NAOSITE: Nagasaki University's Academic Output SITE

Title	電気回路講義ノート
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路講義ノート; 2014
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/10069/34606
Right	

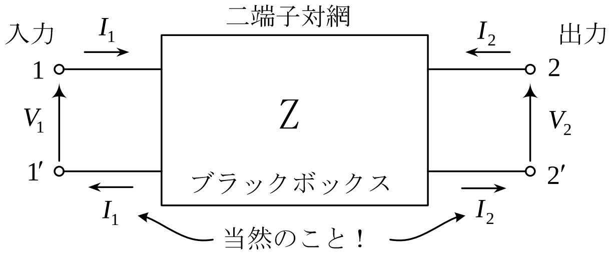
This document is downloaded at: 2019-09-19T06:47:53Z

http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp

第 13章　二端子対網

二端子対(two terminal pair)とは，入力端子対(1,1’)と出力端子対(2,2’)のことである。回路をまとまったシステムとしてとらえて，入力(input)側と出力(output)側の関係を表す。電力や信号を送るとき使われる理論である。

○　インピーダンス行列（ Z 行列　impedance matrix）



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

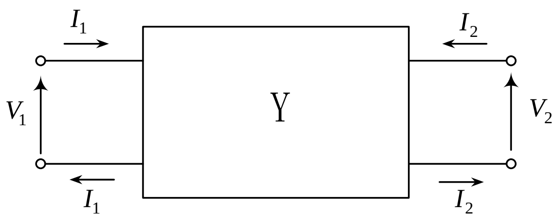
$$\underset{V}{\parallel} \qquad \underset{Z}{\parallel} \qquad \underset{I}{\parallel}$$

通常，$z_{12} = z_{21}$ である。

（注）V_1, I_1, V_2, I_2 の矢印は必ず，図の方向に定義すること。（Y行列も同様）

入力側に交流電源，出力側に負荷をつなぐと考えよう。二端子対網（にたんしついもう）には電源は含まない。

○　アドミタンス行列（ Y 行列　）



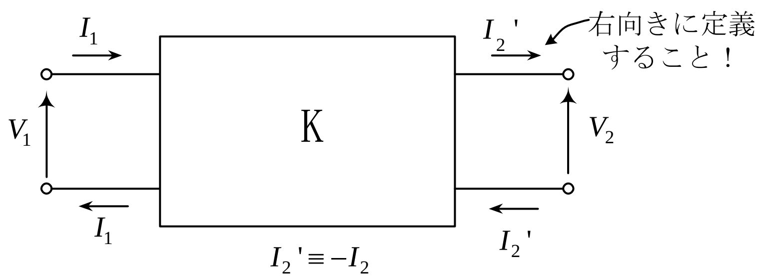
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{I}{\parallel} \qquad \underset{Y}{\parallel} \qquad \underset{V}{\parallel}$$

通常，$y_{12} = y_{21}$ である。

$Y = Z^{-1}$（逆行列）である。　Z, Y は常に存在するとは限らない。

○　縦続（じゅうぞく）行列（ K 行列，F 行列　cascade matrix）



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2' \end{bmatrix}$$

$$\underset{K}{\parallel}$$

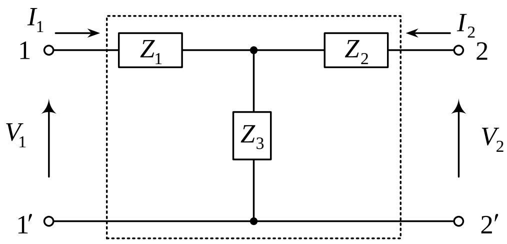
（注）V_1, I_1, V_2, I_2' の矢印は必ず，図の方向に定義すること。

A, B, C, D を**四端子定数**という。通常，$AD - BC = 1$（$|K| = 1$）　が成立する。

Z, Y, K 行列の求め方には２つの方法がある。

① V_1, I_1, V_2, I_2（または I_2'）を図のように定義し，回路の式を上記の形に整理する方法。
② $I_1 = 0$（開放），$V_1 = 0$（短絡）など，特殊な場合を考えることにより求める方法。

図の回路のインピーダンス行列を求めてみよう。



このように書いても，$1,1'$ と $2,2'$ は開放されている訳ではない。電源があるかも知れないし，負荷があるかも知れない。原因はともかくとして，V_1, V_2, I_1, I_2 が生じていると仮定して求める。

図の様に V_1, V_2, I_1, I_2 を必ず矢印の向きに定義する。インピーダンス行列は次式で定義されている。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{13-1}$$

<u>方法①</u>．とにかく式を立てて，①の形にする方法。

図より，$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3(I_1 + I_2)$

$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3(I_1 + I_2)$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$ インピーダンス行列は，$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$

<u>方法②</u>．特殊な条件から求める方法

(13-1)で，$I_2 = 0$ の場合を考える。$I_2 = 0$ は，$2, 2'$ を開放することを意味する。

このとき，図より

$V_1 = (Z_1 + Z_3) I_1$ ，$V_2 = Z_3 I_1$ ←

$\therefore$ $z_{11} = Z_1 + Z_3$ ，$z_{21} = Z_3$

$Z_2 I_2 = 0$ となるから
Z_2 の電圧は 0。

次に，$I_1 = 0$（$1,1'$ 開放）を考える。図より，

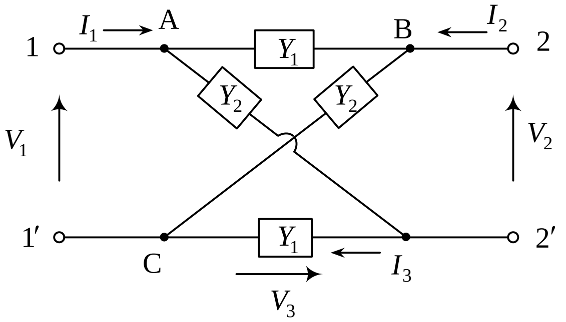
$V_1 = Z_3 I_2$ ，$V_2 = (Z_2 + Z_3) I_2$

$\therefore z_{12} = Z_3$ ，$z_{22} = Z_2 + Z_3$

（注）Z 行列を求めるときは，$I_2 = 0$ 及び，$I_1 = 0$ の場合を考えればよい。
$V_1 = 0$（$1,1'$ を短絡）としても，$z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = 0$ だから，z_{11} と z_{12} が決められない。

＊ 抵抗，コイル，コンデンサ，変成器，理想変成器からなる二端子対網は，**相反性の条件**（相反定理）を満足し，$z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$, $AD - BC = 1$ が成立する。

例題１　図の回路のY行列を求めよ。Y_1, Y_2はアドミタンスである。



（解）
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$ より，

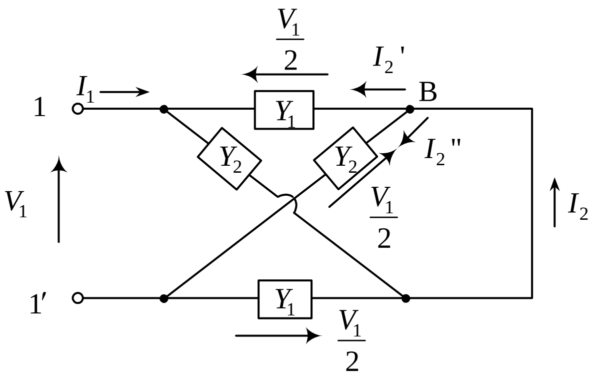
$V_2 = 0$のとき，$I_1 = y_{11}V_1$, $I_2 = y_{21}V_1$

$V_1 = 0$のとき，$I_1 = y_{12}V_2$, $I_2 = y_{22}V_2$

まず，$2, 2'$を短絡し，$V_2 = 0$の状態を考える。$1,1'$間で見るとY_1, Y_2の並列回路が直列につながっているから，全体のアドミタンスは$(Y_1 + Y_2)/2$となり

$$I_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_1$$ より

$$y_{11} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$



また，Y_1, Y_2には$\dfrac{V_1}{2}$の電圧が加わるので，節点Bで考えると，キルヒホッフの電流則より

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -Y_1 \frac{V_1}{2} + Y_2 \frac{V_1}{2} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_1$$

$$\therefore y_{21} = \frac{Y_2 - Y_1}{2}$$

（電圧と同方向に定義された電流にはマイナスがつく）

次に，$1, 1'$を短絡して$V_1 = 0$の状態を考える。

$$I_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_2$$ より

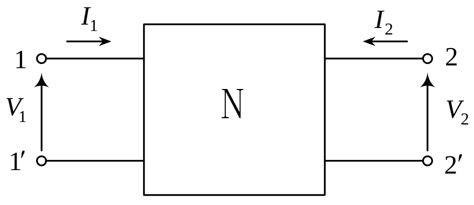
$$y_{22} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

また，$I_1 = -Y_1 \dfrac{V_2}{2} + Y_2 \dfrac{V_2}{2} = \dfrac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_2$

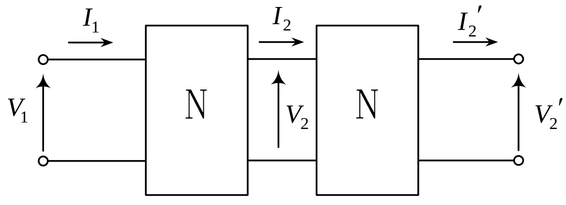
$$\therefore y_{12} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)$$

例題２　NのK行列$K=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ が既知のとき以下の問いに答えよ。

（１） Nのインピーダンス行列ZをKで表せ。
（２） $2,2'$を入力側，$1,1'$を出力側と考えたとき， NのK行列K'を求めよ。
（３）（ｂ）図のように， Nを接続したとき，全体の回路のK行列K'を求めよ。



（ａ）



（ｂ）

（解）（１）題意より，電流を図のように定義すると

$V_1=AV_2-BI_2$ ・・・・①　　　　$I_1=CV_2-DI_2$ ・・・・②

②よりV_2を求めると，$V_2=I_1/C+(D/C)I_2$

①に代入して，$V_1=A(I_1/C+(D/C)I_2)-BI_2$

$$\therefore\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A/C & (AD/C)-B\\ 1/C & D/C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix}$$ 故に，$Z=\dfrac{1}{C}\begin{bmatrix}A & |K|\\ 1 & D\end{bmatrix}$　　$|K|=1$

（２）②より，$I_2=-\dfrac{I_1}{D}+\dfrac{C}{D}V_2$　　①に代入$V_2=\dfrac{V_1}{A}+\dfrac{B}{A}(-\dfrac{I_1}{D}+\dfrac{C}{D}V_2)$

$$\therefore V_2=\frac{1}{1-BC/(AD)}(\frac{V_1}{A}-\frac{B}{AD}I_1)=\frac{1}{AD-BC}(DV_1-BI_1)$$

$$I_2=-\frac{I_1}{D}+\frac{1}{AD-BC}(CV_1-\frac{CB}{D}I_1)=\frac{1}{AD-BC}(CV_1-AI_1)$$

$AD-BC=1$であるから

$$\begin{bmatrix}V_2\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D & B\\ C & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ -I_1\end{bmatrix}$$ よって，$K'=\begin{bmatrix}D & B\\ C & A\end{bmatrix}$ ← AとDを交換した式となる。

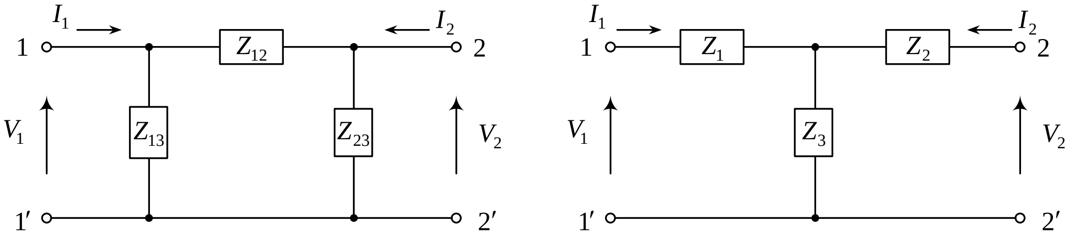
出力側は出る方向に定義するのが約束だから，－が必要

＊　対称回路では$A=D$が成り立つ（入出力どちらから見ても同じ回路)。

（３）　$$\begin{bmatrix}V_1\\ I_1\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}V_2\\ I_2\end{bmatrix}=K^2\begin{bmatrix}V_2'\\ I_2'\end{bmatrix}$$

従って，$K'=K^2=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^2+BC & AB+BD\\ CA+CD & CB+D^2\end{bmatrix}$

例題３（ａ）図の△形回路と（ｂ）図のＹ形回路が等価であるための条件を求めよ。



（ａ）　　　　　　　　　　　　　　　　（ｂ）

(注)1’と 2’をまとめて 1 つの点とし，三端子について(a)を(b)に直して計算することが多い。

（解）（ａ），（ｂ）の Z 行列が等しい条件より求める。

Z 行列の定義より，

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

まず，$2, 2'$ を開放し，$I_2 = 0$　の場合を考える。

（ａ）図より，$$V_1 = \frac{Z_{13}(Z_{12}+Z_{23})}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} I_1 = z_{11}I_1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$V_2 = \frac{Z_{13}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} I_1 \cdot Z_{23} = z_{21}I_1 \qquad \cdots\cdots ④$$

（ｂ）図より，$$V_1 = (Z_1 + Z_3)I_1 = z_{11}I_1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$V_2 = Z_3 I_1 = z_{21}I_1 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

次に，$1, 1'$ を開放し $I_1 = 0$ の場合を考える。

一般に，$z_{12} = z_{21}$ であるから，z_{22} だけを求めればよい。

（ａ）図より，$$V_2 = \frac{Z_{23}(Z_{12}+Z_{13})}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} I_2 = z_{22}I_2 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

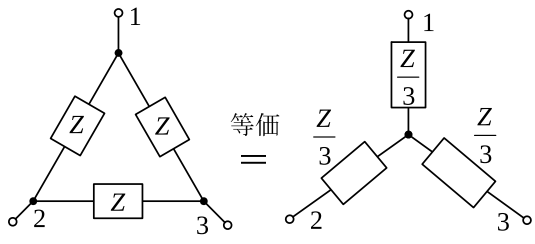
（ｂ）図より，$$V_2 = (Z_2 + Z_3)I_2 = z_{22}I_2 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

④と⑥，③と⑤，⑦と⑧を比較して，

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} \qquad (13\text{-}2)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} \qquad (13\text{-}3)$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}} \qquad (13\text{-}4)$$



覚えておこう！

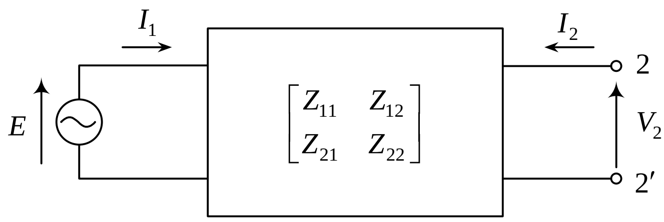
Ｙ形にすると R，L は 1/3，C は 3 倍になる。

＊　△形回路とＹ形回路の変換を**Y−Δ変換**(star-delta transformation)という。逆に，

$$Y_{13} = \frac{Y_1Y_3}{Y_1+Y_2+Y_3},\ Y_{23} = \frac{Y_2Y_3}{Y_1+Y_2+Y_3},\ Y_{12} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1+Y_2+Y_3} \qquad (13\text{-}5)$$

但し，$Y_{13} = 1/Z_{13}, Y_{23} = 1/Z_{23}, Y_{12} = 1/Z_{12}, Y_1 = 1/Z_1, Y_2 = 1/Z_2, Y_3 = 1/Z_3$

例題４　図の回路でインピーダンス行列が既知のとき，$2, 2'$ の端子から見た等価電圧源を求めよ。



（解）　図のように，I_1, I_2, V_2 を定義すると，

$$E = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

テブナンの定理を適用する。まず，開放電圧を求めるために上式で $I_2 = 0$ とおくと，

$$E = z_{11}I_1 \quad , \quad V_2 = z_{21}I_1 \qquad \therefore V_2 = \frac{z_{21}E}{z_{11}} \equiv E_0$$ とおく。

次に，$2, 2'$ 端子から見たインピーダンスを求める。電源は殺す必要があるから，E は短絡する。

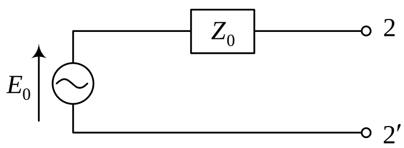
よって，①で $E = 0$ とおけばよい。

従って，$0 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \qquad \therefore I_1 = -\dfrac{z_{12}}{z_{11}} I_2$

②に代入して，$V_2 = (z_{22} - \dfrac{z_{21}z_{12}}{z_{11}})I_2$

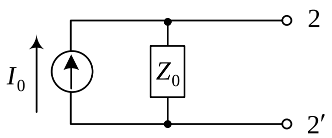
$$\therefore \frac{V_2}{I_2} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}}{z_{11}} \equiv Z_0$$ とおく。

よって，等価電圧源は

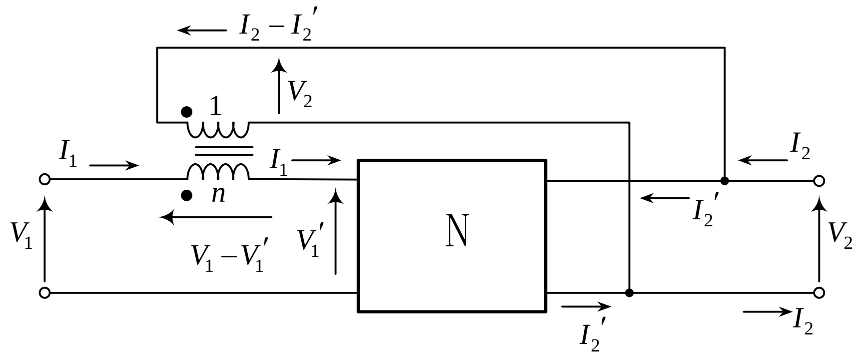


＊　等価電流源はノートンの定理を用いる。Z_0 の求め方は同じ。

短絡電流は I_0 は①，②式で，$V_2 = 0$ とおいて，I_2 を求めて，$I_0 = -I_2$ とする。



例題５　Ｎのインピーダンス行列が既知のとき，全体の二端子対網のインピーダンス行列を求めよ。



（解）図のように，電圧，電流を定義する。

図より，理想変成器に関し，

$$V_1 - V_1' : V_2 = n : 1 \qquad \text{（密結合の条件）} \qquad \cdots ①$$

$$nI_1 + I_2 - I_2' = 0 \qquad \text{（励磁電流０の条件）} \qquad \cdots ②$$

題意より，$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix}$　と書ける。　・・・③

②を③へ代入して，

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}(nI_1 + I_2) \qquad \cdots ④$$

①，③より

$$V_1 - nV_2 = Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2)$$

$$\therefore V_1 = nZ_{21}I_1 + nZ_{22}(nI_1 + I_2) + Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2) \qquad \cdots ⑤$$

④，⑤より

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} + n(Z_{21} + Z_{12}) + n^2 Z_{22} & Z_{12} + nZ_{22} \\ Z_{21} + nZ_{22} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

諸行列間の関係を以下に示しておく。

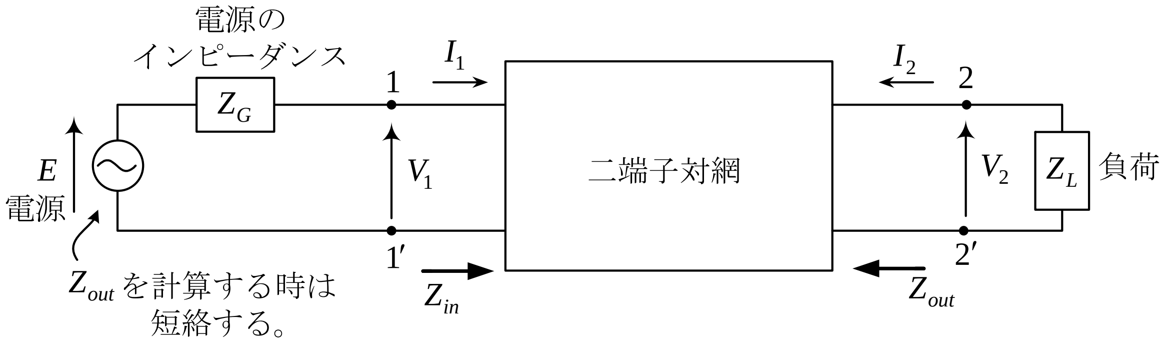
$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & |K| \\ 1 & D \end{bmatrix} \tag{13-6}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -|K| \\ -1 & A \end{bmatrix} \tag{13-7}$$

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & |Z| \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{-1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ |Y| & y_{11} \end{bmatrix} \tag{13-8}$$

○　二端子対網の伝送的性質

図の二端子対網を含む回路で，**入力インピーダンス**(input impedance)と**出力インピーダンス**(output impedance)は, 次式で求められる。但し, 出力インピーダンスを求める際, 電源は殺す必要がある。従って，テブナンの定理の場合のように電圧源は短絡する。



入力インピーダンス　$Z_{in} = \dfrac{V_1}{I_1}$　(13-9)

出力インピーダンス　$Z_{out} = \dfrac{V_2}{I_2}$　(13-10)

二端子対網の入力電圧V_1と出力電圧V_2の比を用いて，**伝達量**θを次式で定義する。**伝達量**θは二端子対網で決まり電源のインピーダンスや負荷は関係ない（電源の周波数は関係する)。

$$\theta \equiv \log \frac{V_1}{V_2} = \log_e \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad + \quad j \arg(\frac{V_1}{V_2}) \tag{13-11}$$

$\alpha' = \log_e |V_1 / V_2|$ は**減衰量**と呼ばれ単位はネーパ[$\mathrm{N_p}$]，$\beta = \arg(V_1 / V_2)$ は**位相量**と呼ばれ単位はラジアン[rad]である。通常，デシベル[dB] 表示した次式の減衰量αが用いられる。

$$\alpha \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad [\mathrm{dB}] \tag{13-12}$$

$|V_1| = |V_2|$ なら $\alpha = 0$ [dB]，$\alpha > 0$ なら減衰，$\alpha < 0$ なら増幅している。位相量は，入出力電圧の位相差 $\beta = \arg V_1 - \arg V_2$ を表わす。減衰量や位相量は二端子対網に含まれる回路素子のインピーダンスによって決まる。従って電源または信号の周波数の関数となる。**フィルタ**の設計は減衰量や位相量を用いて行われる。

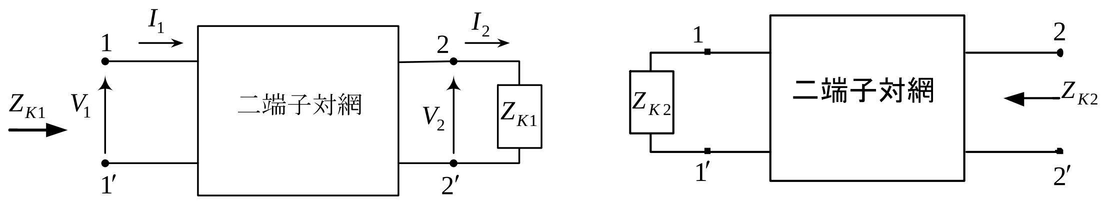
なお，電子回路や自動制御では，**伝達関数**　$G = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\text{出力}}{\text{入力}}$　を定義して，

利得（ゲイン）　$\mathrm{g} \equiv 20 \log_{10} |V_2 / V_1| \quad [\mathrm{dB}]$　(13-13)

位相　$\arg G = \arg(V_2 / V_1) \;\; [\mathrm{rad}]$　(13-14)

を考える。つまり，減衰ではなくて増幅（ぞうふく）の立場から見るのが一般的である。

反復パラメータ（**反復インピーダンス**(iterative impedance) Z_{K1}, Z_{K2}，**反復伝達量** θ_K ）について述べる。図(a)の回路で負荷として Z_{K1} をつないだ時，たまたま入力インピーダンスも Z_{K1} になったとき，その Z_{K1} を**反復インピーダンス**という。Z_{K1} は二端子対網によって違う。$2, 2'$ を入力側と考えると同様に Z_{K2} が定義できる。



(a)　　(b)

反復とは繰り返すことである。第 1 章の問題 4 (b)で求めた抵抗が反復インピーダンスである。すなわち，上記の二端子対網を右に無限個つなげば，どの接続点から右を見ても同じインピーダンスになるはずであり，これが反復インピーダンス Z_{K1} になる。分布定数回路の**特性インピーダンス**も反復インピーダンスの一種である。

Z_{K1} を負荷としてつなぐとき，$V_1 = Z_{K1} I_1$　，　$V_2 = Z_{K1} I_2$ であり，このとき，

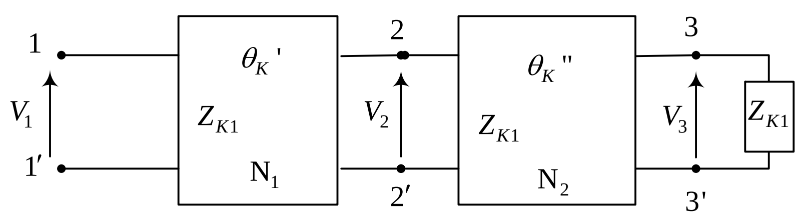
$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_2} = \log \frac{I_1}{I_2} \qquad \text{：}\textbf{反復伝達量}\text{(iterative transfer constant)} \qquad (13\text{-}15)$$

$$\alpha_k = 20 \log_{10} |V_1 / V_2| \qquad \text{：}\textbf{反復減衰量}, \qquad (13\text{-}16)$$

$$\beta_k = \arg(V_1 / V_2) \text{ ：}\textbf{反復位相量} \qquad (13\text{-}17)$$

という。反復パラメータは通信分野，分布定数回路（第 17 章）などで利用される。

問題　図のように二つの二端子対網 N₁，N₂ があり，左から見た反復インピーダンスがどちらも Z_{K1} で，反復伝達量がそれぞれ θ_K', θ_K'' であるとき，N₁，N₂ 全体の反復インピーダンスと反復伝達量を求めよ。



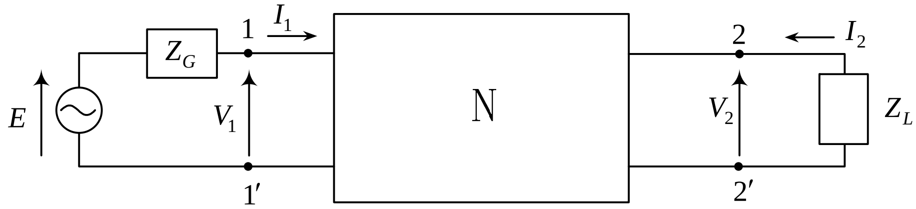
(解)　端子 $3, 3'$ に Z_{K1} を接続すると，$2, 2'$ より右を見たインピーダンスは，定義より Z_{K1} である。よって，定義より $1, 1'$ より右を見たインピーダンスも Z_{K1} となる。よって端子 $3, 3'$ に Z_{K1} を接続すると，$1, 1'$ より右を見たインピーダンスが Z_{K1} となっているから，N₁，N₂ 全体の反復インピーダンスは Z_{K1} である。

N₁，N₂ 全体の反復伝達量を θ_K とすると

$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_3} = \log \frac{V_1}{V_2} \frac{V_2}{V_3} = \log \frac{V_1}{V_2} + \log \frac{V_2}{V_3} = \theta_K' + \theta_K'' \qquad (13\text{-}18)$$

となる。

例題６　図の回路において以下の問に答えよ。



（１） N のインピーダンス行列 Z を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。
（２） N の K 行列を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。

（解）（１）図のように V_1, I_1, V_2, I_2 を定義すると，次式が成立する（z_{11} ～ z_{22} は既知)。

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \cdots\cdots ②$$

図より，　$$Z_L = -V_2 / I_2 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③で，V_2 を消去し，I_2 を求めて①に代入すると入力インピーダンス Z_{in} は,

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad \cdots\cdots ④$$

出力インピーダンス Z_{out} については，電源 E を短絡し，$2, 2'$ より見ることになるから,

$V_2 = V_1', V_1 = V_2', I_2 = I_1', I_1 = I_2'$ と書くと，②，①より

$$V_1' = z_{22}I_1' + z_{21}I_2' \quad \cdots\cdots ②'$$

$$V_2' = z_{12}I_1' + z_{11}I_2' \quad \cdots\cdots ①'$$

従って④式で，$Z_L \to Z_G$, $z_{11} \to z_{22}$, $z_{12} \to z_{21}$, $z_{21} \to z_{12}$, $z_{22} \to z_{11}$

と置き換えればよい。故に,

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_G + z_{11}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

（２）四端子定数を A, B, C, D とすると,

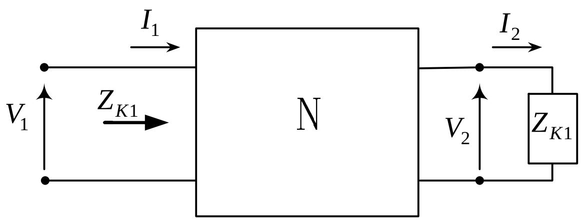
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A\dfrac{V_2}{-I_2} + B}{C\dfrac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad \cdots\cdots ⑥$$

出力側から見た K 行列は，A と D を交換するだけでよいから,

⑥式の $Z_L \to Z_G$ として

$$Z_{out} = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A} \quad \cdots\cdots ⑦$$

例題 7　N の K 行列 $K=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ が既知のとき，以下の問に答えよ。



（1）反復インピーダンス Z_{K1} を求めよ。N が対称回路のときはどうなるか。

（2）反復伝達量を θ_K とするとき，e^{θ_K} を求めよ。N が対称回路のとき $\cosh\theta_k$ はどうなるか。

（解）（1）反復インピーダンスの定義から，負荷のインピーダンスが Z_{K1} のとき，入力インピーダンスも Z_{K1} となるから，

$$Z_{K1}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{AV_2+BI_2}{CV_2+DI_2}=\frac{A\dfrac{V_2}{I_2}+B}{C\dfrac{V_2}{I_2}+D}=\frac{AZ_{K1}+B}{CZ_{K1}+D}$$

$$\therefore CZ_{K1}{}^2-(A-D)Z_{K1}-B=0$$

$$Z_{K1}=\frac{1}{2C}\left[(A-D)\pm\sqrt{(A-D)^2+4BC}\right]$$

（根号は Z_{K1} の実部が正になるように選ぶ。）

N が対称回路のとき，$A=D$ であるから，

$$Z_{K1}=\sqrt{\frac{B}{C}}$$

（2）定義より，$\theta_K=\log\dfrac{V_1}{V_2}$

一方，$V_1=AV_2+BI_2=AV_2+\dfrac{BV_2}{Z_{K1}}$

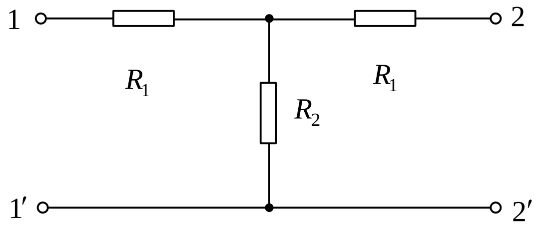
$$\therefore\frac{V_1}{V_2}=A+\frac{B}{Z_{K1}}\quad,\quad e^{\theta_K}=A+\frac{B}{Z_{K1}}$$

N が対称回路のとき，$AD-BC=1$，$A=D$ を用いて

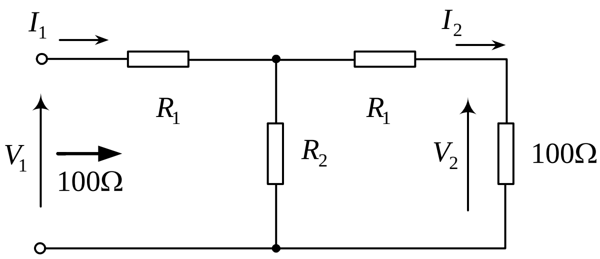
$$\cosh\theta_K=\frac{1}{2}(e^{\theta_K}+e^{-\theta_K})=\frac{1}{2}(A+\sqrt{BC}+\frac{1}{A+\sqrt{BC}})=A$$

＊　これらの式は，第 17 章の分布定数回路で利用する。

例題８　図の回路で，反復インピーダンス$Z_K=100\Omega$，反復減衰量α[dB]であるように，R_1, R_2を定めよ。



（解）$Z_K=100\Omega$であるから，$2, 2'$に100Ωを接続すると，入力抵抗も100Ωとなる。従って，



$$100=R_1+\frac{(R_1+100)R_2}{R_1+100+R_2}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

題意より，

$$\alpha=20\log_{10}\left|\frac{V_1}{V_2}\right|=20\log_{10}\left|\frac{100\times I_1}{100\times I_2}\right|=20\log_{10}\left|\frac{I_1}{I_2}\right|\quad\cdot\cdot\cdot\cdot②$$

図より，

$$I_2=\frac{R_2}{100+R_1+R_2}I_1\qquad\therefore\frac{I_1}{I_2}=\frac{100+R_1+R_2}{R_2}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot③$$

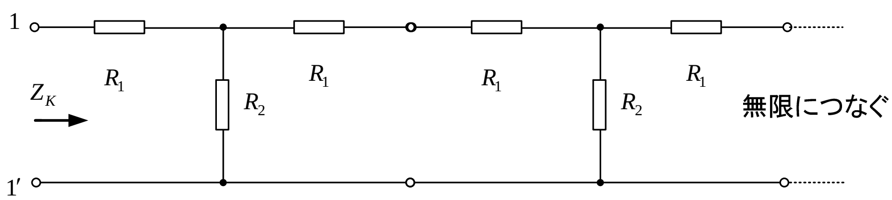
②，③より，

$$10^{\frac{\alpha}{20}}=\frac{100+R_1+R_2}{R_2}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot④$$

④を①に代入する。　$100=R_1+(R_1+100)10^{-\frac{\alpha}{20}}$　　$\therefore R_1=\dfrac{100(1-10^{-\frac{\alpha}{20}})}{1+10^{-\frac{\alpha}{20}}}$

④より，　$R_2=\dfrac{100+R_1}{10^{\frac{\alpha}{20}}-1}=\dfrac{200}{(10^{\frac{\alpha}{20}}-1)(10^{-\frac{\alpha}{20}}+1)}$

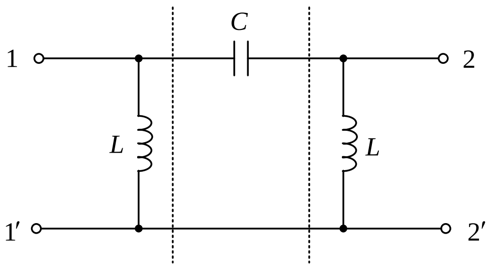
＊　図のように無限につないだときの入力インピーダンスが反復インピーダンスである。

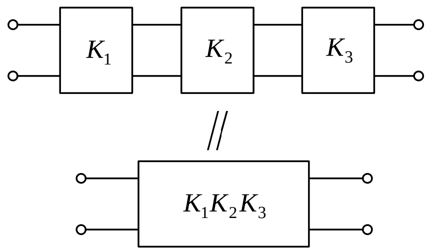


例題９　図の回路につき以下の問に答えよ。

（１）K 行列を求めよ。

（２）反復インピーダンスを求めよ。





（解）（１）３つの部分に分けて考える。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{j\omega L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{j\omega C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{j\omega L} & 1 \end{bmatrix}$$

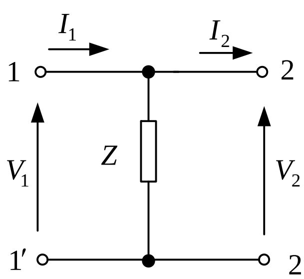
$$= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{j\omega C} \\ \dfrac{1}{j\omega L} & 1-\dfrac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{j\omega L} & 1 \end{bmatrix}$$

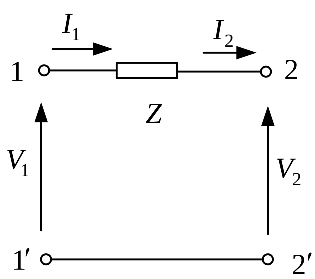
$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{1}{\omega^2 LC} & \dfrac{1}{j\omega C} \\ \dfrac{1}{j\omega L}(2-\dfrac{1}{\omega^2 LC}) & 1-\dfrac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix}$$

（２）

$$Z_K = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C(2-\dfrac{1}{\omega^2 LC})}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{2\omega^2 LC - 1}} = \frac{\omega L}{\sqrt{2\omega^2 LC - 1}}$$

☆ K 行列を求めるため，基本回路の K はすぐ出そう！　V_1, I_1 を V_2, I_2 で表す。





$V_1 = V_2$

$I_1 = I_2 + \dfrac{V_2}{Z}$

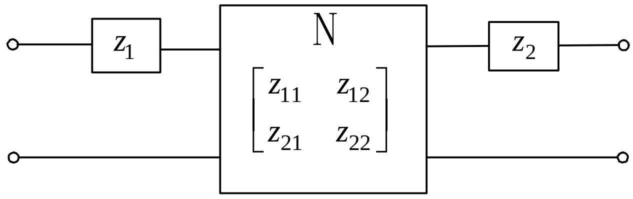
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = V_2 + Z\,I_2$

$I_1 = I_2$

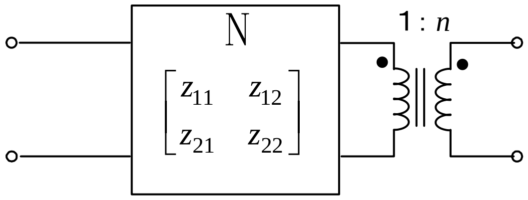
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

問題 1.　N のインピーダンス行列が既知であるとき，全体の 2 端子対網のインピーダンス行列を求めよ。



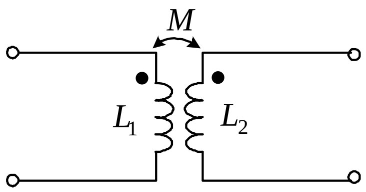
（答）

$$Z=\begin{bmatrix} z_{11}+z_1 & z_{12} \\ z_{21} & z_{22}+z_2 \end{bmatrix}$$



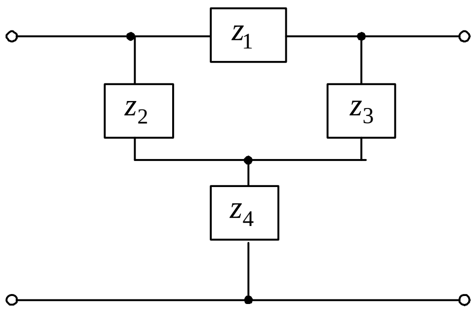
（答）$Z=\begin{bmatrix} z_{11} & n\,z_{12} \\ n\,z_{21} & n^2 z_{22} \end{bmatrix}$

問題 2.　図の回路の K 行列を求めよ。



（答）　$K=\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & \dfrac{j\omega(L_1L_2-M^2)}{M} \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$

問題 3.　図の二端子対網において，インピーダンス行列を求めよ。



（答）直接 $I_1=0$，$I_2=0$ を用いる方法，Y－Δ 変換して求める方法などを利用する。

$$Z=\begin{bmatrix} \dfrac{z_2(z_1+z_3)}{z_1+z_2+z_3}+z_4 & \dfrac{z_2z_3}{z_1+z_2+z_3}+z_4 \\ \dfrac{z_2z_3}{z_1+z_2+z_3}+z_4 & \dfrac{z_3(z_1+z_2)}{z_1+z_2+z_3}+z_4 \end{bmatrix}$$