Title	電気回路講義ノート
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路講義ノート; 2014
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/10069/34606
Right	

第5章　交流回路

本章では，抵抗，コイル，コンデンサに交流電源をつないだ場合を考える。前提条件として，回路のスイッチを入れて時間が十分経過した**定常状態**(steady state)のみを扱う。

○　交流とは？

これまで，主に電池についての話をしてきた。電池の電圧は一定で，時間的に変化しない。これは，**直流**(direct current DC)と呼ばれる。一方，家庭に送られているコンセントの電圧や電流は時間的にプラスとマイナスに変化している。時間的に変化し，平均値が 0 であるような電圧や電流を**交流**(alternating current AC)という。これを式で表すと**正弦波**（sin 関数または cos 関数）となる。

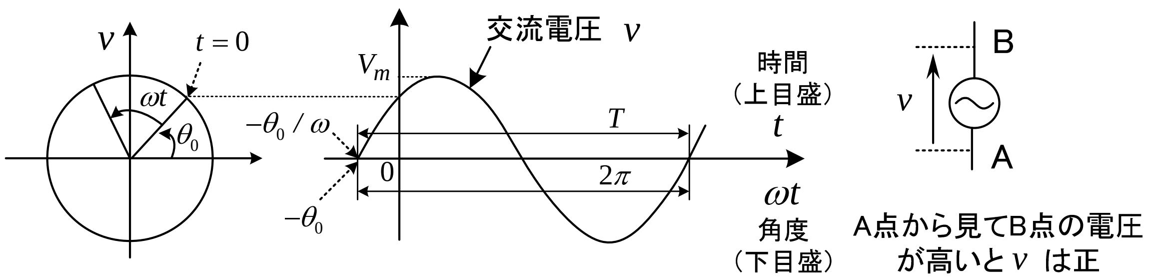


図 5-1　交流

図 5-1 の正弦波の**交流電圧**(alternating voltage, AC voltage) v を式で書くと，

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_0) \tag{5-1}$$

ここで，V_m ：電圧の**振幅**(amplitude)または最大値[V]，ω ：**角周波数**(angular frequency)[rad/s]，t ：時間[s]である。**位相**(phase angle) θ [rad]（ラディアン）は sin( )の( )の角度で，

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{5-2}$$

（ω が変化するとき　$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\,d\,t$）

である。**角周波数の**定義は，$\omega \equiv \dfrac{d\,\theta}{d\,t}$ であり，ω が一定のとき(5-2)は成立する。普通，回路理論では ω を一定と考えてよい（発電機やモータの解析では ω が変化することがある）。θ_0（定数）は $t=0$ のときの位相で**初期位相**(initial phase angle)（**単に位相**と呼ばれることも多い）という。図 5-1 の T [s]は**周期**(period)と呼ばれ，ω が一定のとき 1 周期で角度は 2π 変化し，角周波数は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5-3}$$

となる。1 秒間に周期が何個あるかを表すのが，**周波数**(frequency) f [Hz](ヘルツ)で，

$$f = \frac{1}{T} \tag{5-4}$$

である。例えば，周期が 1 ms なら周波数は 1 kHz である (m , k は付録を参照) 。
１秒に f 回の周期が入っており， ω は 1 秒間の角度の変化だから，(5-3)，(5-4)より

$$\omega = 2\pi f \tag{5-5}$$

となる。商用電源は西日本地区では， $f = 60\text{Hz}$ ，東日本では， $f = 50\text{Hz}$ である。また，家庭内に送られる電圧は，よく 100V と言っているが，これは**実効値**(effective value)と呼ばれる値のことで，**最大値**(maximum value)の $1/\sqrt{2}$ である。すなわち，実効値を V [V]とすると，

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{5-6}$$

である。よって，家庭に送られる実効値 100V の電圧の最大値は約 141V である。

以上のことは，交流電流についても同様に定義される。なお，関東にはドイツから 50Hz の発電機が関西にはアメリカから 60Hz の発電機が輸入されたことが周波数の違いを生み，現在に至っている。

問題 1　交流電流が， $i = 100\sin(5t + \frac{\pi}{3})$ [A]　で与えられるとき，振幅，実効値，周期，角周波数，周波数，位相，初期位相を求めよ。また，電流の波形を描き，横軸の時間 t と角度 $5t$ について目盛を書け。

（解）振幅　$100\,\text{A}$ ，実効値　$\frac{100}{\sqrt{2}}\text{A}$ ，　角周波数　$\omega = 5$ rad/s ，周波数　$\frac{5}{2\pi}$ Hz,

周期　$\frac{2\pi}{5}$ s ，　位相　$5t + \frac{\pi}{3}$ [rad]，　初期位相　$\frac{\pi}{3}$ rad（t =0 での位相）

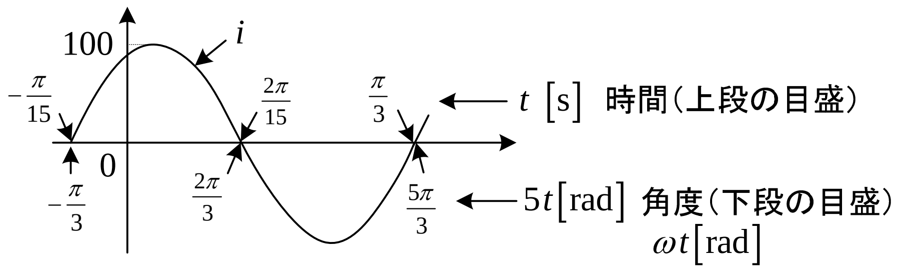
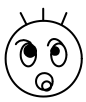


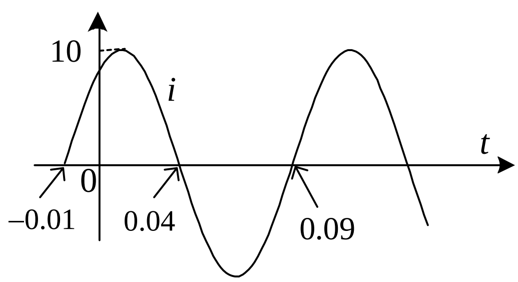
図 5-2　交流電流波形



目盛は時間より角度 $\omega t (= 5t)$ の方が書きやすい。

ばってん時間でも書けんとね。

問題２　図に示す電流の瞬時値 i の式を書け。
ただし，横軸は時間で単位は秒である。



（解） $i(t) = 10\sin(20\pi t + 0.2\pi)$

○　基本的な交流回路

抵抗，コイル，コンデンサ単体に交流電圧が印加された場合は，最も単純なケースである。これらの回路を考えよう。まず，図 5-3 の抵抗だけの回路を考える。

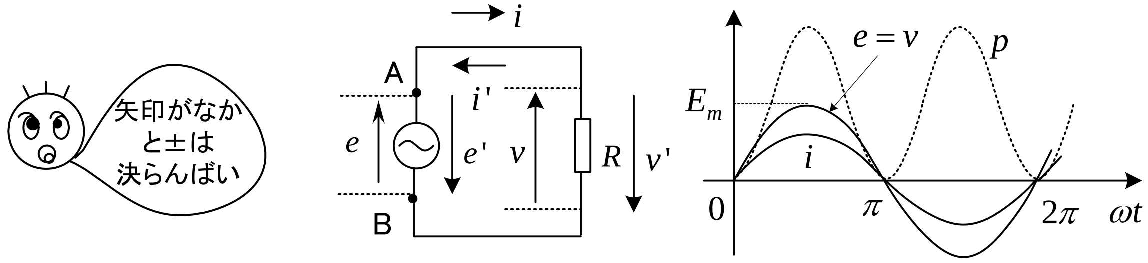


図 5-3　R回路

電圧や電流を表す記号（e, e', i, i' など）は矢印をつけてその量を定義する。矢印はその量の**測定の向き**（正の向き，正方向とも言われる）である。測定の向きなので，矢印は自分の好きな向きにつけてよい。これに対し，**電圧や電流の“実際の向き”**と言うことがある。例えば，電流で $i>0$ であれば，そのときの i の矢印の向きが実際の電流の向き（正電荷が動く向き）で，$i<0$ であれば i の矢印の反対向きが実際の電流の向きである。逆向きに定義した i' についても同様に，$i'>0$ のとき i' の矢印の向きが実際の電流の向きである。すなわち，電流 i, i' の測定の向きを図の矢印の向きに定義したとき，それらの値が正ならその向きが実際の電流の向きである。電流の向きと電流 i の正の向きは意味が違う。前者は正電荷が動く実際の電流の向きの意味で，後者は i と一緒に書く矢印の向きで実際は判らない。電圧についても同様である。電圧 e の測定の向きを図のように定義したとき，$e>0$ ならその向きが実際の電圧の向きである。実際の電圧の向きとは電位の低い点から電位の高い点に向けた矢印の向きのことである。$e>0$ ならば，B 点よりも A 点の電位が高い。電圧 e' を逆に定義しても，$e'>0$ ならその向きが実際の電圧の向きである。実験で図 5-3 のような波形が得られたとすると，$0\sim\pi$ で $e>0$ であり，実際の電圧の向きは e の矢印の向き，$\pi\sim 2\pi$ では $e<0$ $(e'=-e>0)$ であり実際の電圧の向きは e' の矢印の向きとなる。電流も $0\sim\pi$ で $i>0$ であり，実際の電流の向きは i の矢印の向き，$\pi\sim 2\pi$ では $i<0$ $(i'=-i>0)$ であり実際の電流の向きは i' の矢印の向きとなる。根本的なことなのでちょっと熱弁をふるいました。

図 5-3 で，$v=e=E_m\sin\omega t$　とすると，オームの法則より，

$$i=\frac{v}{R}=\frac{E_m}{R}\sin\omega t\equiv I_m\sin\omega t \tag{5-7}$$

となる。電圧と電流は同じタイミングで変化し，位相にずれがない（**同位相**と言う）。

次に，抵抗で消費される瞬時（しゅんじ）電力 p と，その平均値 P を求める。**瞬時電力**は

$$p=v\,i=\frac{E_m^2}{R}\sin^2\omega t=\frac{E_m^2}{2R}(1-\cos 2\omega t) \tag{5-8}$$

である。

この平均値は(5-8)式右辺第項の平均値が 0 になるので次式で与えられる。

$$P = \frac{E_m^2}{2R} = \frac{E_m I_m}{2} \tag{5-9}$$

ここで，**電圧**，**電流の実効値**(じっこうち)**(effective value)**を，

$$E \equiv \frac{E_m}{\sqrt{2}}\ ,\ I \equiv \frac{I_m}{\sqrt{2}} \tag{5-10}$$

と定義する（一般的な定義は第 13 章）。これを用いると(5-7)より， $E = R\,I$ であり，(5-9)より

$$P = E\,I \qquad \text{（抵抗のみ）} \tag{5-11}$$

となる。交流電圧計や交流電流計は実効値を表示するように作られており，この値を一般に用いる。なお，(5-11)は抵抗だけにしか成立しないが，(5-10)は正弦波交流の定義式で常に使える。

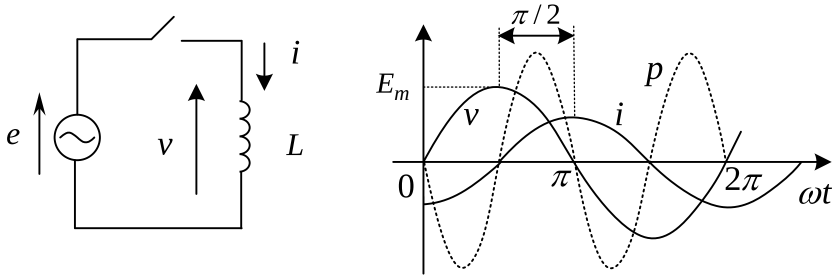


図 5-4　L 回路

図 5-4 はコイルだけの回路である。スイッチを入れると，

$$v = e = E_m \sin\omega t = L\frac{d\,i}{d\,t} \tag{5-12}$$

だから，

$$i = \frac{1}{L}\int^t E_m \sin\omega t\ dt = -\frac{E_m}{\omega L}\cos\omega t = \frac{E_m}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \tag{5-13}$$

（注意） $t = 0$ でスイッチを入れたとき，電流は急に変化しないので初期値は 0 である。(5-12)の微分方程式を電流 0 の初期条件で解いて，次式が得られる。

$$i = -\frac{E_m}{\omega L}\cos\omega t + \frac{E_m}{\omega L} \qquad \left(\frac{E_m}{\omega L}\ \text{：直流分}\right)$$

図 5-4 で実際に存在する非常に小さい抵抗を考えると，電流はスイッチを入れてから十分時間が経過した定常状態で直流分のない正弦波となる。これは第 15 章例題 7 で $t = \infty$ とすることで判る。このように極小さい抵抗が図 5-4 の回路にあると考え，定常状態で(5-13)が成立する。一般に，交流回路の定常状態では直流分はないと考えてよく，計算に必要ないから，(5-13)のように積分範囲には現時刻 t のみを書くことにする。図 5-4 は特殊な回路例である。

電圧と電流の矢印を図のように定義すると電流は電圧より位相が $\pi/2$ 遅れる（電流は電圧より時間が遅れて最大になる）。見方を変えると，電流は電圧より位相が $3\pi/2$ 進んでいるとも言えるが，遅れ進みは一般に差の小さい方で言うので，このようには言わない。また，電圧電流の矢印を同方向に選ぶと電流は電圧より位相が $\pi/2$ 進む（普通このようには選ばない）。電流の振幅は，

$I_m = E_m/(\omega L)$ である。実効値の関係は，$\sqrt{2}$ で割って(5-10)より

$$I = \frac{E}{\omega L} \tag{5-14}$$

となる。ここで ωL ［Ω］は，交流に対するコイルの抵抗みたいなもので，**誘導リアクタンス** (inductive reactance)と呼ばれる。

次に，瞬時電力は

$$p = vi = -\frac{E_m^2}{\omega L}\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{E_m^2}{2\omega L}\sin 2\omega t \tag{5-15}$$

であり，平均電力 P は

$$P = 0 \tag{5-16}$$

となる。このようにコイルはエネルギーを蓄えたり放出したりするだけで，エネルギーを消費しない。

なお，波形をみると**電位の低い方から高い方に電流が流れる**期間（$v<0,\ i>0$）がある。電位の高い方から低い方に常に電流が流れる素子は抵抗（オームの法則）のみである。水の流れのイメージをコイルやコンデンサに持ち込んではいけない。

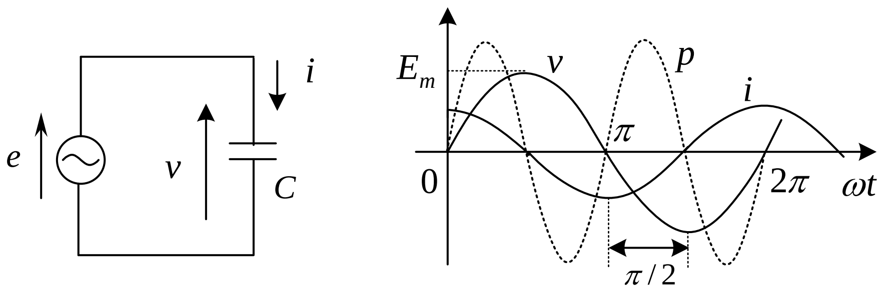


図 5-5　C 回路

図 5-5 はコンデンサだけの回路である。この場合，

$$v = e = E_m \sin\omega t \tag{5-17}$$

だから，

$$i = C\frac{dv}{dt} = \omega C E_m \cos\omega t = \omega C E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{5-18}$$

となる。このように，v, i の<u>矢印を図のように逆向きに定義すると</u>電流は電圧より位相が $\pi/2$ 進む。電流の振幅は，$I_m = \omega C E_m$ である。実効値の関係は，

$$I = \omega C E \tag{5-19}$$

となる。ここで $1/(\omega C)$ ［Ω］は，交流に対するコンデンサの抵抗みたいなもので，**容量**（ようりょう）**リアクタンス**(capacitive reactance)と呼ばれる。

次に，瞬時電力は

$$p = \omega C E_m^2 \sin\omega t \cos\omega t = \frac{\omega C E_m^2}{2}\sin 2\omega t \tag{5-20}$$

であり，平均電力 P は

$$P = 0 \tag{5-21}$$

このようにコンデンサもエネルギーを蓄えたり放出したりするだけで，エネルギーは消費しない。

次に，抵抗，コイル，コンデンサの直列回路を考える。

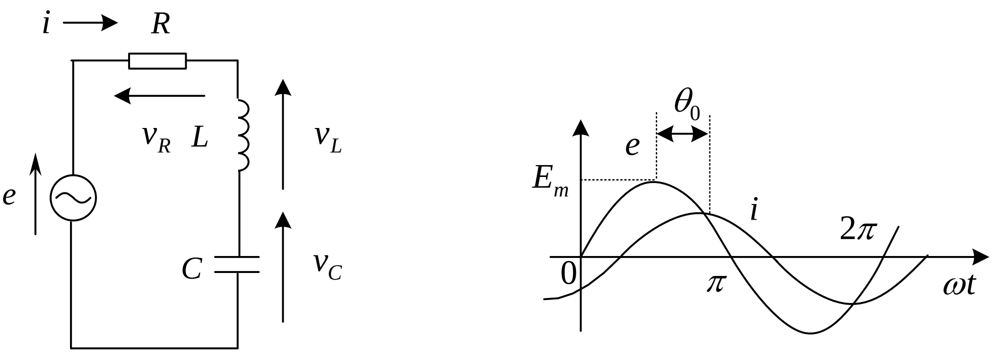


図 5-6　*RLC* 回路と電流波形（電流が遅れる場合）

図 5-6 の *RLC* 回路で，電源電圧が，

$$e = E_m \sin\omega t \tag{5-22}$$

のとき，流れる電流を求める。各素子の電圧は，

抵抗：　$v_R = R\,i$ (5-23)

コイル：　$v_L = L\dfrac{d\,i}{d\,t}$ (5-24)

コンデンサ：　$i = C\dfrac{d\,v_C}{d\,t}$　$\therefore v_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int^t i\,d\,t$ (5-25)

である。キルヒホッフの第二法則より，

$$E_m \sin\omega t = R\,i + L\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{C}\int^t i\,d\,t \tag{5-26}$$

が成立する。これを解くと電流が求まる（第 15 章に詳しい）。ここでは，定常状態の電流を

$$i = I_m \sin(\omega t - \theta_0) \tag{5-27}$$

と仮定して，振幅 I_m と**初期位相** θ_0（どちらも定数）を求めよう。(5-27)を(5-26)に代入し，(5-26)の右辺第 3 項の積分は定常状態では初期値の項（積分定数の項）は 0 と考えてよいので

$$E_m \sin\omega t = R\,I_m \sin(\omega t-\theta_0) + \omega L\,I_m \cos(\omega t-\theta_0) - \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t-\theta_0)$$

$$= R\,I_m \sin(\omega t-\theta_0) + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m \cos(\omega t-\theta_0)$$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\, I_m \sin(\omega t-\theta_0+\varphi) \qquad \text{但し，} \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

（**三角関数の合成公式**を使う。付録参照）

両辺を比べて，$I_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$，$\theta_0 = \varphi$

よって求める電流は，次式となる。

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \theta_0) \qquad \text{但し，} \tan\theta_0 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (5\text{-}28)$$

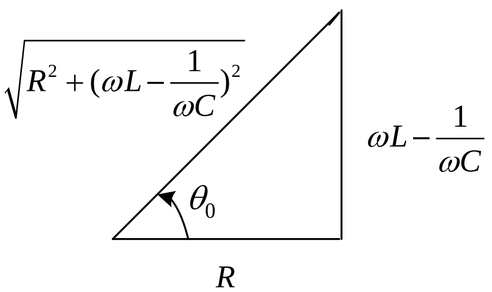
実効値は最大値を$\sqrt{2}$で割って，

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad \text{ただし，} E \equiv \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{ ：実効値}$$

ここで，

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (5\text{-}29)$$

は，**インピーダンス**（の大きさ）と呼ばれる。単位は，Ωである。$\omega L > \frac{1}{\omega C}$のとき，$\theta_0 > 0$であり，図 5-6 に示すように，電流は電源電圧に対してθ_0だけ遅れる。$\theta_0 < 0$の場合には，$|\theta_0|$だけ電流が進むことになる。



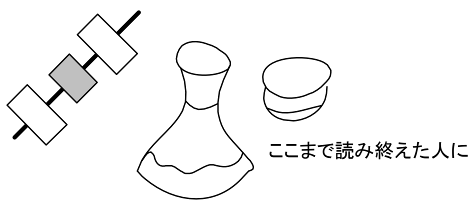


図 5-7　位相差θ_0（$\theta_0 > 0$のとき）

以上の様に，定常解を仮定して微分方程式に代入し，大きさと位相を決めることで電流が求まったが，回路が複雑になるとこの方法は面倒である。そこで，一般にはフェーザを使った方法が用いられている。だけど試験には出すことがある。