<table>
<thead>
<tr>
<th>項目</th>
<th>電気回路講義ノート</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>原著者</td>
<td>辻 峰男</td>
</tr>
<tr>
<td>書籍名</td>
<td>電気回路講義ノート リソート</td>
</tr>
<tr>
<td>本体</td>
<td>未定義</td>
</tr>
<tr>
<td>アクセス</td>
<td>未定義</td>
</tr>
</tbody>
</table>

著者：辻 峰男
書籍名：電気回路講義ノート リソート
本体：未定義
アクセス：未定義
第15章 過渡現象解析Ⅰ

スイッチをオンまたはオフしたときの過渡現象（transient phenomena）の解析について学ぶ。このためには微分方程式を解く必要がある。微分方程式の解は、定常項＋過渡項となる。定常項は、これまでの理論（直流回路では微分を0とし、交流回路ではフェーザを用いた交流理論）を使うとよい。過渡項は電源電圧を0と置くので、直流回路でも交流回路でも同じ形である。

○ 定係数線形微分方程式の解法

電気回路で成り立つ式を1つの変数だけに整理すると、一般に(15-1)のn階の定係数線形常微分方程式（a₁,a₂,･･･aₙ：実数の定数）となる。f(t)は外部から加える入力で電源電圧に対応する。

\[
\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)
\]

(15-1)

時間tの関数であって、yは入らない。

(15-1)からyを求めると、過渡項と定常項の和として、以下のように表せる（数学の公式）。

\[
y = y_f + y_s
\]

ここで、\( y_f : f(t) = 0 \)とおいた同次方程式の解（過渡項 transient term）

\[
y_s : f(t) \quad \text{が存在するときの特殊解（定常項 steady state term）} \quad f(t) = 0 \quad \text{のとき} \quad y_s = 0
\]

過渡項 \( y_f \) の求め方

1. 特性方程式

(15-1)でf(t) = 0とし、\( \frac{dt^k}{dt^k} \rightarrow p^k \)とし、yを約分した形。

\[
p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n = 0
\]

(15-3)

を解いて、根 \( p_1 \sim p_n \)（n個）を求める。

2. この結果、全て異なる実根 \( p_1, p_2, \cdots, p_l \)

全て異なる複素共役根 \( \alpha \pm j\beta_1, \alpha \pm j\beta_2, \cdots, \alpha \pm j\beta_m \)

\( p_r \)が実数でr重根、\( \alpha \pm j\beta_r \)もr重根が得られたとしよう。

このとき、\( y_f \)は次式で与えられる。アンダーラインに注目すると美しい。

\[
y_f = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\beta_1 t} + \cdots + k_i e^{\alpha_i t} + k_{i+1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + k_{i+2} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t + \cdots + k_{i+2m-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_m t + k_{i+2m} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_m t
\]

これが覚えないと許しません。
係数 \( k \) は順に番号をつければよく、添字は気にしなくてよい。重根がなければ解は簡単になる。重根があると、\( t \) のべき乗が順に掛けられた項が入ってくる。項は全部で根の数 \( n \) 個ある。複素共役根が純虚数 \( \pm j \beta_1 \) の場合には、上式で \( \alpha_1 = 0 \) とおいて、\( k_{11} \cos \beta_1 t + k_{12} \sin \beta_1 t \) の項が入る。これより、\( L, C \) だけの回路で現れる。力学では単振動と呼ばれる解である。係数 \( k \) は、\( t = 0 \) での初期条件 (initial condition) により決定される。第 3 章、第 4 章は初期値を求めるとき役立つ。\( L, R, C, M \) からなる電気回路の場合、抵抗があれば、過渡項は時間が経つと 0 となることが判っている (\( L, C \) だけの回路では 0 にならない)。

定常項 \( y_s \) の求め方

（イ） \( f(t) = E( \text{一定} ) \) ：直流回路の場合に相当する。 (15-1)を満たす解を何か求めれば良いので、 (15-1) で微分項を全て 0 とおいて求める。 \( LC \) だけの回路でもそのようにしてよい。

\[
y_s = \frac{E}{a_n}
\]  
(15-5)

（ロ） \( f(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi) \) ：交流回路の場合に相当する。フェーザを用いた交流理論を使うのが簡単である。\( \varphi \) （ファイ）は初期位相で定数である。

\[
\frac{d^k}{dt^k} (j \omega)^k, \frac{d}{dt} j \omega, \ y \rightarrow Y, \ E_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j \varphi}
\]

と置き換えると、(15-1) よりフェーザ表示した式が得られる。

\[
(j \omega)^n Y + a_1 (j \omega)^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} j \omega Y + a_n Y = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j \varphi}
\]

\[
\therefore \ Y = \frac{\frac{E_m e^{j \varphi}}{\sqrt{2}}}{a + j b}
\]  
(15-6)

ここで、\( a + j b = (j \omega)^n + a_1 (j \omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} j \omega + a_n \) （実際に計算し整理する）

\[
|Y| = \frac{E_m}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}} \ , \ \arg Y = \varphi - \theta \ , \ \text{但し} \ , \ \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \]  
(15-7)

であるから、

\[
y_s = \sqrt{2} I_m \left( Y e^{j \theta} \right) = \sqrt{2} |Y| \sin(\omega t + \varphi - \theta)
\]  
(15-8)

* \( f(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi) \) のとき、\( \sin \) を \( \cos \) に換え、最後の \( I_m \) （虚部）を \( R_e \) （実部）にするだけでよい。もちろん \( \cos \) を \( \sin \) に直しで求めてよい。
例題 1 時間 $t = 0$ でスイッチをオンするとき，$i$ を求めよ。

（解）微分方程式を立てるとき，

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad \cdots \cdots \text{①}$$

特性方程式

$$L \tau + R = 0 \quad \therefore \quad \tau = \frac{R}{L}$$

よって，過渡項 $i_f$ は

$$i_f = k_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常項 $i_s$ は，①で微分を 0 と置き

$$i_s = \frac{E}{R}$$

よって，求める $i$ は

$$i = i_f + i_s = k_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$t = +0$ で，$i = 0$ と考えられるから（注 1）

$$0 = k_1 + \frac{E}{R} \quad \therefore \quad k_1 = -\frac{E}{R}$$

②に代入して（注 2）

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad \text{(15-9)}$$

図 15-2 $RL$ 回路の過渡応答

時間が十分経過すると，過渡項は 0 となり定常項のみになる。

図 15-1 $RL$ 直列回路

（注 1） スイッチを入れる直前を $t = -0$，スイッチを入れた直後を $t = +0$ と書く。

$i(-0)$ はスイッチが切れているから 0 となるのは当然である。

一般に，コイルの電流は急に変化しないから，$i(+0)$ も 0 となる。

（注 2） $t < 0$ も $+0$ としても値として代入するとき 0 である。

$t = 0$ の値を代入して定数を決めることを，初期条件を入れるという。

①は$t < +0$ の式だから $i(+0)$ の値を入れる。

（注 3） $[s]$ = 秒，時定数（time constant）とすると

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{(15-10)}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}}$$

に変形すれば \( \tau \) が判る。

$t = \tau$ のとき

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-1} = \frac{1}{2.718} = 0.368$$

$$1 - 0.368 = 0.632$$

つまり，電流は最終値までの約 63.2%まで立ち上がる。また$t = 0$ の接線が最終値と交わる時間でもある。$L$ が大きいと時定数が大きいかので，ゆっくり立ち上がる。（15-10）は覚えておこう。
例題2 図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンしたとき，流れる電流 $i$ 及びコンデンサの電荷 $q$ を求めよ。但し，スイッチを入れる前，コンデンサの電荷は $q_0$ であったとする。

（解）微分方程式を立てると，

$$ R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \cdots \cdots (1) $$

$$ i = \frac{dq}{dt} \cdots \cdots (2) $$

(1) を解く。特性方程式は

$$ Rp + \frac{1}{C} = 0 \therefore p = -\frac{1}{RC} $$

よって，過渡項 $q_f$ は

$$ q_f = k_1 e^{pt} = k_1 e^{-t/RC} $$

定常項 $q_s$ は，

$$ q_s = CE $$

よって，求める $q$ は，

$$ q = q_f + q_s = k_1 e^{-t/RC} + CE $$

$t = 0$ で，$q = q_0$ と考えられるから，(注1)

$$ q_0 = k_1 + CE \therefore k_1 = q_0 - CE $$

従って，

$$ q = q_0 e^{-t/RC} + CE(1 - e^{-t/RC}) $$

電流 $i$ は，

$$ i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{RC} (CE - q_0) e^{-t/RC} $$

この場合，時定数は

$$ \tau = RC \quad (15-11) $$

である。図15-4 で時定数経つと電荷は63.2%増加し，電流は63.2%減少している。(15-11)は覚えておこう。$C$ が大きいと電荷や電圧はゆっくり立ち上がる。$i(-0) = 0$ だが，$i(+0) = E/R$ で，電流は不連続に変化している。自然現象はいつも連続とは限らない。
例題3 図の回路で、$t = 0$ でスイッチをオンしたとき、コンデンサの電荷と流れる電流を求めよ。但し、コンデンサの初期電荷は 0 とする。

（解）S を入れた後、微分方程式を立てると

$$v_R = Ri, v_L = L \frac{di}{dt}, v_C = \frac{q}{C}, i = \frac{dq}{dt}, E = v_R + v_L + v_C$$ より

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$ ････①

定常項$q_s$ は、

$$q_s = CE$$ ････②

特性方程式は,

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

根は $L, R, C$ の大小により、3つの場合に分けられる。

（ⅰ）$R^2 - 4L \frac{C}{2L}$ のとき、$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$ ････(重根)（注）は定義の意）

過渡項$q_f$ は、$q_f = k_1 e^{-at} + k_2 t e^{-at}$

従って、一般解は

$$q = q_s + q_f = CE + k_1 e^{-at} + k_2 t e^{-at}$$

（注）コイルの$i$ とコンデンサの$q$ は急に変化しない。

$$i = \frac{dq}{dt} = -k_1 a e^{-at} + k_2 e^{-at} - k_2 a t e^{-at}$$

初期条件は、$t = 0$ で、$q = 0$ 、$i = 0$ と考えられるから、（注）

$$0 = CE + k_1 , \quad 0 = -k_1 a + k_2 \quad k_1 = -CE , \quad k_2 = aCE$$

従って、

$$q = CE - CE(1 + at)e^{-at}$$

$$i = a^2 CE t e^{-at}$$

このときの過渡応答を図 15-6 に示す。

（ⅱ）$R^2 - 4L \frac{C}{2L}$ のとき、$p_1 \neq p_2$ ････(注) のとき $p_1 \neq p_2$
過渡項 \( q_f \) は、
\[ q_f = k_1 e^{pt} + k_2 e^{pt} \]
従って、一般解は、
\[ q = CE + k_1 e^{pt} + k_2 e^{pt} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} = p_1 k_1 e^{pt} + p_2 k_2 e^{pt} \]
初期条件は、\( t = +0 \) で、\( q = 0 \) 、\( i = 0 \) と考えられるから、
\[ 0 = CE + k_1 + k_2 \quad , \quad 0 = p_1 k_1 + p_2 k_2 \quad \therefore k_1 = \frac{p_2 CE}{p_1 - p_2} \quad , \quad k_2 = -\frac{p_1 CE}{p_1 - p_2} \]
応答波形は図 15-6 と同様になる。

(iii) \( R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0 \) のとき、
\[ \left\{ \begin{array}{l} p_1 = -\frac{R}{2L} \pm j \frac{1}{2L} \sqrt{4 \frac{L}{C} - R^2} = a \pm j \beta \\
\end{array} \right. \]
過渡項は、
\[ q_f = k_1 e^{-at} \cos \beta t + k_2 e^{-at} \sin \beta t \]
従って、一般解は、
\[ q = CE + k_1 e^{-at} \cos \beta t + k_2 e^{-at} \sin \beta t \]
\[ i = \frac{dq}{dt} = e^{-at} \left\{ (\beta k_2 - a k_1) \cos \beta t - (\beta k_1 + a k_2) \sin \beta t \right\} \]
初期条件は、\( t = +0 \) で、\( q = 0 \) 、\( i = 0 \) と考えられるから、
\[ 0 = CE + k_1 \quad , \quad 0 = \beta k_2 - a k_1 \quad \therefore k_1 = -CE \quad , \quad k_2 = \frac{a}{\beta} k_1 = -\frac{a}{\beta} CE \]
従って、
\[ q = CE \left\{ 1 - e^{-at} (\cos \beta t + \frac{a}{\beta} \sin \beta t) \right\} \quad , \quad i = C E e^{-at} (\beta + \frac{a^2}{\beta}) \sin \beta t \]
このときの過渡応答を図 15-7 に示す。
減衰振動しながら、\( q \) は \( CE \) へ、\( i \) は \( 0 \) へ最終的に落ち着く。

全ての場合、特性方程式の根 \( p_1, p_2 \) の実部が負（左半平面）だからある値に収束している。実部が正なら発散（不安定）する。しかし、回路では通常、実部は負である。
\( LC \) だけの回路のときのみ実部は \( 0 \) となり、発散も減衰もしないで持続振動する。

こんな長い答えは書けないので試験には出ないと考える人は甘い！場合を指定したり、数値を与えると \( 1/3 \) の長さになり、手ごろな問題となるのだ。

図 15-7 RLC 直列回路の過渡応答
例題4 図の回路で, $t = 0$ でスイッチをオンしたとき, 流れる電流 $i$ 及びコンデンサの電荷 $q$, 電圧 $v_C$ を求めよ。但し, スイッチを入れる前, コンデンサの電荷は $0$ であったとする。

（解）$S$ を入れた後, 微分方程式を立てる。

\[ L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \]

定常項 $q_s$ は,
\[ q_s = CE \]

特性方程式は,
\[ Lp^2 + \frac{1}{C} = 0 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{c} p_1 = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ p_2 = \pm j \beta \end{array} \right. \]

過渡項は, $q_f = k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t$
従って, 一般解は,
\[ q = CE + k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t \]
\[ i = \frac{dq}{dt} = -\beta k_1 \sin \beta t + \beta k_2 \cos \beta t \]
初期条件は, コンデンサの電荷とコイルの電流は急変しないので, $t = +0$ で, $q = 0$ , $i = 0$ と考えられるから,
\[ 0 = CE + k_1 , \quad 0 = \beta k_2 \quad \therefore \quad k_1 = -CE , \quad k_2 = 0 \]
従って, $q = CE(1 - \cos \beta t) \quad , \quad i = CE \beta \sin \beta t \quad , \quad v_C = E(1 - \cos \beta t)$
ただし, $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

図15-9のように持続振動する。これは, 力学の単振動と同じ現象である。ばねにおもりをつるすと空気抵抗がなければずっと振動する。微分方程式が同じ形をしている。
例題 5 図の回路において、スイッチ S を \( t = 0 \) で閉じる。S を閉じる前、C の電荷は \( q_0 \) であった。コンデンサに流れる電流を求めよ。

![回路図](image_url)

（解）S を閉じた後、\( i_1, i_2, v, q \) を図のように定義する。成立する式は、

\[
E = R_1(i_1 + i_2) + v \quad \cdots \cdots (1)
\]

\[
v = R_2i_1 \quad \cdots \cdots (2) \quad q = Cv \quad \cdots \cdots (3) \quad i_2 = \frac{dq}{dt} \quad \cdots \cdots (4)
\]

変数 \( q \) だけの式にするため、\( i_1, i_2, v \) を消去して、

\[
E = R_1\left(\frac{q}{R_2C} + \frac{dq}{dt}\right) + q = R_1\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}(1 + \frac{R_1}{R_2})q
\]

特性方程式

\[
R_1p + \frac{R_1 + R_2}{CR_2} = 0 \quad , \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}
\]

定常解 \( q(\infty) \) は、

\[
q(\infty) = \frac{CER_2}{R_1 + R_2}
\]

よって、\( q = q(\infty) + ke^{-\frac{t}{\tau}} \) とし、\( \tau = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \)：時定数

\( t = 0 \) で、\( q = q_0 \) と考えられるから、

\[
q = q(\infty) + k \quad \therefore k = q_0 - q(\infty)
\]

\[
\therefore q = q(\infty) + (q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}
\]

\( 4 \) より、

\[
i_2 = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}(q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}
\]

◎ スイッチから左側の回路はテブナンの定理により直流電源と抵抗の直列回路に変形できるので、以下の問題と同じになる。時定数は \( \tau = R_0C \), \( q(\infty) = CE_0 \) とすら判る。

\[
R_0 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}, \quad E_0 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}
\]
例題 6 図の回路は \( t < 0 \) において定常状態にある。\( t = 0 \) でスイッチを開く。\( t > 0 \) においてコイルの電流 \( i_L(t) \) を求めよ。但し，\( E = 10 \, \text{V} \)，\( r = 5 \, \Omega \)，\( R = 2 \, \Omega \)，\( L = 3 \, \text{H} \)，\( C = 1/6 \, \text{F} \) とする。

（解） \( t > 0 \) において，次式が成り立つ。

\[ v = Ri_s = L \frac{di_L}{dt} \] ①

\[ i_s + i_C + i_L = 0 \] ②

\[ i_C = C \frac{dv}{dt} \] ③

①～③式より，電流 \( i_L(t) \) に関する次の微分方程式が得られる。

\[ LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \] ①

数値を代入して

\[ \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3 \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \] ⑤

である。この式の特異方程式

\[ p^2 + 3p + 2 = 0 \] ⑥

の根が \( p = -1, -2 \) であるので，電流 \( i_L(t) \) は次式で与えられる。

\[ i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \quad (k_1, k_2 \text{ は未知定数}) \] ⑦

\[ \frac{d i_L}{dt} = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} \] ⑧

コイルに流れれる電流は急には変化せず，\( t < 0 \) でコイルは短絡状態にあるから

\[ i_L(0) = E / r = 2 \, \text{A} \] ⑨

を得る。一方，コンデンサの電圧は急には変化せず，\( t < 0 \) で 0 だから

\[ v(0) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \therefore \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \] ⑩

⑦，⑧式に，⑨，⑩式を適用して，\( k_1 = 4, k_2 = -2 \) だから

\[ i_L(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \, \text{[A]} \] ⑪

* 電源が接続されていない回路では，時間が十分たつと抵抗でエネルギーが消費されて，電圧や電流は 0 となる。
例題 7 図の回路で，$t = 0$でスイッチをオンするとき，
流れる電流を求めよ。
ここで，$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$

【解】成立する微分方程式は，
\[
L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t + \varphi)
\]

定常解はフェーザを使って求める。1をフェーザ表示すると，
\[
j \omega LI + RI = \frac{E_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}}
\]
\[
\therefore I = E_m e^{j\varphi} \frac{e^{j\varphi}}{R + j \omega L} = \frac{E_m e^{j(\varphi - \theta)}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}
\]
但し，\[\tan \theta = \frac{\omega L}{R}\]
②を瞬時値表示にもどして$i_s$は，
\[
i_s = \sqrt{2} I_m (le^{j\omega t}) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta)
\]
過渡項を求める。特性方程式は，
\[
Lp + R = 0 \therefore p = -\frac{R}{L}
\]
よって，$i_f = ke^{pt} = ke^{-\frac{R}{L}t}$
求める一般解は，
\[
i = i_s + i_f = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta) + ke^{-\frac{R}{L}t}
\]
初期条件は，コイルの電流は急に変化しないので$t = +0$で$i = 0$として，
\[
0 = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi - \theta) + k \therefore k = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi - \theta)
\]
②に代入して，
\[
i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \varphi - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\varphi - \theta) \right\}
\]
過渡項の求め方は，直流でも交流でも同じです。定常項は，交流の場合フェーザを用いればよい。
時間が十分経過すると過渡項は0となり，定常項のみとなる。だから，過渡項とか定常項という名前で呼ばれている。
例題8 定常状態にある図の回路で、\( t = 0 \) でスイッチをオフする時、流れる電流を求めよ。

\[
\begin{align*}
\text{（例）スイッチを開く直前を} \quad & t = -0, \quad \text{直後を} \quad t = +0 \text{と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから，} \\
& i_1^{-0} = \frac{E}{R_1}, \quad i_2^{-0} = \frac{E}{R_2} \\
\text{鎖交磁束不変の理より，} \\
& (L_1 + L_2)i^{+0} = L_1i_1^{-0} - L_2i_2^{-0} \\
& \therefore i^{+0} = \frac{(L_1/R_1 - L_2/R_2)E}{L_1 + L_2} \\
& t \geq +0 \text{において，} \\
& (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0 \\
& \therefore i = k e^{-R_1+R_2t/L_1+L_2} \\
\text{初期条件} \quad & t = +0 \text{で，} \quad i = i^{+0} \quad \therefore k = i^{+0} \\
\text{よって，} \quad & i = \frac{(L_1/R_1 - L_2/R_2)E}{L_1 + L_2} \cdot e^{-R_1+R_2t/L_1+L_2} \\
\end{align*}
\]

鎖交磁束の和の求め方

\( t \geq +0 \) のとき（Sを切った後）

\[
\begin{align*}
& v = v_1 + v_2 = \frac{d}{dt} (L_1i + L_2i) \quad (1) \\
& t \leq -0 \text{のとき（Sを切る前）} \\
& v = v_1 + v_2 = \frac{d}{dt} (L_1i - L_2i) \quad (2) \\
\end{align*}
\]

①と②で鎖交磁束の部分を等しいとおく。

これまでコイルの電流は急に変化しないと考えてきたが、この回路ではそれが成立しない。特殊な例である。スイッチを切ったとき火花が発生する。

鎖交磁束不変の理

スイッチを入れたり切ったりした後（\( t = +0 \)）の閉回路で、キルヒホッフの第2法則より電圧方程式を立てる。このとき、コイルだけをまとめた電圧の和 \( v \) は、\( t = -0 \) と \( t = +0 \) の間に無限大にならない（コイル単体では無限大となることがあっても）。

\[
\begin{align*}
& v = \frac{d}{dt} (\text{鎖交磁束の和}) \\
& \text{であるから,} \quad t = -0 \text{と} \quad t = +0 \text{の間で鎖交磁束の和は変化しない。なお, 電圧や電流の矢印は好きによいが, マイナスが付くかどうかは電圧vと電流の矢印の選び方にによる。}
\end{align*}
\]
例題 9 定常状態にある図の回路で，\( t = 0 \) でスイッチをオフする時，流れる電流を求めよ。なお，\( L_1, L_2 \)間の相互インダクタンスは\( M \)とする。

\[
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
L_1 \quad M \quad E \\
S \quad t = 0 \\
\end{array} \\
R_1 \quad \bullet \\
\uparrow v_1 \\
\end{array} \Rightarrow \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
L_2 \\
\bullet \\
\downarrow v_2 \\
\end{array} \\
R_2 \quad \bullet \\
\uparrow i \\
\end{array}
\end{array}
\]

(解) スイッチを開く直前を\( t = -0 \)，直後を\( +0 \)と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから，
\[
i_1^{-0} = \frac{E}{R_1}, \quad i_2^{-0} = \frac{E}{R_2} \tag{1}
\]

\[ t \geq +0 \] のとき（Sを切った後）（符号は第9章例題6参照）
\[
v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + (L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt}) = \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + L_2 i_2 - 2M i) \tag{2}
\]

\[ t \leq -0 \] のとき（Sを切る前）
\[
v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + (-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt}) = \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2 - L_2 i_2 - M i_1) \tag{3}
\]

鎖交磁束不変の理を②，③に適用して
\[
L_1 i_1^{-0} + L_2 i_2^{-0} - 2M i_1^{-0} = L_1 i_1^{-0} + M i_2^{-0} - L_2 i_2^{-0} - M i_1^{-0}
\]

よって，
\[
i_1^{-0} = \frac{E}{L_1 + L_2 - 2M} \left( \frac{L_1 - M}{R_1} - \frac{L_2 - M}{R_2} \right) \tag{4}
\]

\[ t \geq +0 \] のとき，回路の微分方程式は次式で与えられる。
\[
(L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0 \tag{5}
\]

④の初期条件で⑤を解いて，
\[
i = \frac{E}{L_1 + L_2 - 2M} \left( \frac{L_1 - M}{R_1} - \frac{L_2 - M}{R_2} \right) e^{- \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2 - 2M} t}
\]

161
例題10 図の回路で \( t = 0 \) でスイッチを入れるとき、電流 \( i_1 \) を求める。スイッチを入れる前 \( i_2 = 0 \) とする。また、 \( L_1L_2 - M^2 > 0 \) とする。

(解) スイッチを入れた後、以下の微分方程式が成り立つ。

\[
E = R_1i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt} \quad (1) \quad \text{0} = R_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M \frac{di}{dt} \quad (2)
\]

\( i_1 \)だけの式にするため、まず①より \( di_1/dt \) を求め②に代入して次式が得られる。

\[
i_2 = -\frac{L_2}{R_2M}E + \frac{L_2}{R_2M}i_1 - \frac{L_2i_1}{R_2M} \left( \frac{d}{dt} - \frac{M}{R_2} \right) \quad (3)
\]

③を①に代入して、以下の \( i_1 \)だけの微分方程式が得られる。

\[
\Delta \frac{d^2i_1}{dt^2} + (L_1R_1 + L_2R_2)\frac{di_1}{dt} + R_1R_2i_1 = R_1E \quad \text{ただし} \quad \Delta = L_1L_2 - M^2 \quad (4)
\]

特性方程式は、

\[
\Delta p^2 + (L_1R_1 + L_2R_2)p + R_1R_2 = 0 \quad (5)
\]

⑤の根は実数で、次式で与えられる。

\[
p_1, p_2 = \frac{-L_1R_1 + L_2R_2 \pm \sqrt{(L_1R_1 - L_2R_2)^2 + 4R_1R_2M^2}}{2\Delta} \quad \text{ただし} \quad p_1 = +, \quad p_2 = - \text{に対応する。}
\]

④式の一般解は、次式で与えられる。

\[
i_1 = \frac{E}{R_1} + Ae^{p_1t} + Be^{p_2t} \quad (6) \quad \text{故に、} \quad \frac{di_1}{dt} = Ap_1e^{p_1t} + Bp_2e^{p_2t} \quad (7)
\]

スイッチを入れた直後、①、②それぞれの鉄交磁束の和が変化せず 0 となるから

\[
L_1i_1(0) + M_i(0) = 0, \quad L_1i_2(0) + M_i(0) = 0 \quad (8)
\]

\[\Delta \neq 0 \text{なので} \quad i_1(0) = i_2(0) = 0 \quad (9)
\]

⑥式に代入して、次式を得る。

\[
0 = \frac{E}{R_1} + A + B \quad (10)
\]

\( t = +0 \) で、③、⑩式より、次式を得る。

\[
\left. i_1 \right|_{t=+0} = \frac{L_2E}{\Delta} \quad (11)
\]

上式に⑨を代入して、

\[
Ap_1 + Bp_2 = \frac{L_2E}{\Delta} \quad (12)
\]

③、④より、 \( A, B \) は以下のように求まる。

\[
A = \frac{E}{p_1 - p_2} \left( \frac{L_2}{\Delta} \frac{p_2}{R_1} \right), \quad B = \frac{E}{p_2 - p_1} \left( \frac{L_2}{\Delta} \frac{p_1}{R_1} \right)
\]

\[
\Delta = 0 \text{の場合}
\]

\[
i_2 = -\frac{L_2}{R_2M}E + \frac{L_2R_1}{R_2M}i_1 \quad (3')
\]

\[
(L_1R_1 + L_2R_2)\frac{di_1}{dt} + R_1R_2i_1 = R_1E \quad (4')
\]

\[
i_1 = \frac{E}{R_1} + Ae^{p_1t} \quad p = -\frac{R_2}{L_1R_1 + L_2R_2} \quad (13')
\]

\[
i_2 = \frac{L_2R_1}{R_2M}Ae^{p_1t} \quad (14')
\]

⑧より

\[
A = -\frac{L_2R_1}{L_1R_1 + L_2R_2} \frac{E}{R_1} \quad (15')
\]

162
例題 11 図の回路で, \( t = 0 \) で両方のスイッチをオンしたとき, 抵抗に流れる電流を求めよ。スイッチをオンする直前 \( t = -0 \) のコンデンサの初期電荷を \( q_1(-0) = q_1^{-0}, \ q_2(-0) = q_2^{-0} \) とする。

（解）スイッチ閉じた後, \( C_1 \) と \( C_2 \) は 1 つにまとめることができる。

スイッチ閉じた直後, の初期電荷を \( q^{+0} \) とすると,

電荷量不変の理より,

\[ q_1^{-0} + q_2^{-0} = q^{+0} \quad \cdots \cdots ① \]

微分方程式を立てるとき \((t \geq 0)\),

\[ v = Ri = \frac{q}{C}, \quad i = -\frac{dq}{dt} \]

\[ \therefore R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \]

よって,

\[ q = k_1 e^{-\frac{t}{RC}} \]

初期条件①を代入して,

\[ q^{+0} = k_1 \]

よって,

\[ q = (q_1^{-0} + q_2^{-0}) e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \]

\[ \therefore i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \]

《注》

（注）1 つにまとめないで考えたらどうなるか。

\[ q_1^{+0} + q_2^{+0} = q_1^{-0} + q_2^{-0} \]

\[ \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = Ri (= v) \]

\[ i = -\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \]

\[ q_1 \text{だけの式を作り解け。} \]

同じ \( i \) を得る。

電荷量不変の理

スイッチをオシンすることでコンデンサだけが並列に接続されるとき, それらは 1 つにまとめられ, コンデンサの電荷の総量は急に変化しない。この結果, 1 つにまとめられたコンデンサに接続される外部回路に流れる電流は無限大とならない。
例題 12 図の回路で, \( t = 0 \) でスイッチをオンするとき, 抵抗 \( R \) で消費されるエネルギーを求めよ。但し, コンデンサ \( C_1, C_2 \) のスイッチをオンする直前の電荷をそれぞれ \( Q_0, 0 \) とする。

（解）図のように極板の電荷を定義すると成立する式は,

\[
\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \quad \cdots \cdots ①
\]

\[
\frac{q_1}{C_1} = Ri + \frac{q_2}{C_2} \quad \cdots \cdots ②
\]

電荷は保存されるから

\[
q_1 + q_2 = Q_0 \quad \cdots \cdots ③
\]

\( q_2 \)だけの微分方程式を作るため, ①を②に代入して \( i \) を消去し, 更に③を代入して \( q_1 \) を消去すると,

\[
\frac{Q_0 - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + R \frac{dq_2}{dt} \quad \therefore R \frac{dq_2}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)q_2 = \frac{Q_0}{C_1} \quad \cdots \cdots ④
\]

ここで, \( C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \) とおくと, \( R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} = \frac{Q_0}{C_1} \)

④式を定常項と過渡項に分けて解くと,

\[
q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 + k e^{-\frac{t}{RC}} \quad \cdots \cdots ⑤
\]

\( q_2(+0) = 0 \) より, \( k = -\frac{C}{C_1} Q_0 \)

よって, \( q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \therefore \frac{dq_2}{dt} = \frac{Q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{RC}} \)

\( t = 0 \) から \( \infty \) までに抵抗で消費されるエネルギー \( W \) は,

\[
W = \int_{0}^{\infty} R i^2 dt = \frac{Q_0}{RC_1} \left[ e^{-\frac{2}{RC} t} \right]_{0}^{\infty} \left[ e^{-\frac{2}{RC} t} \right]_{0}^{\infty} \]

\[
= \frac{C}{2} \left( \frac{Q_0}{C_1} \right)^2 \]

164
例題13 図のRC微分回路に、図のようなパルス電圧を加えた。出力電圧$e_0$を求めよ。但し、コンデンサの$t=0$での電荷は0とする。

（解）成立する微分方程式は、
\[ R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (0 < t < T) \quad \cdots \cdots ① \]
\[ R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (T < t) \quad \cdots \cdots ② \]

①を解くと、
\[ \frac{dq}{dt} = CE + k e^{-\frac{t}{RC}} \]
\[ t=0 \text{で} \frac{dq}{dt} = 0 \text{だから、} k = -CE \]
\[ \therefore q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \cdots \cdots ③ \]

よって、
\[ e_0 = Ri = R \frac{dq}{dt} = E e^{-\frac{t}{RC}} \quad (0 < t < T) \quad \cdots \cdots ④ \]

②を解くと、
\[ \frac{dq}{dt} = k' e^{-\frac{t}{RC}} \quad \cdots \cdots ⑤ \]
\[ t=T \text{で、電荷は急に変化しないので} ③ \text{より} \]
\[ q = CE(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) \text{であるから、} ⑤ \text{式に代入して} \]
\[ CE(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) = k' e^{-\frac{T}{RC}} \quad \therefore k' = CE(e^{\frac{T}{RC}} - 1) \]

⑤より、
\[ q = CE(e^{-\frac{t-T}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}) \]
\[ e_0 = R \frac{dq}{dt} = E e^{-\frac{t}{RC}} - E e^{-\frac{t-T}{RC}} \quad (T < t) \]

この問題は、左図の回路で、$t=0$でスイッチをオンし、$t=T$でスイッチを切った場合の$e_0$を求める問題とは異なる。オンしている時は同じだが、オフしている時、例題は$E = 0$の短絡状態に対し、この場合は開放で電流は流れない。
問題1. 定常状態にある回路のスイッチSを$t=0$で開いたとき、抵抗$R_2$に流れる電流及び$t \geq 0$の期間に消費される電力量を求めよ。

\[ i = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2 t}{L}}, \quad W = \frac{1}{2} L \left( \frac{E}{R_1} \right)^2 \]

問題2. 定常状態にある図の回路のスイッチを$t=0$で閉じた。抵抗$R$とインダクタンス$L$を流れる電流$i_1, i_2$を求めよ。

\[ i_1 = \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R \cdot R}{(R_0 + R) \cdot L} t} \]
\[ i_2 = \frac{E}{R_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{R \cdot R}{(R_0 + R) \cdot L} t} \right\} \]

問題3. 図の回路で、$t=0$でスイッチS1を閉じ、ついで$t=T$のときスイッチS2を閉じると同時にスイッチS1を開くものとする。この時に流れる電流を求め図示せよ。

\[ i = \frac{E}{R} \left\{ e^{- \frac{R \cdot t}{L} (t-T)} - e^{- \frac{R}{L}} \right\} \]
\[ i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{- \frac{R}{L}} \right) \]

問題4. 図の回路で最初スイッチSを1の端子に接続し、十分時間が経過してから$t=0$でスイッチを2の端子に切り替えた。$t \geq 0$における電荷$q(t)$を求めよ。

\[ q = \frac{CR_2 E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_2} t} \]

問題5. 図の回路でスイッチを閉じ、十分時間が経過してから$t=0$でスイッチを開いた。$t \geq 0$における電荷$q(t)$を求めよ。ただし、$E=10V, R_1=2\Omega, R_2=2\Omega, C=0.1F, L=1H$

\[ q = e^{-t} \left( \frac{1}{2} \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right) \]
\[ i = -\frac{dq}{dt} \quad q(0)=0.5 \quad i(0)=2.5 \]
問題6. $t = 0$でスイッチSをオンするとき、電流$i$とコンデンサ電圧$v$を求めよ。Sをオンする前のコンデンサの初期電圧は$v_0$とする。（$LC$共振：抵抗がないといつまでも振動が続く）

\[
\begin{equation}
LC \frac{d^2 v}{dt^2} + v = E, \quad i = C \frac{dv}{dt}
\end{equation}
\]

\[
v = E + k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t
\]

\[
v = E + (v_0 - E) \cos \omega_0 t, \quad i = \omega_0 C (E - v_0) \sin \omega_0 t
\]

\[
\omega_0 = 1/\sqrt{LC} : \text{共振角周波数}
\]

問題7. 定常状態にある図の回路で、$t = 0$でスイッチを開いた。$t \geq 0$における$i(t)$を求めよ。

\[
i(t) = \frac{3}{7} e^{-\frac{2t}{7}} + 1
\]

鎖交磁束不変の理より$i(0) = \frac{10}{7}$

問題8. コンデンサの初期電荷を0とし、$t = 0$でスイッチを閉じた。$t \geq 0$における$v(t)$を求めよ。ただし、

\[
e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)
\]

とする。

\[
v(t) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \varphi - \theta) - e^{-\frac{t}{RC}} \sin(\varphi - \theta) \right\}
\]

ただし、$\theta = \tan^{-1}(\omega CR)$

問題9. コンデンサの初期電荷を0とし、$t = 0$でスイッチを閉じた。$t \geq 0$における$v(t)$を求めよ。

ただし、$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$とすると。

なお、$R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0$とする。

\[
v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi - \theta) - V_m \sin(\varphi - \theta)e^{-\alpha t} \cos \beta t
\]

\[-V_m \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin(\varphi - \theta) + \frac{\omega}{\beta} \cos(\varphi - \theta) \right)e^{-\alpha t} \sin \beta t
\]

ただし、$V_m = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$、$\alpha = -\frac{R}{2L}$、$\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$、$\theta = \tan^{-1} \frac{R}{1 - \omega L}$