサ

コンデンサの基本的性質とコンデンサを含む直流回路について述べる。スイッチを入れた瞬間や時間が十分経過したときの値は簡単に求まる。

○　コンデンサとは

コンデンサ(capacitor)（**キャパシタ**とも言われる）は電子回路の部品から電力設備に至るまで，電圧を安定に（一定に）保つ用途，ノイズを吸収する用途など大変良く使われている。

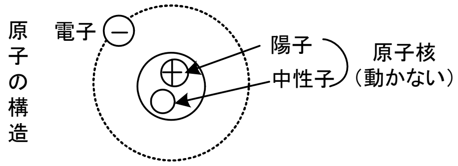
コンデンサは図 3-1 に示すように，２枚の金属板Ａ，Ｂを平行においたもので，電荷(electric charge)を金属板表面に貯めることができる。電源を接続すると，(a)図に示すように極板Ａから，極板Ｂに電子が移動し帯電する。(b)図に示すように等価的に正の電荷が極板Ｂから極板Ａに電池を通って移ると考えてもよい。両極板の間は絶縁物(insulator)（誘電体）で，そこを電子(electron)が移動することはない。



(a)　(b)　(c)

図 3-1 コンデンサ（キャパシタ）

コンデンサの性質



1．極板Ａにq [C]（coulomb クーロン）の電荷が蓄えられている時，極板Ｂには，必ず$-q$ [C]の電荷が蓄えられる。逆に, Ｂにq [C]の電荷が蓄えられている時, Ａには, 必ず$-q$ [C]の電荷が蓄えられる（これはqを負と考えればすむことだが）。

2．極板Ａの電荷をq [C]とし（どちらの極板かをはっきりさせるため黒丸●印を付けて表す），点 b を基準とした点 a の電圧をv [V]とすると，両者は比例関係にある。すなわち，

$$q = C\ v \qquad (3\text{-}1)$$

ここで，C [F]（farad ファラド）は**静電容量**(capacitance)と呼ばれる。C は常に正である。物理（高校の教科書）ではC は電気容量と呼ばれる。(3-1)でq が負のときv は負である。

3．電荷qの変化があるときには，電流が導体に流れる。この電流は極板の両方で等しくなる。電流は，電荷の微分であり，次式が成立する。

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{3-2}$$

なお，１章で電流は１秒間に通過する電荷の量と言ったが，これは電流が一定の場合だけ成り立つことで，厳密には正しくない。しかし微分を知らない人にはそのように説明するしかない。

(3-1) , (3-2)よりコンデンサの電圧と電流には次式の関係がある。

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \text{(3-3)} \qquad\qquad v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v_0 \quad \text{(3-4)}$$

ただし，v_0はコンデンサ電圧の**初期値**(initial value)（時間$t = 0$での値）である。

(3-4)について，もう少し詳しく述べる。(3-3)の両辺を$t = 0$から現在$t = t$までtで積分すると（厳密には現在tとdtの記号は違う記号にすべきだが誤解はなかろう），

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = \int_0^t \frac{dv}{dt}dt = \left[v(t)\right]_0^t = v(t) - v(0) \qquad \text{公式：}\int_a^b \frac{df}{dt}dt = f(b) - f(a)\ \text{より}$$

$v(0) = v_0$　だから，(3-4)が得られる。(3-4)は，

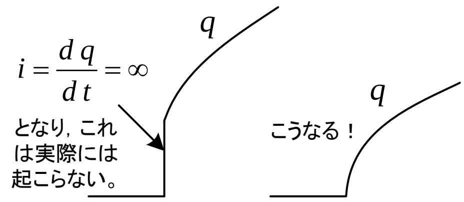
$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i\,dt + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \qquad （v(-\infty) = 0\ \text{と考えている}）$$

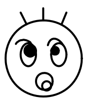
とも書かれる。$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i\,dt$　（時間0までに蓄えられた電荷をCで割った量）である。

4．<u>**コンデンサの電荷は急に変化しない。従って，コンデンサの電圧も急に変化しない＊。**</u>

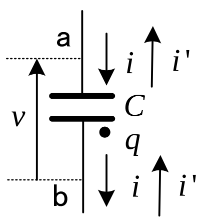
コンデンサの電流は急に変化することがある。

＊　$q=Cv$だから。





注意するけど，電圧と電流の矢印や，どの極板の電荷をqと置くかによって，式にマイナスが付くことがあるよ。



$$q = -Cv \qquad i = -\frac{dq}{dt} \qquad i' = \frac{dq}{dt}$$

どちらか迷うときには, 具体的に考えよう。$q > 0$とすると，b点の電位が高い，よって，$v < 0$だからマイナスが必要。また，$q > 0$と仮定し，qが増えていれば$dq/dt > 0$で，b点を下から上に電流が流れる（正電荷が移動する)。よって，i'については，マイナスはいらない。しかし，$i = -i'$だから，iについてはマイナスが必要である。電圧や電流の記号の矢印と極板のどちらをqと置くかは自由に決めて良いから，図3-1（c）のように選ぶとマイナスをつけなくてよい。vとiは逆方向の矢印で定義したとき(3-3)のようにマイナスがつかない。

5. コンデンサに蓄えられるエネルギー

最初時間$t=0$でコンデンサに電荷がなく，電圧も 0 の状態から，現在$t=t$（このとき電圧$v(t)$）までにコンデンサに流入したエネルギー$W\ [\mathrm{J}]$は，電力の積分で求められる。すなわち，

$$W\ =\int_0^t v\,i\,dt=\int_0^t vC\frac{dv}{dt}dt=\int_0^t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right)dt=\left[\frac{1}{2}Cv(t)^2\right]_0^t=\frac{1}{2}Cv(t)^2 \quad (3\text{-}5)$$

である（$v(0)=0$だから）。これは，電圧$v(t)$のコンデンサに蓄えられているエネルギーである。$W=q(t)v(t)/2$で$q(t)v(t)$でない。充電開始のころ$v(t)$は小さく平均$v(t)/2$となっている。

○　コンデンサの基本特性

図 3-2 に示すように，抵抗とコンデンサが直列につながれた回路に，$t=0$で直流電圧を加えるとき，電流，電荷，コンデンサ電圧を求めよう。ただし，コンデンサの初期電荷（スイッチを入れる直前$(t=-0)$の電荷）を$q=q_0$とする。

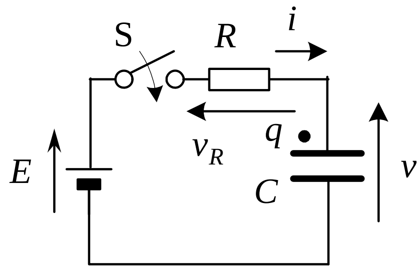


図 3-2　コンデンサに直流電圧を印加

電圧電流の測定方向を図のように定義すると，スイッチを入れた後で成り立つ式は，

$$E=v_R+v=Ri+\frac{q}{C} \quad (3\text{-}6)$$

$$i=\frac{dq}{dt} \quad (3\text{-}7)$$

(3-6)に(3-7)代入して

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \quad (3\text{-}8)$$

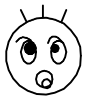
となる。これは微分方程式と呼ばれている。数学で勉強するので，公式のみ示す。

１階の微分方程式 (differential equation)

$$a\frac{dx}{dt}+bx=c$$

ただし，a,b,cは**一定の定数**（$c=0$でもよい）

解は，$x=\dfrac{c}{b}+Ae^{-\frac{b}{a}t}$　　　Aは定数



覚え方　1）微分の項を 0 とおいて，$x=c/b$を得る。これが，第 1 項目(**定常項**と言われる。)　2）xを含まない項$c=0$とし，$d/dt=p$とおきxを除いて，$ap+b=0$より，$p=-b/a$　これが，第 2 項目（**過渡項**と言われ，いずれ 0 になる）のtの係数。

公式を適用して，

$$q = CE + Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{3-9}$$

コンデンサの電荷は急変しないので，$t = +0$（スイッチを入れた直後）も $q = q_0$ として

$$q_0 = CE + Ae^0 = CE + A \qquad A = q_0 - CE \tag{3-10}$$

従って，$$q = CE + (q_0 - CE)\,e^{-\frac{t}{RC}} \tag{3-11}$$

$$v = \frac{q}{C} = E + (v_0 - E)\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{ここで，} \quad v_0 = \frac{q_0}{C} \tag{3-12}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E - v_0}{R}\; e^{-\frac{t}{RC}} \tag{3-13}$$

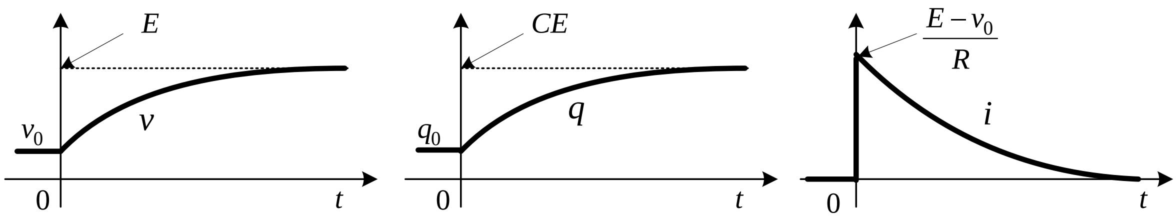


図 3-3　過渡現象の波形

コンデンサのスイッチを入れる前の初期電荷が０であれば，$q_0 = v_0 = 0$ であるから電圧，電荷は０から上昇する。スイッチを入れた瞬間には，コンデンサの電荷は急に移動しない。この結果，電圧も急には変化しない。一方，電流は電源電圧と初期コンデンサ電圧との差を抵抗で割った値が急に流れる。初期電荷が０であれば，スイッチを入れた瞬間コンデンサは一本の導線とみなせる。時間が十分経過すると，コンデンサは充電され電流は流れなくなる。このとき，抵抗にかかる電圧は０だから，コンデンサ電圧は電源電圧と等しい。逆に，コンデンサ電圧が電源電圧と等しくなるまで電流が流れる。コンデンサがあると電圧の急な変化を抑えることができる。

時間が十分に経過したときのコンデンサ電圧は E であり，このときコンデンサに蓄えられるエネルギー W_c [J]は，性質５より

$$W_c = \frac{1}{2}CE^2 \tag{3-14}$$

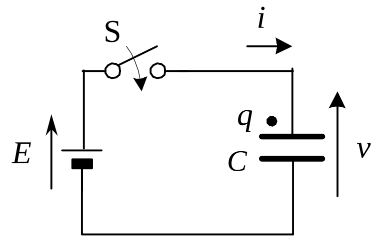
一方，電源が供給するエネルギーは，$q_0 = v_0 = 0$ のとき

$$W = \int_0^{\infty} E\,i\,dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = -CE^2 \left[e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{\infty} = CE^2 \tag{3-15}$$

であり，最終的にコンデンサに蓄えられる電荷 Q に電源電圧 E を掛けた値である。$W = QE$ が成り立つ。抵抗で消費されるエネルギーは，

$$W_R = \int_0^\infty R\,i^2\,d\,t = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} d\,t = -\frac{CE^2}{2}\left[e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2 \qquad (3\text{-}16)$$

以上により，電源が供給するエネルギーは，抵抗の大きさに無関係に（面白いね），半分は抵抗で消費され，残り半分がコンデンサに蓄えられる。



ところで，図のようにコンデンサだけある回路で，スイッチを入れたらどうなるだろうか（$q_0 = 0$ とする）。

(3-13)で，$R \to 0$ として考えると, 電流は瞬間的に∞となり, すぐに流れなくなる。電圧は一瞬にして電源電圧まで上昇し，電荷 $Q = CE$ が蓄えられる。コンデンサの電圧や電荷が急変する特殊な例である。実際には，電源，電線及びコンデンサの抵抗が存在するので，この回路は仮想的なものである。一般には性質の 4 が成立つと考えてよい。

○　コンデンサを含む直流回路

以下のことを知っていれば，スイッチを入れた直後 $(t = +0)$ とスイッチを入れて時間が十分に経過したときの，コンデンサを含む直流回路のいろんな値を求めることができる。

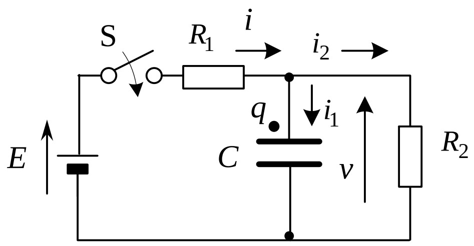
ここで初期電荷とは，スイッチを入れる直前 $(t = -0)$ のコンデンサの電荷のことである。

コンデンサ

スイッチを入れた直後	：コンデンサの電荷や電圧は急に変化しないので，初期電荷が 0 の場合にはスイッチを入れた直後の電荷や電圧も 0 で，コンデンサを導体と考えて問題を解くとよい。初期電荷がある場合には，その電圧を用いる。コンデンサの電流は急変することがある。 この性質は,直流回路,交流回路いずれでも成立する。
スイッチを入れて十分時間が経過したとき	：直流電源（電圧源または電流源）がある回路か，電源のない回路で，抵抗が回路のどこかに含まれている場合，回路の全ての量は一定となる。電荷も一定となり，その微分の電流は 0 となる。よって，コンデンサに電流は流れないから，絶縁体として解ける。（注意　電荷や電圧は 0 とは限らない。） この性質は交流回路では成立しない。

＊スイッチを切って，コンデンサを回路から切り離すと，電流は流れず，電荷はそのまま保存され，電圧も 0 ではない。よって，回路を切った後でも，コンデンサに触ってはいけない。

問題１　図の回路で, スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧, 電流, 電荷及びコンデンサに蓄えられているエネルギーを求めよ。ただし，スイッチを入れる前のコンデンサの初期電荷は０とする。



(解) 初期電荷 $(t=-0)$ が０で，スイッチを入れた直後コンデンサの電荷は急に変化しないから，

$$q=0 \quad \therefore v=\frac{q}{C}=0\ ,\ i_2=\frac{v}{R_2}=0, \qquad i=\frac{E-v}{R_1}=\frac{E}{R_1},\ i_1=i-i_2=i=\frac{E}{R_1}$$

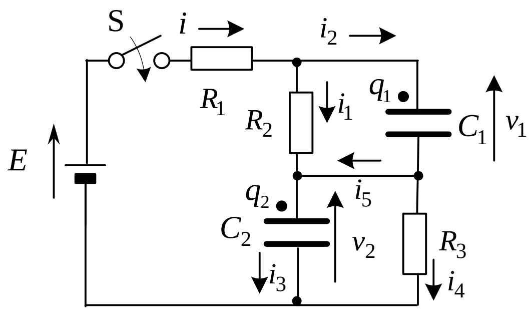
コンデンサのエネルギー　$W=\dfrac{1}{2}Cv^2=0$

スイッチを入れて時間が十分経過してからは，直流回路ではコンデンサに電流は流れないから，回路から除いて電流を求めることができる。

$$i_1=0 \quad \therefore i=i_2=\frac{E}{R_1+R_2} \qquad v=R_2 i_2=\frac{R_2 E}{R_1+R_2} \qquad q=Cv=\frac{CR_2 E}{R_1+R_2}$$

コンデンサのエネルギー $W=\dfrac{Cv^2}{2}=\dfrac{C}{2}(\dfrac{R_2 E}{R_1+R_2})^2$

問題２　図の回路で, スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧, 電流, 電荷を求めよ。ただし，スイッチをオンする前のコンデンサの初期電荷は０とする。



(解) スイッチを入れた直後コンデンサの電圧や電荷は変化しないから

$$q_1=0, v_1=0,\ q_2=0, v_2=0 \qquad \therefore i_1=\frac{v_1}{R_2}=0,\ i_4=\frac{v_2}{R_3}=0 \qquad i=\frac{E-v_1-v_2}{R_1}=\frac{E}{R_1},\ i_2=i_5=i_3=i$$

スイッチを入れて十分時間が過ぎてから，直流回路ではコンデンサに電流は流れないから

$$i_2=0,\ i_3=0 \qquad i=i_1=-i_5=i_4=\frac{E}{R_1+R_2+R_3}$$

$$v_1=R_2\, i_1=\frac{R_2\, E}{R_1+R_2+R_3}, q_1=\frac{C_1 R_2\, E}{R_1+R_2+R_3} \qquad v_2=\frac{R_3\, E}{R_1+R_2+R_3}, q_2=\frac{C_2 R_3\, E}{R_1+R_2+R_3}$$