第 15 章　過渡現象解析 I

スイッチをオンまたはオフしたときの**過渡現象**(transient phenomena)の解析について学ぶ。このためには微分方程式を解く必要がある。微分方程式の解は，**定常項＋過渡項**となる。定常項は，これまでの理論（直流回路では微分を 0 とし，交流回路ではフェーザを用いた交流理論）を使うとよい。過渡項は電源電圧を 0 と置くので，直流回路でも交流回路でも同じ形である。

○　定係数線形微分方程式の解法

電気回路で成り立つ式を 1 つの変数 y だけに整理すると，一般に(15-1)の n 階の定係数線形常微分方程式（$a_1, a_2, \cdots a_n$: 実数の定数）となる。$f(t)$ は外部から加える入力で電源電圧に相当する。

$$\frac{d^n y}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d y}{d t} + a_n y = f(t) \qquad (15\text{-}1)$$

時間 t の関数であって，y は入らない。

(15-1)から y を求めると，過渡項と定常項の和として，以下のように表せる（数学の公式）。

$$y = y_f + y_s \qquad (15\text{-}2)$$

ここで，$y_f : f(t) = 0$　とおいた**同次方程式の解**（**過渡項** transient term）

$y_s : f(t)$　が存在するときの**特殊解**（**定常項** steady state term），　$f(t) = 0$ のとき $y_s = 0$

過渡項 y_f の求め方

1．**特性方程式**　　(15-1)で $f(t) = 0$ とし，$\dfrac{d^k}{dt^k} \to p^k$ とし，y を約分した形。

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} p + a_n = 0 \qquad (15\text{-}3)$$

を解いて，根 $p_1 \sim p_n$（n 個）を求める。

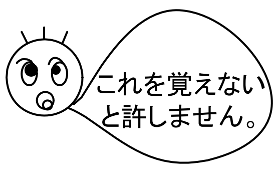
2．この結果，全て異なる実根　$p_1, p_2, \cdots, p_l$

全て異なる複素共役根　$\alpha_1 \pm j\beta_1, \alpha_2 \pm j\beta_2, \cdots, \alpha_m \pm j\beta_m$

p_r が実数で r 重根，$\alpha_\gamma \pm j\beta_\gamma$ も r 重根が得られたとしよう。

このとき，y_f は次式で与えられる。アンダーラインに注目すると美しい。

$$\begin{aligned} y_f &= k_1 \underline{e^{p_1 t}} + k_2 \underline{e^{p_2 t}} + \cdots\cdots + k_l \underline{e^{p_l t}} \\ &\quad + k_{l+1} \underline{e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t} + k_{l+2} \underline{e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + k_{l+2m-1} \underline{e^{\alpha_m t} \cos \beta_m t} + k_{l+2m} \underline{e^{\alpha_m t} \sin \beta_m t} \end{aligned}$$



$$\left.\begin{aligned}
&+k_{l+2m+1}\underline{e^{p_r t}}+k_{l+2m+2}\underline{t\,e^{p_r t}}+k_{l+2m+3}\underline{t^2\,e^{p_r t}}+\cdots+k_{l+2m+r}\underline{t^{r-1}e^{p_r t}}\\
&+k_{l+2m+r+1}\underline{e^{\alpha_\gamma t}\cos\beta_\gamma t}+k_{l+2m+r+2}\underline{e^{\alpha_\gamma t}\sin\beta_\gamma t}\\
&+k_{l+2m+r+3}\underline{t\,e^{\alpha_\gamma t}\cos\beta_\gamma t}+k_{l+2m+r+4}\underline{t\,e^{\alpha_\gamma t}\sin\beta_\gamma t}\\
&\ \vdots\\
&+k_{l+2m+r+2r-1}\underline{t^{r-1}\,e^{\alpha_\gamma t}\cos\beta_\gamma t}+k_{l+2m+r+2r}\underline{t^{r-1}e^{\alpha_\gamma t}\sin\beta_\gamma t}
\end{aligned}\right\}\quad \text{重根がある場合のみ}$$

(15-4)

係数kは順に番号をつければよく，添字は気にしないでよい。重根がなければ解は簡単になる。重根があると，tのべき乗が順に掛けられた項が入ってくる。項は全部で根の数n個ある。複素共役根が純虚数 $\pm j\beta_1$ の場合には，上式で$\alpha_1=0$とおいて，$k_{l+1}\cos\beta_1 t+k_{l+2}\sin\beta_1 t$ の項が入る。これは，L, Cだけの回路で現れる。力学では単振動と呼ばれる解である。係数kは，$t=0$での**初期条件**(initial condition)により決定される。第3章，第4章は初期値を求めるとき役立つ。L, R, C, Mからなる電気回路の場合，抵抗があれば，過渡項は時間が経つと 0 となることが判っている（L, Cだけの回路では0にならない)。

定常項y_sの求め方

（イ）　$f(t)=E$(一定）　：**直流回路の場合**に相当する。(15-1)を満足する解を何か求めれば良いので，(15-1)で微分項を全て 0 とおいて求める。LCだけの回路でもそのようにしてよい。

$$y_s=\frac{E}{a_n} \tag{15-5}$$

（ロ）　$f(t)=E_m\sin(\omega t+\varphi)$　：**交流回路の場合**に相当する。**フェーザ**を用いた交流理論を使うのが簡単である。φ（ファイ）は**初期位相**で定数である。

$$\frac{d^k}{dt^k}\to(j\omega)^k \quad , \quad \frac{d}{dt}\to j\omega \quad , \quad y\to Y \quad , \quad E_m\sin(\omega t+\varphi)\to\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\varphi}$$

と置き換えると，(15-1)よりフェーザ表示した式が得られる。

$$(j\omega)^n Y+a_1(j\omega)^{n-1}Y+\cdots+a_{n-1}\,j\omega Y+a_n Y=\frac{E_m}{\sqrt{2}}\,e^{j\varphi}$$

$$\therefore Y=\frac{E_m e^{j\varphi}\big/\sqrt{2}}{a+jb} \tag{15-6}$$

ここで，$a+jb=(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,j\omega+a_n$　（実際に計算し整理する）

$$|Y|=\frac{E_m}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}},\quad \arg Y=\varphi-\theta \quad ,\quad \text{但し，}\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{15-7}$$

であるから，

$$y_s=\sqrt{2}\,\mathrm{I_m}(Y\,e^{j\omega t})=\sqrt{2}\,|Y|\sin(\omega t+\varphi-\theta) \tag{15-8}$$

＊ $f(t)=E_m\cos(\omega t+\varphi)$のとき，sin を cos に換え，最後の$\mathrm{I_m}$（虚部）を$\mathrm{R_e}$（実部）にするだけでよい。もちろん cos を sin に直して求めてもよい。

例題１　時間$t=0$でスイッチをオンするとき，i を求めよ。

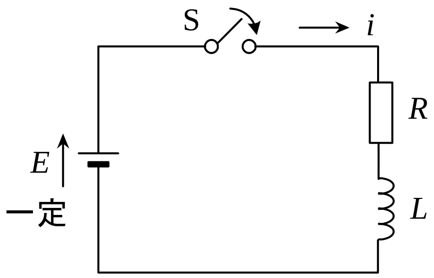


図 15-1　*RL* 直列回路

（解）微分方程式を立てると，

$$L\frac{d\,i}{d\,t}+R\,i=E \qquad ・・・・①$$

特性方程式

$$L\,p+R=0 \quad \therefore p=-\frac{R}{L}$$

よって，過渡項i_fは

$$i_f=k_1 e^{pt}=k_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常項i_sは，①で微分を 0 と置き

$$i_s=\frac{E}{R}$$

よって，求めるiは

$$i=i_f+i_s=k_1 e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E}{R} \qquad ・・・・②$$

$t=+0$で，$i=0$と考えられるから（注１）

$$0=k_1+\frac{E}{R} \quad \therefore k_1=-\frac{E}{R}$$

②に代入して(注２)

$$i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (15\text{-}9)$$

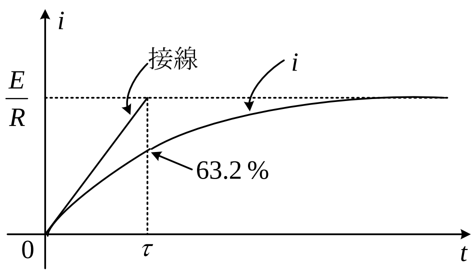


図 15-2　*RL* 回路の過渡応答

時間が十分経過すると，過渡項は 0 となり定常項のみになる。

(注 1)　スイッチを入れる直前を$t=-0$，スイッチを入れた直後を$t=+0$と書く。$i(-0)$はスイッチが切れているから 0 となるのは当然である。
一般に，コイルの電流は急に変化しないから，$i(+0)$も 0 となる。

(注 2)　-0も$+0$も値として代入するときは 0 である。$t=0$の値を代入して定数を決めることを，初期条件を入れるという。①は$t\geqq +0$の式だから$i(+0)$の値を入れる。

(注 3)　τ[s]（タウ）：**時定数**（じていすう）(time constant)とすると

$$\tau=\frac{L}{R} \qquad (15\text{-}10)$$

$e^{-\frac{t}{\tau}}$　に変形すればτが判る。

$t=\tau$のとき

$$e^{-\frac{t}{\tau}}=e^{-1}=\frac{1}{2.718}=0.368$$

$$1-0.368=0.632$$

だから，電流は最終値までの約 63.2%まで立ち上がる。また$t=0$の接線が最終値と交わる時間でもある。Lが大きいと時定数が大きいので，ゆっくり立ち上がる。(15-10)は覚えておこう。

例題２　図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンしたとき，流れる電流 i 及びコンデンサの電荷 q を求めよ。但し，スイッチを入れる前，コンデンサの電荷は q_0 であったとする。

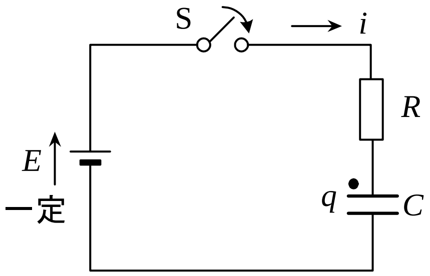


図 15-3　*RC* 直列回路

（解）微分方程式を立てると，

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \qquad \cdots\cdots ①$$

$$i=\frac{dq}{dt} \qquad \cdots\cdots ②$$

① を解く。特性方程式は

$$Rp+\frac{1}{C}=0 \quad \therefore p=-\frac{1}{RC}$$

よって，過渡項 q_f は

$$q_f=k_1e^{pt}=k_1e^{-\frac{t}{RC}}$$

定常項 q_s は,

$$q_s=CE$$

よって，求める q は,

$$q=q_f+q_s=k_1e^{-\frac{t}{RC}}+CE$$

$t=+0$ で，$q=q_0$ と考えられるから，(注１)

$$q_0=k_1+CE \quad \therefore k_1=q_0-CE$$

従って,

$$q=q_0e^{-\frac{t}{RC}}+CE(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

電流 i は,

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{RC}(CE-q_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

この場合，**時定数**は

$$\tau=RC \qquad (15\text{-}11)$$

である。図 15-4 で時定数経つと電荷は 63.2%増加し，電流は 63.2%減少している。(15-11)は覚えておこう。C が大きいと電荷や電圧はゆっくり立ち上がる。$i(-0)=0$ だが，$i(+0)=E/R$ で，電流は不連続に変化している。自然現象はいつも連続とは限らない。

(注 1)　題意より，$q(-0)=q_0$，である。一般に，コンデンサの電荷（または電圧）は急に変化しないので，$q(+0)=q_0$ と考えられる。
なお，①式は $t\geqq+0$ に対し成立するのであるから，$t=-0$ の初期値を代入することはできない。

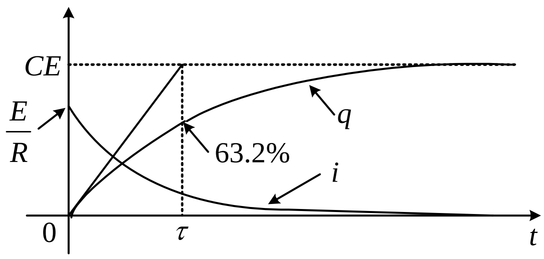
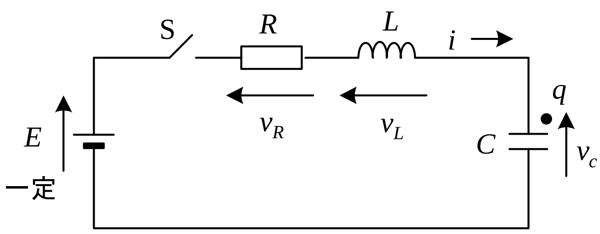


図 15-4　*RC* 直列回路の過渡応答
（$q_0=0$ のときの電荷と電流）

例題３　図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンしたとき，コンデンサの電荷と流れる電流を求めよ。但し，コンデンサの初期電荷は0とする。



（解）Sを入れた後，微分方程式を立てると

図 15-5　*RLC* 直列回路

$$v_R=Ri, v_L=L\frac{di}{dt}, v_C=\frac{q}{C}, i=\frac{dq}{dt}, E=v_R+v_L+v_C$$ より

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \qquad ・・・・①$$

定常項 q_s は，

$$q_s=CE \qquad ・・・・②$$

特性方程式は，

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}=0$$

根は L,R,C の大小により，３つの場合に分けられる。

（ｉ）$R^2-4\frac{L}{C}=0$　のとき，$p_1=p_2=-\frac{R}{2L}\equiv -a$ （重根）（≡は定義の意）

過渡項 q_f は，$q_f=k_1e^{-at}+k_2te^{-at}$

従って，一般解は

$$q=q_s+q_f=CE+k_1e^{-at}+k_2te^{-at}$$

$$i=\frac{dq}{dt}=-k_1ae^{-at}+k_2e^{-at}-k_2ate^{-at}$$

(注)　コイルの i とコンデンサの q は急に変化しない。

初期条件は，$t=+0$ で，$q=0$　，　$i=0$ と考えられるから，(注)

$$0=CE+k_1 \quad , \quad 0=-k_1a+k_2 \quad \therefore k_1=-CE \quad , \quad k_2=-aCE$$

従って，

$$q=CE-CE(1+at)e^{-at}$$

$$i=a^2CEte^{-at}$$

このときの過渡応答を図 15-6 に示す。

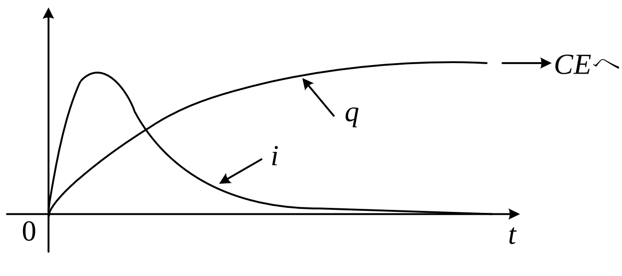


図 15-6　*RLC* 直列回路の過渡応答

（ⅱ）$R^2-4\frac{L}{C}>0$　のとき，$\left.\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}\right\}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}$　$\begin{pmatrix}+\text{のとき}p_1\\-\text{のとき}p_2\end{pmatrix}$

過渡項 q_f は，$q_f = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}$

従って，一般解は，

$$q = CE + k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} = p_1 k_1 e^{p_1 t} + p_2 k_2 e^{p_2 t}$$

初期条件は，$t = +0$ で，$q = 0$ ，$i = 0$ と考えられるから，

$$0 = CE + k_1 + k_2 \quad , \quad 0 = p_1 k_1 + p_2 k_2 \qquad \therefore k_1 = \frac{p_2 CE}{p_1 - p_2} \quad , \quad k_2 = -\frac{p_1 CE}{p_1 - p_2}$$

応答波形は図 15-6 と同様になる。

（iii） $R^2 - 4\dfrac{L}{C} < 0$ のとき，$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = -\dfrac{R}{2L} \pm j\dfrac{1}{2L}\sqrt{4\dfrac{L}{C} - R^2} \equiv -a \pm j\beta$

過渡項は，$q_f = k_1 e^{-at}\cos\beta t + k_2 e^{-at}\sin\beta t$

従って，一般解は，

$$q = CE + k_1 e^{-at}\cos\beta t + k_2 e^{-at}\sin\beta t$$

$$i = \frac{dq}{dt} = e^{-at}\left\{(\beta k_2 - a k_1)\cos\beta t - (\beta k_1 + a k_2)\sin\beta t\right\}$$

初期条件は，$t = +0$ で，$q = 0$ ，$i = 0$ と考えられるから，

$$0 = CE + k_1 \quad , \quad 0 = \beta k_2 - a k_1 \qquad \therefore k_1 = -CE \quad , \quad k_2 = \frac{a}{\beta}k_1 = -\frac{a}{\beta}CE$$

従って，$q = CE\left\{1 - e^{-at}(\cos\beta t + \dfrac{a}{\beta}\sin\beta t)\right\}$ ，$i = CEe^{-at}(\beta + \dfrac{a^2}{\beta})\sin\beta t$

このときの過渡応答を図 15-7 に示す。**減衰振動**しながら，q は CE へ，i は 0 へ最終的に落ち着く。

全ての場合，**特性方程式の根** p_1, p_2 **の実部が負（左半平面）**だからある値に収束している。 実部が正なら**発散（不安定）**する。しかし，回路では通常，実部は負である。LC だけの回路のときのみ実部は 0 となり，発散も減衰もしないで**持続振動**する。

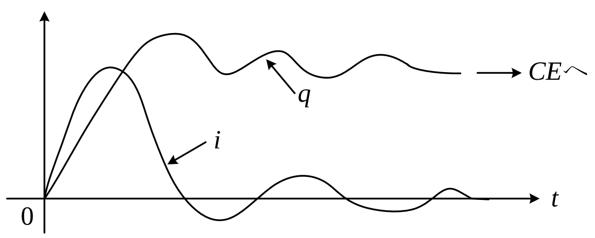
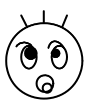


図 15-7　*RLC* 直列回路の過渡応答



こんな長い答案は書けないので試験には出ないと考える人は甘い！場合を指定したり，数値を与えると $1/3$ の長さになり，手ごろな問題となるのだ。

例題４　図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンしたとき，流れる電流 i 及びコンデンサの電荷 q，電圧 v_C を求めよ。但し，スイッチを入れる前，コンデンサの電荷は 0 であったとする。

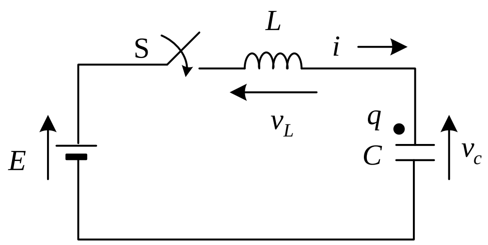


図 15-8　LC 直列回路

（解）S を入れた後，微分方程式を立てると

$$v_L = L\frac{di}{dt}, v_C = \frac{q}{C},\ i = \frac{dq}{dt}, E = v_L + v_C \qquad \text{より}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \qquad ・・・・①$$

定常項 q_s は，

$$q_s = CE \qquad ・・・・②$$

特性方程式は，

$$Lp^2 + \frac{1}{C} = 0 \qquad \therefore \left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \pm j\beta$$

過渡項は，　$q_f = k_1 \cos\beta t + k_2 \sin\beta t$

従って，一般解は，

$$q = CE + k_1 \cos\beta t + k_2 \sin\beta t$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\beta k_1 \sin\beta t + \beta k_2 \cos\beta t$$

初期条件は，コンデンサの電荷とコイルの電流は急変しないので，$t = +0$ で，$q = 0$　，　$i = 0$ と考えられるから，

$$0 = CE + k_1 \quad , \quad 0 = \beta k_2 \qquad \therefore k_1 = -CE \quad , \quad k_2 = 0$$

従って，$q = CE(1-\cos\beta t)$　，　$i = CE\beta \sin\beta t$，　$v_c = E(1-\cos\beta t)$

ただし，$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

図 15-9 のように**持続振動**する。これは，力学の**単振動**と同じ現象である。ばねにおもりをつるすと空気抵抗がなければずっと振動する。微分方程式が同じ形をしている。

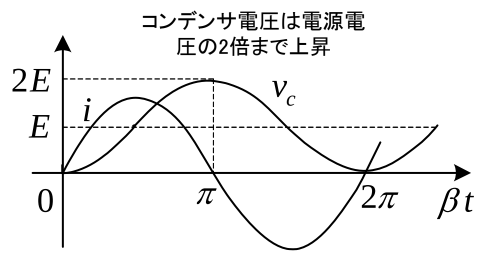
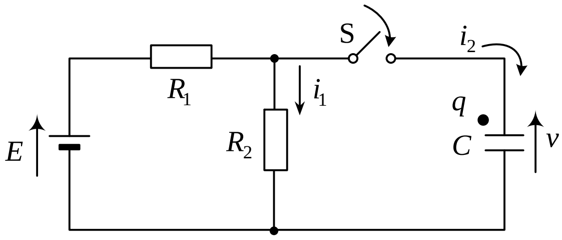


図 15-9　LC 直列回路の過渡応答

例題 5　図の回路において, スイッチ S を $t=0$ で閉じる。S を閉じる前, C の電荷は q_0 であった。コンデンサに流れる電流を求めよ。



（解）S を閉じた後，i_1, i_2, v, q を図のように定義する。成立する式は,

$$E = R_1(i_1 + i_2) + v \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

$$v = R_2 i_1 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ② \qquad q = Cv \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ③ \qquad i_2 = \frac{dq}{dt} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ④$$

変数 q だけの式にするため，i_1, i_2, v を消去して,

$$E = R_1\left(\frac{q}{R_2 C} + \frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) q$$

特性方程式

$$R_1 p + \frac{R_1 + R_2}{CR_2} = 0 \quad , \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}$$

定常解 $q(\infty)$ は,

$$q(\infty) = \frac{CER_2}{R_1 + R_2}$$

よって，$q = q(\infty) + ke^{-\frac{t}{\tau}}$　但し，$\tau = \dfrac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$：**時定数**

$t = +0$ で，$q = q_0$ と考えられるから,

$$q = q(\infty) + k \qquad \therefore k = q_0 - q(\infty)$$

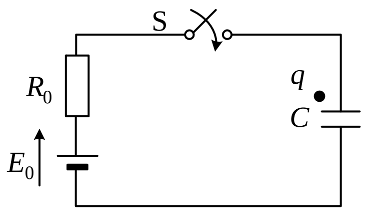
$$\therefore q = q(\infty) + (q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

④より,

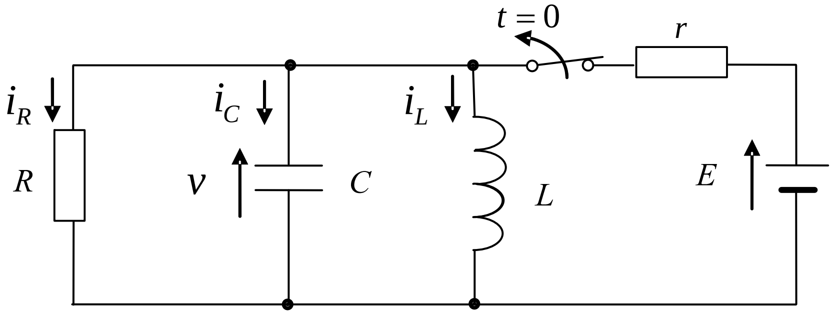
$$i_2 = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}(q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

◎　スイッチから左側の回路は**テブナンの定理**により直流電源と抵抗の直列回路に変形できるので，以下の問題と同じになる。時定数は $\tau = R_0 C$，$q(\infty) = CE_0$ とすぐ判る。

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad E_0 = \frac{E\,R_2}{R_1 + R_2}$$



例題 6　図の回路は $t<0$ において定常状態にある。$t=0$ でスイッチを開く。$t>0$ においてコイルの電流 $i_L(t)$ を求めよ。但し，$E=10\,\mathrm{V}$，$r=5\,\Omega$，$R=2\,\Omega$，$L=3\,\mathrm{H}$，$C=1/6\,\mathrm{F}$ とする。



（解）　$t>0$ において，次式が成り立つ。

$$v = R\,i_R = L\frac{di_L}{dt} \qquad ①$$

$$i_R + i_C + i_L = 0 \qquad ②$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt} \qquad ③$$

①～③ 式より，電流 $i_L(t)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \qquad ④$$

数値を代入して

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \qquad ⑤$$

である。この式の特性方程式

$$p^2 + 3p + 2 = 0 \qquad ⑥$$

の根が $p=-1,-2$ であるので，電流 $i_L(t)$ は次式で与えられる。

$$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \qquad \text{（k_1, k_2 は未知定数）} \qquad ⑦$$

$$\frac{d\,i_L}{d\,t} = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} \qquad ⑧$$

コイルに流れる電流は急には変化せず，$t<0$ でコイルは短絡状態にあるから

$$i_L(0) = E/r = 2\mathrm{A} \qquad ⑨$$

を得る。一方，コンデンサの電圧は急には変化せず，$t<0$ で 0 だから

$$v(0) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \therefore \quad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad ⑩$$

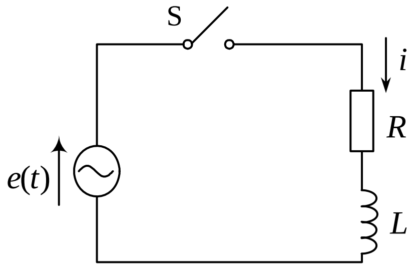
⑦，⑧式に，⑨，⑩式を適用して，$k_1=4,\ k_2=-2$ だから

$$i_L(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}\ [\mathrm{A}] \qquad ⑪$$

＊　電源が接続されていない回路では，時間が十分たつと抵抗でエネルギーが消費されて，電圧や電流は 0 となる。

例題 7　図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンするとき，流れる電流を求めよ。

ここで，$e(t)=E_m\sin(\omega t+\varphi)$



（解）成立する微分方程式は，

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E_m\sin(\omega t+\varphi) \qquad ①$$

定常解はフェーザを使って求める。①をフェーザ表示すると，

$$j\omega LI+RI=\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\varphi}$$

$$\therefore I=\frac{(E_m/\sqrt{2})e^{j\varphi}}{R+j\omega L}=\frac{E_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2+(\omega L)^2}e^{j\theta}}=\frac{E_m e^{j(\varphi-\theta)}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \qquad \text{但し，} \tan\theta=\frac{\omega L}{R} \qquad ②$$

②を瞬時値表示にもどして i_s は，

$$i_s=\sqrt{2}\,\mathrm{I_m}(Ie^{j\omega t})=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi-\theta)$$

過渡項を求める。特性方程式は，

$$Lp+R=0 \qquad \therefore p=-\frac{R}{L} \qquad \text{よって，} \quad i_f=ke^{pt}=ke^{-\frac{R}{L}t}$$

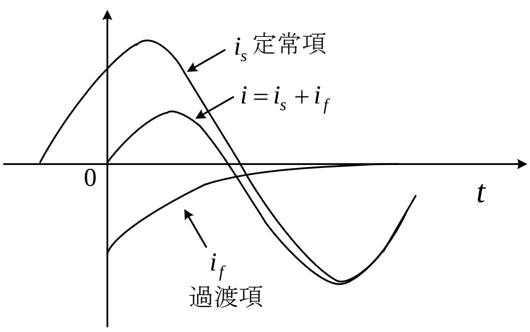
求める一般解は，

$$i=i_s+i_f=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi-\theta)+ke^{-\frac{R}{L}t} \qquad ③$$

初期条件は，コイルの電流は急に変化しないので　$t=+0$ で $i=0$ として，

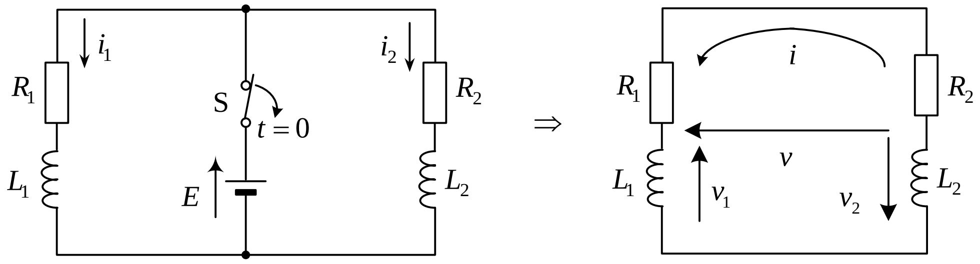
$$0=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\varphi-\theta)+k \qquad \therefore k=-\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\varphi-\theta)$$

③に代入して，$i=\dfrac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\left\{\sin(\omega t+\varphi-\theta)-e^{-\frac{R}{L}t}\sin(\varphi-\theta)\right\}$



過渡項の求め方は，直流でも交流でも同じです。定常項は，交流の場合フェーザを用いればよい。時間が十分経過すると過渡項は 0 となり，定常項のみとなる。だから，過渡項とか定常項という名前で呼ばれている。

例題８　定常状態にある図の回路で，$t=0$ でスイッチをオフする時，流れる電流を求めよ。



（解）スイッチを開く直前を $t=-0$，直後を $+0$ と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから，

$$i_1^{-0}=\frac{E}{R_1}\quad ,\quad i_2^{-0}=\frac{E}{R_2}$$

鎖交磁束不変の理より，

$$(L_1+L_2)i^{+0}=L_1 i_1^{-0}-L_2 i_2^{-0}$$

$$\therefore i^{+0}=\frac{(L_1/R_1-L_2/R_2)E}{L_1+L_2}$$

$t\geq+0$ において，

$$(L_1+L_2)\frac{di}{dt}+(R_1+R_2)i=0$$

$$\therefore i=k\,e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}$$

初期条件 $t=+0$ で，$i=i^{+0}$　　$\therefore k=i^{+0}$

よって，$i=\dfrac{(L_1/R_1-L_2/R_2)E}{L_1+L_2}\cdot e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}$

鎖交磁束の和の求め方

$t\geq+0$ のとき（S を切った後）

$$v=v_1+v_2=\frac{d}{dt}(L_1 i+L_2 i)\qquad ①$$

$t\leq-0$ のとき（S を切る前）

$$v=v_1+v_2=\frac{d}{dt}(L_1 i_1-L_2 i_2)\qquad ②$$

①と②で鎖交磁束の部分を等しいとおく。

これまでコイルの電流は急に変化しないと考えてきたが，この回路ではそれが成立しない。特殊な例である。スイッチを切ったとき火花が発生する。

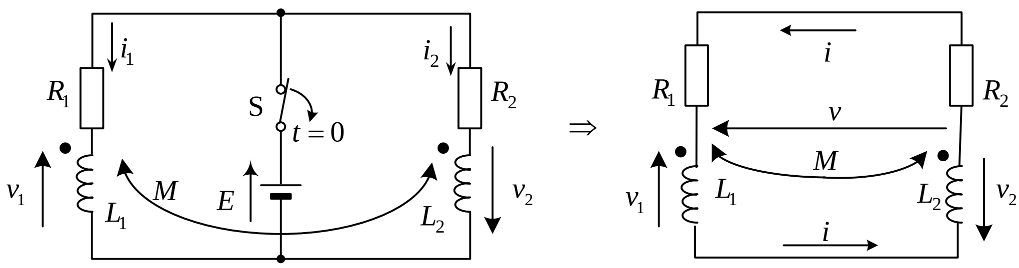
鎖交磁束不変の理（り）

スイッチを入れたり切ったりした後（$t=+0$）の閉回路で，キルヒホッフの第２法則より電圧方程式を立てる。このとき，コイルだけをまとめた電圧の和 v は，$t=-0$ と $t=+0$ の間に無限大にならない（コイル単体では無限大となることがあっても）。

$$v=\frac{d}{dt}(\text{鎖交磁束の和})$$

であるから，$t=-0$ と $t=+0$ の間で鎖交磁束の和は変化しない。なお，電圧や電流の矢印は好きによいが，マイナスが付くかどうかは電圧 v と電流の矢印の選び方による。

例題 9　定常状態にある図の回路で，$t=0$ でスイッチをオフする時，流れる電流を求めよ。なお，L_1, L_2 間の相互インダクタンスは M とする。



（解）スイッチを開く直前を $t=-0$，直後を +0 と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから，

$$i_1^{-0}=\frac{E}{R_1}\quad,\quad i_2^{-0}=\frac{E}{R_2} \qquad ①$$

$t\geq +0$ のとき（S を切った後）（符号は弟 9 章例題 6 参照）

$$v=v_1+v_2=L_1\frac{di}{dt}-M\frac{di}{dt}+(L_2\frac{di}{dt}-M\frac{di}{dt})=\frac{d}{dt}(L_1 i+L_2 i-2M\,i) \qquad ②$$

$t\leq -0$ のとき（S を切る前）

$$v_1+v_2=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}+(-L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt})=\frac{d}{dt}(L_1 i_1+Mi_2-L_2 i_2-Mi_1) \qquad ③$$

鎖交磁束不変の理を②，③に適用して

$$L_1 i^{+0}+L_2 i^{+0}-2Mi^{+0}=L_1 i_1^{-0}+Mi_2^{-0}-L_2 i_2^{-0}-Mi_1^{-0}$$

よって，

$$i^{+0}=\frac{E}{L_1+L_2-2M}(\frac{L_1-M}{R_1}-\frac{L_2-M}{R_2}) \qquad ④$$

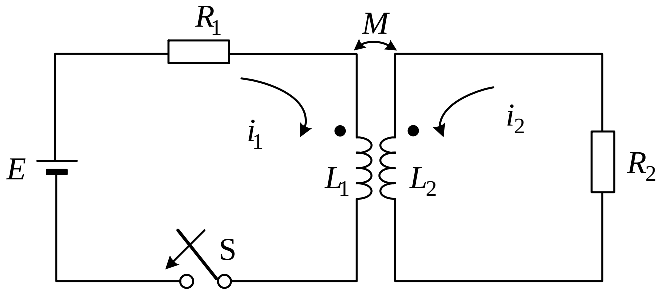
$t\geq +0$ のとき，回路の微分方程式は次式で与えられる。

$$(L_1+L_2-2M)\frac{di}{dt}+(R_1+R_2)i=0 \qquad ⑤$$

④の初期条件で⑤を解いて，

$$i=\frac{E}{L_1+L_2-2M}(\frac{L_1-M}{R_1}-\frac{L_2-M}{R_2})e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2-2M}t}$$

例題 10　図の回路で$t=0$でスイッチを入れるとき，電流i_1を求めよ。スイッチを入れる前$i_2=0$とする。また，$L_1L_2-M^2>0$とする。



(解)　スイッチを入れた後，以下の微分方程式が成り立つ。

$$E=R_1i_1+L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt} \qquad ① \qquad\qquad 0=R_2i_2+L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt} \qquad ②$$

i_1だけの式にするため，まず①よりdi_2/dtを求め②に代入して次式が得られる。

$$i_2=-\frac{L_2}{R_2M}E+\frac{L_2R_1}{R_2M}i_1+\frac{L_1L_2}{R_2M}\frac{di_1}{dt}-\frac{M}{R_2}\frac{di_1}{dt} \qquad ③$$

③を①に代入して，以下のi_1だけの微分方程式が得られる。

$$\Delta\frac{d^2i_1}{dt^2}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{di_1}{dt}+R_1R_2i_1=R_2E \quad \text{ただし，}\ \Delta=L_1L_2-M^2 \qquad ④$$

特性方程式は，

$$\Delta p^2+(L_1R_2+L_2R_1)p+R_1R_2=0 \qquad ⑤$$

⑤の根は実数で，次式で与えられる。

$$p_1,p_2=\frac{-(L_1R_2+L_2R_1)\pm\sqrt{(L_1R_2-L_2R_1)^2+4R_1R_2M^2}}{2\Delta} \qquad p_1\ \text{は＋，}\ p_2\ \text{は－に対応する。}$$

④式の一般解は，次式で与えられる。

$$i_1=\frac{E}{R_1}+Ae^{p_1t}+Be^{p_2t} \qquad ⑥ \qquad \text{故に，}\ \frac{di_1}{dt}=Ap_1e^{p_1t}+Bp_2e^{p_2t} \qquad ⑦$$

スイッチを入れた直後，①，②それぞれの鎖交磁束の和が変化せず 0 となるから

$$L_1i_1(+0)+Mi_2(+0)=0,\ L_2i_2(+0)+Mi_1(+0)=0 \qquad ⑧$$

$\Delta\neq 0$ なので　$i_1(+0)=i_2(+0)=0$　⑨

⑥式に代入して，次式を得る。$0=\frac{E}{R_1}+A+B$　⑩

$t=+0$で，③，⑨式より，次式を得る。

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=+0}=\frac{L_2}{\Delta}E$$

上式に⑨を代入して，

$$Ap_1+Bp_2=\frac{L_2}{\Delta}E \qquad ⑪$$

⑩，⑪より，A,Bは以下のように求まる。

$$A=\frac{E}{p_1-p_2}\left(\frac{L_2}{\Delta}+\frac{p_2}{R_1}\right),\quad B=\frac{E}{p_2-p_1}\left(\frac{L_2}{\Delta}+\frac{p_1}{R_1}\right)$$

$\Delta=0$ の場合

$$i_2=-\frac{L_2}{R_2M}E+\frac{L_2R_1}{R_2M}i_1 \qquad ③'$$

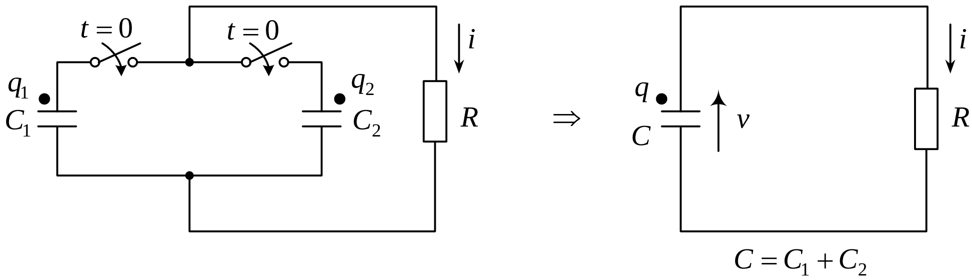
$$(L_1R_2+L_2R_1)\frac{di_1}{dt}+R_1R_2i_1=R_2E \qquad ④'$$

$$i_1=\frac{E}{R_1}+Ae^{pt} \qquad p=-\frac{R_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}$$

③'より $i_2=\frac{L_2R_1}{R_2M}Ae^{pt}$

⑧より $A=-\frac{L_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}\frac{E}{R_1}$

例題 11　図の回路で，$t=0$ で両方のスイッチをオンしたとき，抵抗に流れる電流を求めよ。スイッチをオンする直前 $t=-0$ のコンデンサの初期電荷を $q_1(-0)=q_1^{-0}$，$q_2(-0)=q_2^{-0}$ とする。



（解）スイッチを閉じた後，C_1 と C_2 は 1 つにまとめて考える。

スイッチを閉じた直後の q の初期電荷を q^{+0} とすると，

電荷量不変の理より，

$$q_1^{-0}+q_2^{-0}=q^{+0} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

微分方程式を立てると $(t \ge +0)$，

$$v=Ri=\frac{q}{C} \quad , \quad i=-\frac{dq}{dt}$$

$$\therefore R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

よって，$q=k_1 e^{-\frac{t}{RC}}$

初期条件①を代入して，$q^{+0}=k_1$

よって，$q=(q_1^{-0}+q_2^{-0})\,e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}$

$$\therefore i=-\frac{dq}{dt}=\frac{q_1^{-0}+q_2^{-0}}{R(C_1+C_2)}e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}$$

スイッチを閉じた瞬間に、C_1 と C_2 の電圧は等しくなり、C_1 に q_1^{-0} 、C_2 に q_2^{-0} を保つことができない。各電荷は急に変化し，電荷の再配分が起こる。電荷が急変する特殊な例である。

（注） 1 つにまとめないで考えたらどうなるか。

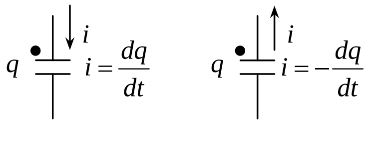
$$q_1^{+0}+q_2^{+0}=q_1^{-0}+q_2^{-0}$$

$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2}=Ri\,(=v)$$

$$i=-\frac{dq_1}{dt}-\frac{dq_2}{dt}$$

q_1 だけの式を作り解け。
同じ i を得る。

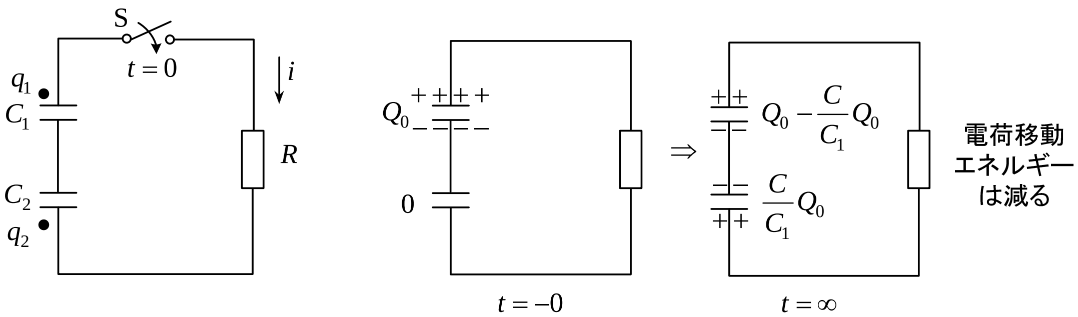
《注》



電荷量不変の理

スイッチをオンすることでコンデンサだけが並列に接続されるとき，それらは 1 つにまとめられ，コンデンサの電荷の総量は急に変化しない。この結果，1 つにまとめられたコンデンサに接続される外部回路に流れる電流は無限大とならない。

例題 12　図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンするとき，抵抗 R で消費されるエネルギーを求めよ。但し，コンデンサ C_1,C_2 のスイッチをオンする直前の電荷をそれぞれ $Q_0,0$ とする。



（解）図のように極板の電荷を定義すると成立する式は,

$$i=-\frac{dq_1}{dt}=\frac{dq_2}{dt} \quad \cdots\cdots ① \qquad \frac{q_1}{C_1}=Ri+\frac{q_2}{C_2} \quad \cdots\cdots ②$$

電荷は保存されるから

$$q_1+q_2=Q_0 \quad \cdots\cdots ③$$

q_2 だけの微分方程式を作るため，①を②に代入して i を消去し，更に③を代入して q_1 を消去すると,

$$\frac{Q_0-q_2}{C_1}=\frac{q_2}{C_2}+R\frac{dq_2}{dt} \qquad \therefore R\frac{dq_2}{dt}+(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})q_2=\frac{Q_0}{C_1}$$

ここで，$C=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ とおくと，$R\dfrac{dq_2}{dt}+\dfrac{q_2}{C}=\dfrac{Q_0}{C_1}$ $\cdots\cdots ④$

④式を定常項と過渡項に分けて解くと,

$$q_2=\frac{C}{C_1}Q_0+ke^{-\frac{t}{RC}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$q_2(+0)=0$ より，$k=-\dfrac{C}{C_1}Q_0$

よって，$q_2=\dfrac{C}{C_1}Q_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ $\qquad \therefore i=\dfrac{dq_2}{dt}=\dfrac{Q_0}{RC_1}e^{-\frac{t}{RC}}$

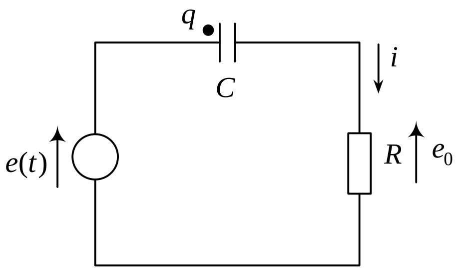
$t=0$ から ∞ までに抵抗で消費されるエネルギー W は,

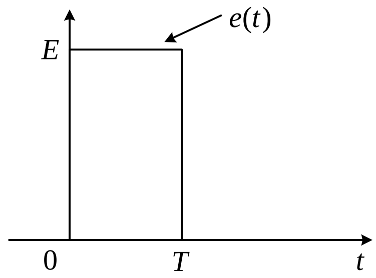
$$W=\int_0^\infty Ri^2dt=\frac{{Q_0}^2}{R{C_1}^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2}{RC}t}dt$$

$$=-\frac{C}{2}(\frac{Q_0}{C_1})^2\left[e^{-\frac{2}{RC}t}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{C}{2}(\frac{Q_0}{C_1})^2$$

例題 13　図の RC 微分回路に，図のようなパルス電圧を加えた。出力電圧 e_0 を求めよ。但し，コンデンサの $t=0$ での電荷は 0 とする。





（解）成立する微分方程式は，

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \quad (\,0<t<T\,) \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \quad (\,T<t\,) \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

① を解くと，　$q=CE+ke^{-\frac{t}{RC}}$

$t=0$ で $q=0$ だから，$k=-CE$

$$\therefore q=CE(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ③$$

よって，$e_0=Ri=R\dfrac{dq}{dt}=Ee^{-\frac{t}{RC}}$　$(\,0<t<T\,)$　・・・・④

②を解くと，$q=k'e^{-\frac{t}{RC}}$　・・・・⑤

$t=T$ で，電荷は急に変化しないので③より

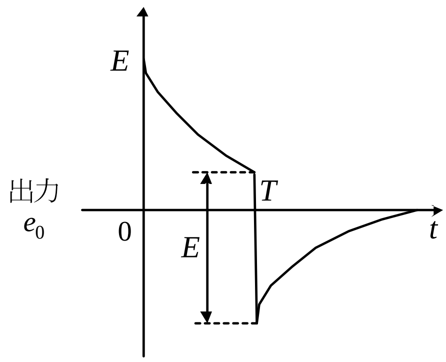
$q=CE(1-e^{-\frac{T}{RC}})$ であるから，⑤式に代入して

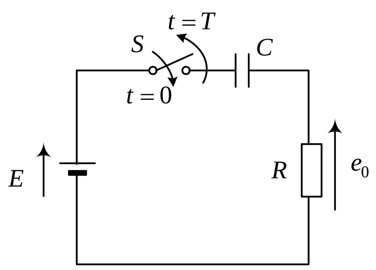
$$CE(1-e^{-\frac{T}{RC}})=k'e^{-\frac{T}{RC}} \quad \therefore k'=CE(e^{\frac{T}{RC}}-1)$$

⑤より，

$$q=CE(e^{-\frac{t-T}{RC}}-e^{-\frac{t}{RC}})$$

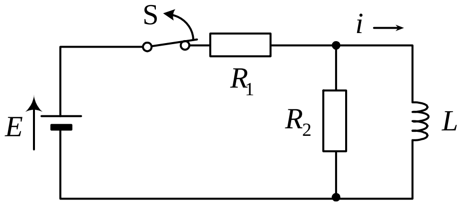
$$e_0=R\frac{dq}{dt}=Ee^{-\frac{t}{RC}}-Ee^{-\frac{t-T}{RC}} \qquad (\,T<t\,)$$





この問題は，左図の回路で，$t=0$ でスイッチをオンし，$t=T$ でスイッチを切った場合の e_0 を求める問題とは異なる。オンしている時は同じだが，オフしている時，例題は $E=0$ の短絡状態に対し，この場合は開放で電流は流れない。

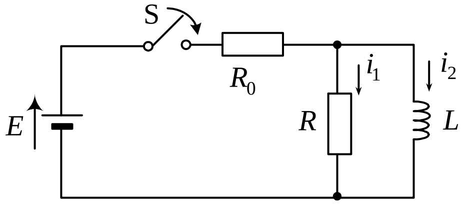
問題１．定常状態にある回路のスイッチ S を $t=0$ で開いたとき，抵抗 R_2 に流れる電流及び $t \geq 0$ の期間に消費される電力量を求めよ。



（答）

$$i = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t} \quad , \quad W = \frac{1}{2} L\left(\frac{E}{R_1}\right)^2$$

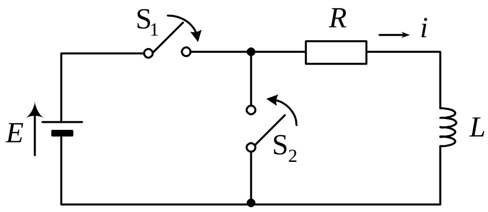
問題２．定常状態にある図の回路のスイッチを $t=0$ で閉じた。抵抗 R とインダクタンス L を流れる電流 i_1 , i_2 を求めよ。

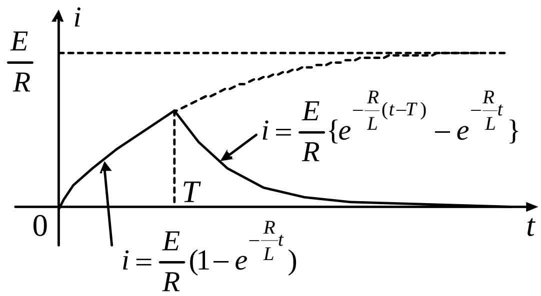


（答）$i_1 = \dfrac{E}{R_0+R} e^{-\frac{R_0 R}{(R_0+R)L}t}$

$$i_2 = \frac{E}{R_0}\{1 - e^{-\frac{R_0 R}{(R_0+R)L}t}\}$$

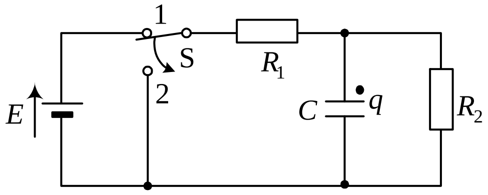
問題３．図の回路で，$t=0$ でスイッチ S_1 を閉じ，ついで $t=T$ のときスイッチ S_2 を閉じると同時にスイッチ S_1 を開くものとする。この時に流れる電流を求め図示せよ。





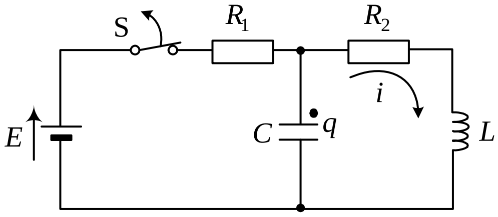
（答）

問題４．図の回路で最初スイッチ S を１の端子に接続し，十分時間が経過してから $t=0$ でスイッチを２の端子に切り替えた。$t \geqq 0$ における電荷 $q(t)$ を求めよ。



（答）$q = \dfrac{CR_2E}{R_1+R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}$

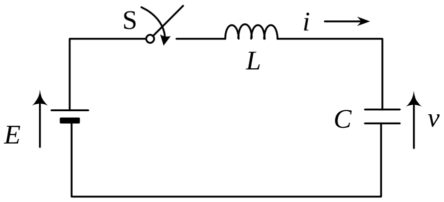
問題５．図の回路でスイッチを閉じ，十分時間が経過してから $t=0$ でスイッチを開いた。$t \geqq 0$ における電荷 $q(t)$ を求めよ。ただし，$E = 10\text{V}, R_1 = 2\Omega, R_2 = 2\Omega, C = 0.1\text{F}, L = 1\text{H}$



（答）$q = e^{-t}\left(\dfrac{1}{2}\cos 3t - \dfrac{2}{3}\sin 3t\right)$

（注）$i = -\dfrac{dq}{dt}$ 　　$q(0) = 0.5$ 　　$i(0) = 2.5$

問題６． $t=0$ でスイッチ S をオンするとき，電流 i とコンデンサ電圧 v を求めよ。S をオンする前のコンデンサの初期電圧は v_0 とする。（L C共振：抵抗がないといつまでも振動が続く）

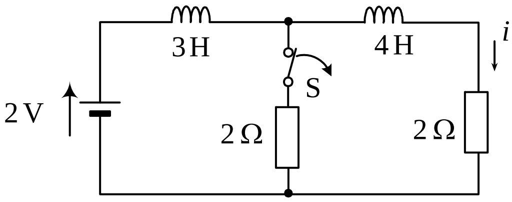


（答） $LC\dfrac{d^2v}{dt^2}+v=E,\ i=C\dfrac{dv}{dt}$

$$v=E+k_1\cos\omega_0 t+k_2\sin\omega_0 t$$
$$v=E+(v_0-E)\cos\omega_0 t\ ,\quad i=\omega_0 C(E-v_0)\sin\omega_0 t$$

$\omega_0=1/\sqrt{LC}$ ：共振角周波数

問題７． 定常状態にある図の回路で， $t=0$ でスイッチを開いた。$t\geqq 0$ における $i(t)$ を求めよ。



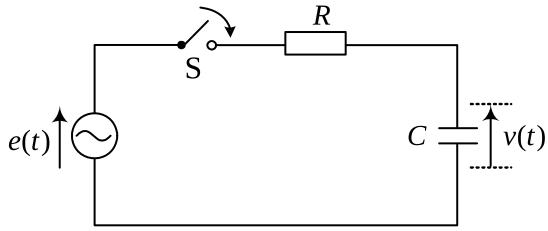
（答） $i=\dfrac{3}{7}e^{-\frac{2t}{7}}+1$

鎖交磁束不変の理より $i(0)=\dfrac{10}{7}$

問題 8. コンデンサの初期電荷を０とし， $t=0$ でスイッチを閉じた。$t\geqq 0$ における $v(t)$ を求めよ。ただし，

$e(t)=E_m\sin(\omega t+\varphi)$

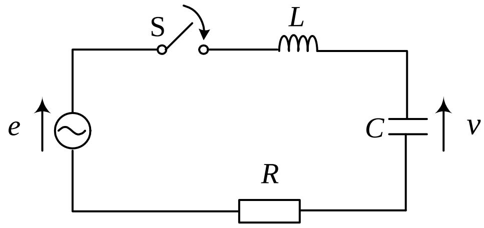
とする。



（答） $v(t)=\dfrac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\sin(\omega t+\varphi-\theta)-e^{-\frac{t}{RC}}\sin(\varphi-\theta)\right\}$ ただし， $\theta=\tan^{-1}(\omega CR)$

問題 9. コンデンサの初期電荷を０とし，$t=0$ でスイッチを閉じた。$t\geqq 0$ における $v(t)$ を求めよ。ただし，$e(t)=E_m\sin(\omega t+\varphi)$ とする。

なお， $R^2-4\dfrac{L}{C}<0$ とする。



（答） $v(t)=V_m\sin(\omega t+\varphi-\theta)-V_m\sin(\varphi-\theta)e^{-\alpha t}\cos\beta t$

$$-V_m(\frac{\alpha}{\beta}\sin(\varphi-\theta)+\frac{\omega}{\beta}\cos(\varphi-\theta))e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

ただし，$V_m=\dfrac{E_m}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$, $\alpha=-\dfrac{R}{2L}$, $\beta=\dfrac{1}{2L}\sqrt{4\dfrac{L}{C}-R^2}$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{R}{\frac{1}{\omega C}-\omega L}$