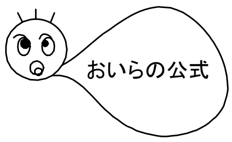
Title	電気回路講義ノート
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路講義ノート; 2014
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/10069/34606
Right	

第6章　フェーザによる交流回路の計算 I

交流回路の**定常状態**を解析する理論として**交流理論**がある。これは，電圧と電流を**フェーザ表示**して計算するもので，三角関数を使った計算に比べ大変簡単である。この章では，フェーザを用いた電源や回路素子の基本的関係式を導く。交流理論は電気電子の分野で広く利用されている。

○　複素数の重要公式



交流理論に入る前に複素数(complex number)の最重要公式を示しておく。応用範囲も広いのでしっかり記憶して欲しい。

（1）**オイラーの公式**　$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$　(6-1)

$e = 2.71828\cdots$（自然対数の底）で，i は電流の記号として使うから，虚数単位には必ず j を使うこと。オイラーの公式は数学の至宝と言われている。映画“博士の愛した数式”に $e^{j\pi} = -1$　が出た。**虚数単位**は $j = \sqrt{-1}$ で　$j^2 = -1$　が成り立つ。

（2）複素数の表現法

複素数の表現法としては，**実部**(<u>Re</u>al part)と**虚部**(<u>Im</u>aginary part) の和として表す**直交形式**（**直角座標表示**）と大きさと角度で表現する**極形式**（**極座標表示**）**など**がある。

$V = a + jb$　：**直交形式**（$\mathrm{Re}(V) = a$，$\mathrm{Im}(V) = b$）　(6-2)

$= r(\cos\theta + j\sin\theta)$　：**極形式**　(6-3)

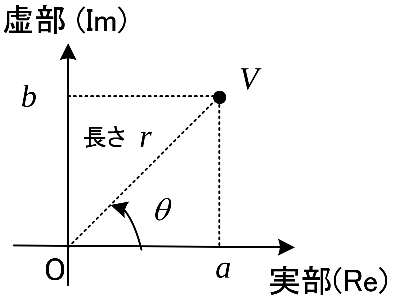
$= r\,e^{j\theta}$　：**指数関数形式**（**極形式とも言われる**）　(6-4)

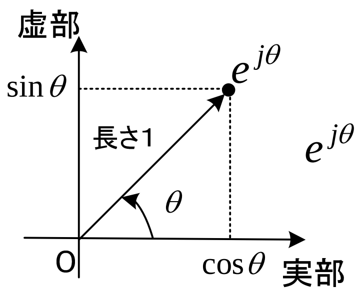
$= r\angle\theta$　：**フェーザ形式**　(6-5)

絶対値(absolute value)または**大きさ** r　　$r \equiv |V| = \sqrt{a^2 + b^2}$　(6-6)

偏角(<u>arg</u>ument)θ　　$\theta \equiv \arg V = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$　(**アークタンジェントと読む**)　(6-7)

図より，　$r\,e^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + j\sin\theta) = a + jb$　が成立することが判る。





$e^{j\theta}$ は長さ1，角度θの点の複素数である。

絶対値　$|e^{j\theta}| = 1$，　偏角 $\arg e^{j\theta} = \theta$

（3）**和**

$V_1 = a + jb$

$V_2 = c + jd$

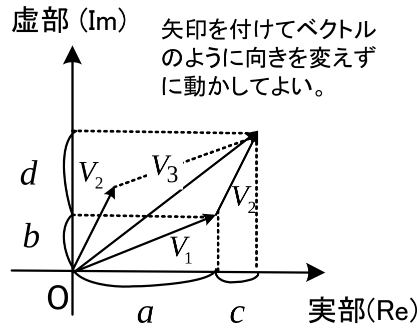
のとき。

$$V_1 + V_2 = a + c + j(b + d) = V_3 \qquad (6\text{-}8)$$

で，図の様になる。

差は，$V_2 = V_3 - V_1$

大きさ　$|V_3| \leq |V_1| + |V_2| \qquad |V_1 + V_2| \neq |V_1| + |V_2|$



＊和，差の演算はベクトルと同じなので，複素数だけど矢印をつけて表現することが多い。
矢印をつけた複素数は向きを変えないなら自由に動かしても構わない。

（4）**積**　　$V_1 = |V_1| e^{j\theta_1}, V_2 = |V_2| e^{j\theta_2}$　とすると，　$V_1 V_2 = |V_1|\,|V_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

すなわち，　$|V_1 V_2| = |V_1|\,|V_2| \qquad (6\text{-}9)$

$$\arg(V_1 V_2) = \arg(V_1) + \arg(V_2) \qquad (6\text{-}10)$$

ここで，$\arg(V_1) = \theta_1$, $\arg(V_2) = \theta_2$

オイラーの公式を使って，以下の関係が成り立っている。

$$\begin{aligned} e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} &= (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + j\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{j(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

（4）**商**　　$V_1 = |V_1| e^{j\theta_1}, V_2 = |V_2| e^{j\theta_2}$　とすると，　$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{|V_1|}{|V_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$

すなわち，　$\left|\dfrac{V_1}{V_2}\right| = \dfrac{|V_1|}{|V_2|} \qquad (6\text{-}11)$

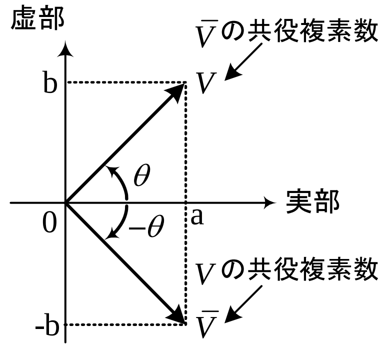
$$\arg\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \arg(V_1) - \arg(V_2) \qquad (6\text{-}12)$$

（5）**共役複素数**（きょうやく）

$$\bar{V} = \overline{a + jb} = a - jb = |V| e^{-j\theta} \qquad (6\text{-}13)$$

$$\bar{V}\,V = |V|^2 \qquad (6\text{-}14)$$

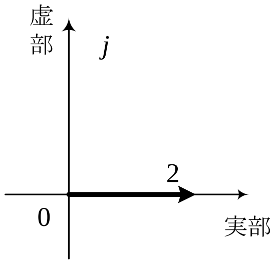
$$\overline{V_1\,V_2} = \bar{V}_1 \bar{V}_2 \qquad (6\text{-}15)$$



共役複素数は j の前にマイナスをつけるだけ!

例題１　次の複素数を図示せよ。また，指数関数形式を求めよ。

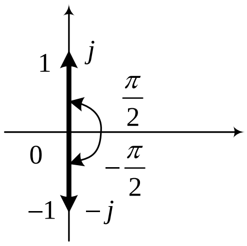
$$2,\ j,\ -j,\ 1+j, 1+j\sqrt{3},\ 1-j\sqrt{3},\ 3+j4$$



長さ　2

偏角　0rad

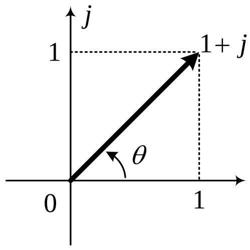
$2=2e^{j0}$



長さ 1

偏角 $\pi/2, -\pi/2$ rad

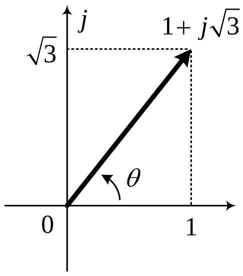
$j=1e^{j\pi/2}=e^{j\pi/2}$，$-j=1e^{-j\pi/2}=e^{-j\pi/2}$



長さ $|1+j|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

偏角 $\theta=\pi/4$ rad

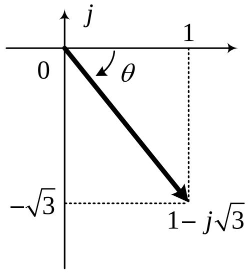
$1+j=\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$



長さ $|1+j\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$

偏角 $\theta=\pi/3$ rad

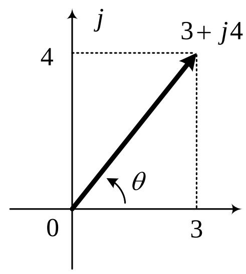
$1+j\sqrt{3}=2e^{j\pi/3}$



長さ $|1-j\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$

偏角 $\theta=-\pi/3$ rad

$1-j\sqrt{3}=2e^{-j\pi/3}$



長さ $|3+j4|=\sqrt{9+16}=5$

偏角 $\theta=\tan^{-1}(4/3)$ [rad]

$3+j4=5e^{j\theta}$

図の $\theta=\tan^{-1}x$ (**アークタンゼント** x)のグラフより x の値に対し θ は１つには決らない。そこで

$a+jb$　のとき，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ と書いておいた方がよい（b/a を計算せずそのまま書く)。

$\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}, \tan^{-1}\dfrac{-1}{-1}=\dfrac{5\pi}{4}$ を意味する。

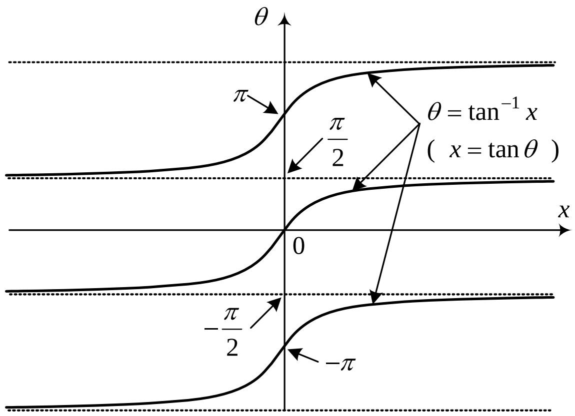
数値計算(プログラム)では，次の関数を使う。

FORTRAN:　DATAN2(b,a), C 言語：atan2(b,a)

Excel: atan2(a,b)　＊確認のこと＊

但し，a, b は倍精度変数とする。

電卓には $\tan^{-1}x$ の関数しかないから，答えは $-\pi/2$ から $\pi/2$ の範囲なので，何象限の角かを考え，答えに $\pm\pi$ しないといけない。



例題２　以下の式を計算せよ。

$$\left|\frac{1+j}{3+j4}\right|,\ \left|(1+j)e^{j\theta}\right|,\ \left|(1+j)(3+j4)\right|,\ (\frac{\sqrt{3}+j}{2})^{12},\ \arg\left\{\frac{(1+j)(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}\right\}$$

（解）　$\left|\frac{1+j}{3+j4}\right| = \frac{|1+j|}{|3+j4|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$，　$\left|(1+j)e^{j\theta}\right| = |1+j|\left|e^{j\theta}\right| = \sqrt{2}$

$$\left|(1+j)(3+j4)\right| = |1+j||3+j4| = 5\sqrt{2}$$

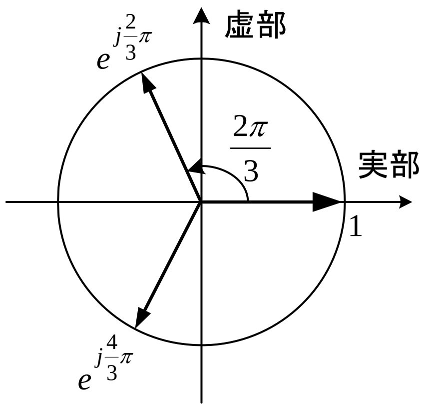
$$(\frac{\sqrt{3}+j}{2})^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12} = (e^{j\pi/6})^{12} = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = 1$$

$$\arg\left\{\frac{(1+j)(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}\right\} = \arg(1+j)+\arg(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})-\arg j-\arg(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{12}$$

例題３　$z^3 = 1$　を解け

（解）$z = r\,e^{j\theta}$　とおくと　$(r > 0)$



$$z^3 = r^3 e^{j3\theta} = r^3(\cos 3\theta + j\sin 3\theta) = 1$$

従って，$r = 1$　，　$3\theta = 2n\pi$　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}n\pi$$

$n = 0$　のとき，$z = e^{j0} = \cos 0 + j\sin 0 = 1$

$n = 1$　のとき，$z = e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 2$　のとき，$z = e^{j\frac{4}{3}\pi} = \cos\frac{4}{3}\pi + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（$n = 3$ 以上の場合，根は上のいずれかになる）

例題４　複素数 z　に，(1) $e^{j\frac{\pi}{2}}$　(2) $e^{-j\frac{\pi}{2}}$　(3) j　(4) $\frac{1}{j}$　を掛けると，z はどう動くか。

（1）反時計方向に 90 度回転　(2) 時計方向に 90 度回転　(3) (1) と同じ　(4) (2) と同じ

＊後でよく使うから，覚えておこう。

○　フェーザ表示（ベクトル表示）の定義

角周波数 ω が等しく，振幅や初期位相だけが異なる三角関数の加算や減算は**フェーザ**(phasor）に直して計算することができる。一般に幾つかの**正弦波交流電源**（角周波数 ω は同じとする）からなる交流回路では，どこの電圧や電流も**定常状態**では**同じ角周波数 ω の正弦波**となる。従ってこれらの電圧や電流（三角関数）を**フェーザ**（複素数）に直して計算する**交流理論**が生まれた。

瞬時値 $a(t)$ の**フェーザ表示** A の定義

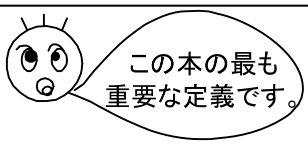
瞬時値： $a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ 　 $\rightleftarrows$ 　フェーザ： $A = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}\, e^{j\varphi}$ 　(6-16)

$\rightleftarrows$ は瞬時値をフェーザに直す場合とその逆の場合もあることを意味する。

瞬時値(instantaneous value) $a(t)$ は，電圧 $v(t)$ や電流 $i(t)$ に対応する。

例， $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$， ファイ φ は初期位相（定数）で，5 章では θ_0 とした。

・ $a(t) = \mathrm{Im}(\sqrt{2}\, A e^{j\omega t})$ 　(6-17)



の関係がある。

証明） $\mathrm{Im}(\sqrt{2}\, A e^{j\omega t}) = \mathrm{Im}(A_m\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}) = \mathrm{Im}(A_m\, e^{j(\omega t + \varphi)})$

$$= \mathrm{Im}(A_m \cos(\omega t + \varphi) + j\, A_m \sin(\omega t + \varphi))$$

$$= A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ここで， $\mathrm{Im}(\ )$ は虚部(Imaginary Part)をとることを意味する。実部は Real Part です。

・ 瞬時値： $a(t) = \sqrt{2} A_e \sin(\omega t + \varphi)$ 　 $\rightleftarrows$ 　フェーザ： $A = A_e\, e^{j\varphi}$

$$|A| = |A_e|\,|e^{j\varphi}| = A_e \quad , \quad \arg A = \varphi \qquad (6\text{-}18)$$

であり，フェーザの絶対値が電圧や電流の実効値（これが交流電圧計や交流電流計の読みである）に等しく，フェーザの偏角は，初期位相に等しい。**大変重要なことである。**

・ フェーザは複素数であるから，はっきり示すため A の代わりに $\dot{A}$ を使うテキストもある。

・ $a(t) = \sqrt{2} A_e \cos(\omega t + \varphi)$ のフェーザを $A = A_e\, e^{j\varphi}$ と定義してもよいが, 本書は(6-16)とする。

公式１： $a(t) \rightleftarrows A$ のとき $\dfrac{d\,a(t)}{d\,t} \rightleftarrows j\,\omega A$ 　(6-19)

（証明） $\dfrac{d\,a(t)}{d\,t} = \dfrac{d}{dt}\left\{A_m \sin(\omega t + \varphi)\right\} = \omega A_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega A_m \sin(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2})$

$$\rightleftarrows \frac{\omega A_m}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \frac{j\,\omega A_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = j\omega A$$

公式２：　$a_1(t)=A_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1)$　のフェーザは　$A_1=\dfrac{A_{m1}}{\sqrt{2}}e^{j\varphi_1}$

$a_2(t)=A_{m2}\sin(\omega t+\varphi_2)$　のフェーザは　$A_2=\dfrac{A_{m2}}{\sqrt{2}}e^{j\varphi_2}$

このとき，　$a_1(t)\pm a_2(t)\rightleftarrows\ A_1\pm A_2$　(6-20)

（注）$a_1(t)a_2(t)\ \rightleftarrows\ A_1A_2$　は成立しない。

（証明）$a_1(t)+a_2(t)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}A_1e^{j\omega t})+\mathrm{Im}(\sqrt{2}A_2e^{j\omega t})$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}(A_1+A_2)e^{j\omega t})$$

よって，(6-17)から $a_1(t)+a_2(t)$ のフェーザが A_1+A_2 になっていることが判る。

(注)　$a_1(t)a_2(t)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}A_1e^{j\omega t})\,\mathrm{Im}(\sqrt{2}A_2e^{j\omega t})$

$$\neq\mathrm{Im}(\sqrt{2}(A_1A_2)e^{j\omega t})$$

何故なら，$\mathrm{Im}(\sqrt{2}(A_1A_2)e^{j\omega t})=\mathrm{Im}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}A_{m1}A_{m2}\ e^{j(\omega t+\varphi_1+\varphi_2)})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{m1}A_{m2}\sin(\omega t+\varphi_1+\varphi_2)\neq a_1(t)a_2(t)$$

(6-20)のように，角周波数の等しい三角関数の加算（減算）のフェーザはそれぞれのフェーザの加算（減算）に等しい。従って，<u>**キルヒホッフの法則は，瞬時電圧や瞬時電流（これらは交流の定常状態では同じ周波数の正弦波）の和，差に関する式だから，フェーザについても成立することが言える。**</u>ただし，瞬時値の積や商は，フェーザ表示できない。従って，電圧と電流の積である瞬時電力のフェーザ表示はない（フェーザ表示ではないが第 8 章で複素電力という量を別に定義する)。

例題 5　次の三角関数のフェーザ表示を求めよ。

1.　$\sin 2t$　2.　$\sin(3t+\dfrac{\pi}{3})$　3.　$100\cos(\omega t+\varphi)$　4.　$\dfrac{d}{dt}\left\{100\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)\right\}$

（答）1.　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{j0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　2.　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{3}}$　3.　与式$=100\sin(\omega \mathrm{t}+\varphi+\dfrac{\pi}{2})$　であるから、

$\dfrac{100}{\sqrt{2}}e^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{100}{\sqrt{2}}je^{j\varphi}$　4.　$j\omega 100e^{j\varphi}$　（公式 1 利用）

例題 6　フェーザ表示が次式で与えられているとき，瞬時値を求めよ。角周波数はωとする。

1.　$100e^{j\frac{\pi}{3}}$　　2.　2　　3.　j　　4．　$1+j$　　5.　$\dfrac{1+j}{1+j\sqrt{3}}$

（答）1.　$100\sqrt{2}\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{3})$　　2.　$2=2e^{j0}$ より，$2\sqrt{2}\sin\omega t$

3.　$j=1e^{j\frac{\pi}{2}}$ より，$\sqrt{2}\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{2})$　　4.　$1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ より，$2\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{4})$

5.　$\dfrac{1+j}{1+j\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{12}}$ より，$\sin(\omega t-\dfrac{\pi}{12})$

例題 7　フェーザ表示を用いて次の計算をせよ。

$$2\sqrt{2}\sin(3t-\frac{\pi}{3})+\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{2}}{3}\sin(3t-\frac{\pi}{6})$$

（答）各項をフェーザに直して（ω=3）

$$2e^{-j\frac{\pi}{3}}+\frac{j3}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}=2(\cos\frac{\pi}{3}-j\sin\frac{\pi}{3})+j(\cos\frac{\pi}{6}-j\sin\frac{\pi}{6})$$

$$=2(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})+j(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2})=\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

瞬時値にもどして、与式$=\sqrt{6}\sin(3t-\dfrac{\pi}{6})$

問題 1　次の計算をフェーザに直し，さらに瞬時値にもどすことで行え。

$\sin\omega t+\cos\omega t$

（答）フェーザ　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+j)=e^{j\frac{\pi}{4}}$　　瞬時値 $\sqrt{2}\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{4})$

問題 2　次の計算をフェーザに直し，さらに瞬時値にもどすことで行え。

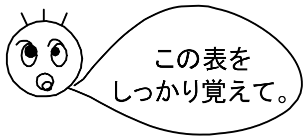
$$\sin\omega t+\sin(\omega t+\frac{2\pi}{3})+\sin(\omega t+\frac{4\pi}{3})$$

（答）フェーザ　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+e^{j\frac{2}{3}\pi}+e^{j\frac{4}{3}\pi})=0$

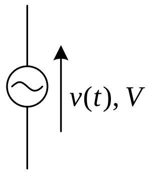
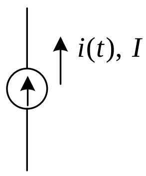
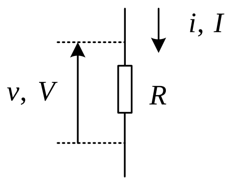
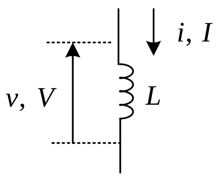
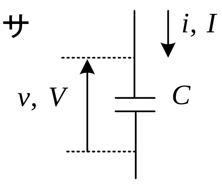
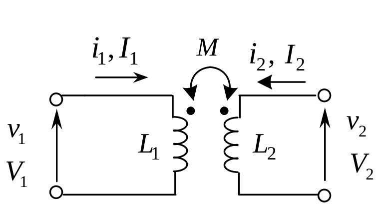
（ベクトルで表した力のつり合いと同様，例題 3 をみよ。）

瞬時値 0

○　フェーザによる交流回路の計算（交流理論）



電源と素子のフェーザ表示を以下に示す。

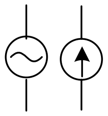
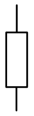
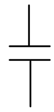
	瞬時値 （常に成立）	フェーザ （定常の解析）
交流電圧源 または交流電圧 	$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ φ：ファイ（初期位相一定）	$V = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$
交流電流源 または交流電流 	$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$ ϕ：ファイ（初期位相一定）	$I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$
抵抗 	$v(t) = R\, i(t)$	$V = R I$ $Z = R$
コイル 	$v(t) = L \dfrac{d\, i(t)}{d\, t}$ 鎖交磁束Liの変化が電圧になる。	$V = j\omega L I$ $Z = j\omega L$
コンデンサ 	$i(t) = C \dfrac{d\, v(t)}{d\, t}$ 電荷$C\,v$の変化が電流になる。	$V = \dfrac{I}{j\omega C}$ $Z = \dfrac{1}{j\omega C}$
変成器（変圧器） 	$v_1(t) = L_1 \dfrac{d\, i_1(t)}{d\, t} + M \dfrac{d\, i_2(t)}{d\, t}$ $v_2(t) = M \dfrac{d\, i_1(t)}{d\, t} + L_2 \dfrac{d\, i_2(t)}{d\, t}$	$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$ $V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$

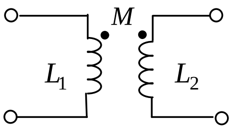
（注意）（１）抵抗，コイル，コンデンサ，変成器で，電圧や電流の矢印を図と逆に定義すると，その量の前にマイナスをつけること。$d/dt \to j\omega$ に対応(公式１参照)

（２）キルヒホッフの法則は，電圧，電流の加算，減算であるから，フェーザについてもそのまま成立する。フェーザの絶対値が実効値でメータの読みである。

（３）Z は**インピーダンス**と呼ばれ，$Z = V / I$ で定義される。まず，Z を覚えよ。

交流理論が使えるのは以下の場合である。

（1）回路が正弦波交流電源  抵抗  コイル  コンデンサ 

変成器（変圧器） 

より構成されており，R, L, C, M は定数である。すなわち，線形回路である。

(2) 交流電源は幾つあってもよいが，**全て同じ周波数**とする。

(3) スイッチを入れたり切ったりした後，時間が十分経過している**定常状態**とする。

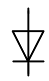
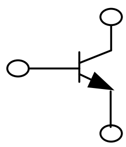
従って，以下の場合には，交流理論は直接使えない。しかし，他の理論と交流理論を組み合わせて問題を解く場合が多い。その点でも交流理論は大変重要なのである。

(a) 回路が直流電源と交流電源からなる。（重ね合わせの理を使う。12 章）

(b) 交流だが正弦波でない電源である。（フーリエ級数と重ね合わせの理を使う。14 章）

(c) 周波数の異なる電源がつながっている。（重ね合わせの理を使う。14 章）

(d) 回路のパラメータ R, L, C, M が電圧や電流で変化する（非線形回路）。（コンピュータによる数値積分を利用するしか手が無い。数値解析）

(e) 回路に半導体素子（ダイオード  トランジスタ  ）が含まれている。

（動作点に対して，微小な信号の変化については交流理論が使える。電子回路）

(f) 回路のスイッチを入れたり，切ったりした後（過渡状態）である。

（微分方程式を解く必要がある。このときも交流電源なら交流理論を使う。15 章）

R,L,C,M（理想変成器含む）は素子に流入する平均電力が負にならないので，**受動素子**と呼ばれる。平均電力が負になる素子は**能動素子**と呼ばれ負性抵抗（非線形抵抗を小信号で使用した場合），トランジスタなどがある（電源は通常能動素子に入れない）。

例題 8 フェーザ表示の定義を用いて，抵抗，コンデンサに関するフェーザの式を導出せよ。

(解) 各素子の電圧を $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ とする。定義よりフェーザは $V = V_m e^{j\phi} / \sqrt{2}$

(1) 抵抗については，オームの法則より $i = v / R = (V_m / R)\sin(\omega t + \phi)$

電流のフェーザ表示は $I = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}R} e^{j\phi} = \dfrac{V}{R}$

(2) コンデンサの電流は， $i = C\dfrac{dv}{dt} = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi) = \omega C V_m \sin(\omega t + \phi + \dfrac{\pi}{2})$

電流のフェーザ表示は $I = \dfrac{\omega C V_m}{\sqrt{2}} e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})} = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = j\omega C V$

＊ コイルについては，電流の瞬時値を定義して電圧を求め，フェーザに直すとよい。