



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10069/38873">http://hdl.handle.net/10069/38873</a>
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-18T20:37:48Z

# 第1章 ベクトルの演算と意味

この章では、電磁気を学ぶときに必要となる数学をまとめて示しておく。一般にはベクトル解析と呼ばれる分野の公式である。高校までの微分と積分の知識で理解できるように書いたつもりで、最初から順に読んでいけば見かけほどは難しくない。電磁気学を考えるときには、常にスカラー場やベクトル場を思っていないといけない。

## スカラー場とベクトル場

まず、スカラー場とベクトル場について話そう。空気中の温度の分布は、場所によって値(負になることもある)が異なり、スカラー場の一例である。風速は場所(高さも含め)によって大きさが異なると同時に、その向きも違うのでベクトル場の一例である。このように、空間の至る所にスカラー量(1つの実数値)、ベクトル量(3つの実数値)が各点ごとに値を持って分布しているとき、それぞれスカラー場(scalar field)、ベクトル場(vector field)という。電磁気学で学ぶ電界や磁界は、大きさだけでなく向きをもつので、ベクトル場を作る。

3次元空間を直角座標系で考えると、座標 $(x, y, z)$ の点Pに存在するベクトル量は、図1-1に示すように

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \\ &= (A_x, A_y, A_z) \end{aligned} \tag{1-1}$$

と表すことができる。 $A_x, A_y, A_z$ の目盛(単位)と $x, y, z$ の目盛(単位 m)は違う。ここで、 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ はそれぞれ $x, y, z$ の増える向きの**単位ベクトル**(大きさ1)である。 $A_x, A_y, A_z$ はそれぞれ実数で負になることもある。ベクトル $\mathbf{A}$ の**大きさ**を次式で表す。

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1-2}$$

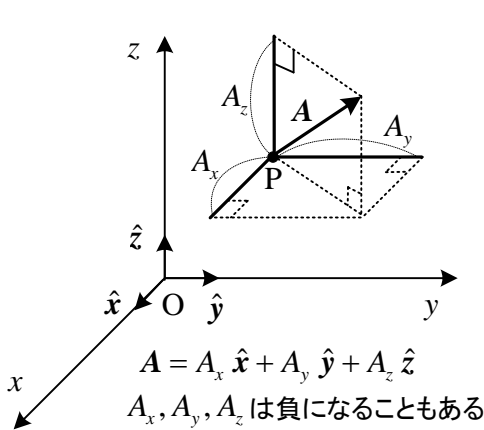


図 1-1 点 P(x, y, z) にある  
ベクトル量の表現

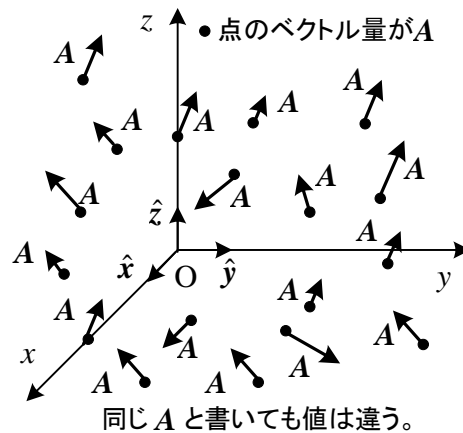


図 1-2 ベクトル場 (3次元空間)  
電磁気ではこの図をいつもイメージしよう!

ベクトル  $\mathbf{A}$  について、以下のことを知っておこう。

① ベクトルは大きさと向きで決まるから、(1-1)のように3つの成分で表すことができる。各成分はスカラー量であり、正負がある。1つのベクトル量は3つのスカラー量からなる。

② ベクトル  $\mathbf{A}$  は、電磁気の場合、P点の座標  $(x, y, z)$  と時間  $t$  の関数になり

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z, t)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z, t)\hat{\mathbf{z}} \quad (1-3)$$

と書くことがある。つまり、場所によって、また時間によって値が違ふ。

また、P点の位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  を用いて

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{x}} + A_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{y}} + A_z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{z}} \quad (1-4)$$

と書くこともある。簡単のため、あるいは注目しない  $\mathbf{r}$  や  $t$  を省くこともある。

③  $\mathbf{A}$  は空間に分布してベクトル場を作るが、大きさ  $|\mathbf{A}|$  や成分  $A_x$  などは1つの量なのでスカラー場を作る。

④  $\mathbf{A}$  のベクトル場を視覚的に表現する方法として、図 1-2 の様に3次元空間に適当に間引いて矢印を書く方法と、図 1-3 の様に**力線**を描く方法がある。矢印を書く方法で、 $\mathbf{A}$  は場所と時間によって値が異なるが、区別して書くのは面倒だから、普通は同じ記号で  $\mathbf{A}$  と書いている。ベクトル場の矢印は実際の向きを表す。回路で電圧や電流（いずれもスカラー量）に付ける矢印は測定の向きを示し、意味が違ふ。図 1-2 はイメージを得るためのもので、正式に書くなら、ある断面の2次元平面で格子点ごとに矢印を書く。

**力線**については、以下に述べる。

(1) 力線の接線方向が  $\mathbf{A}$  の方向で、曲線につけた矢印で  $\mathbf{A}$  の向きを表す。ベクトル場は3次元なので力線も3次元空間に書くべきであるが、複雑になるから、ある断面を考えて2次元で表示するのが一般的である。

(2) 力線の密度（混み具合）で  $\mathbf{A}$  の大きさを表す。

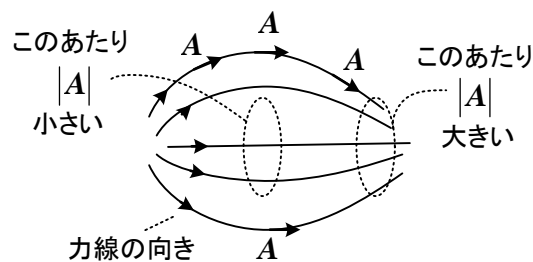


図 1-3 力線によるベクトル場  $\mathbf{A}$  の表現例

### 基本的なベクトル演算の定義及び定理

必要に応じて、以下のベクトルを用いる。電磁気の場合は場所の関数だから動かさない。

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

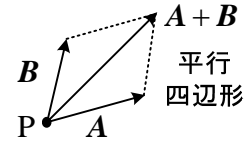
$$\mathbf{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}$$

(1) 加法, 減法, スカラとベクトルの乗法

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} \equiv (A_x \pm B_x) \hat{x} + (A_y \pm B_y) \hat{y} + (A_z \pm B_z) \hat{z} \quad (1-5)$$

$$a\mathbf{A} \equiv aA_x \hat{x} + aA_y \hat{y} + aA_z \hat{z} \quad (1-6)$$

ただし,  $a$  はスカラ。≡は定義を表す。

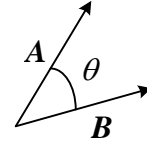


電磁気の場合, 通常同じ点 P でのベクトルを加えないと意味がない。

(2) 内積またはスカラ積 (scalar product)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\equiv |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1-7)$$

ただし,  $\theta$  は  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  のなす角である。



もちろん  $\theta$  は  $\pi/2$  以上でも構わない。このとき内積は負となる。  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  が直交する必要十分条件は,  $\theta = \pi/2$  だから

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-8)$$

である。内積には以下の性質がある。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \quad (1-9)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-10)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-11)$$

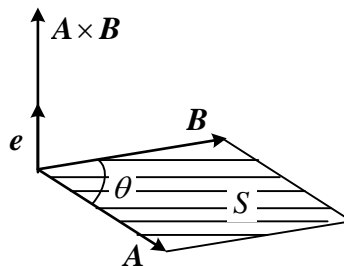
$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) \quad (1-12)$$

(3) 外積またはベクトル積 (vector product)

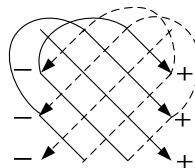
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &\equiv (|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta) \mathbf{e} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \end{aligned} \quad (1-13)$$

ただし,  $\theta$  は  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  のなす角で  $0 \leq \theta \leq \pi$  とする。また,  $\mathbf{e}$  は,  $\mathbf{A}$  を回転させて  $\mathbf{B}$  に重ねるとき, 右ねじの進む向きをもつ単位ベクトルである。

$|\mathbf{e}| = 1$   
 $\mathbf{e}$  は面  $S$  に垂直



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-14)$$



と書くこともある。2つのベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の作る平行四辺形の面積  $S$  は, 絶対値をとって

$$S = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1-15)$$

である。また、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が平行であるための必要十分条件は  $\theta = 0$  だから

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

となる。外積については以下の性質がある。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1-16)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-17)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-18)$$

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) \quad (1-19)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{左へ移動可能}) \quad (1-20)$$

#### (4) スカラとベクトルの偏微分

ベクトル  $\mathbf{A}$  は、電磁気の場合、座標  $(x, y, z)$  と時間  $t$  の関数で、(1-3),(1-4)に示した。このとき、ベクトル  $\mathbf{A}$  の偏微分は、各成分の偏微分として定義される。例えば、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{z} \quad (1-21)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z} \quad (1-22)$$

スカラの偏微分は、例えば次式のように定義されている。 $\Delta$  (デルタ) は微小変動を表す。

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_x(x + \Delta x, y, z, t) - A_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (1-23)$$

つまり、偏微分する変数以外は一定値と考えて微分すればよい。 2階偏微分については

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \quad (1-24)$$

と考えればよい。

$$\text{例 } A_x = x^2 y z + 1 \quad \text{なら, } \frac{\partial A_x}{\partial x} = 2xyz, \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 2yz$$

スカラ場として、空気中の温度分布  $f(x, y, z, t)$  がある。偏微分は微分する変数の向きの変化の割合を示すから、例えば  $\partial f / \partial x$  は、わずかに  $x$  方向にずれたら、温度  $f$  がどれくらい変化するかを考えている。点  $P$  では、図中のような正、負の値になるだろう。当然、点ごとに値は異なる。 $\partial f / \partial t$  も考えられる。この値は、同じ  $P$  点で時間がわずかに経過したときの温度変化の割合を表す。

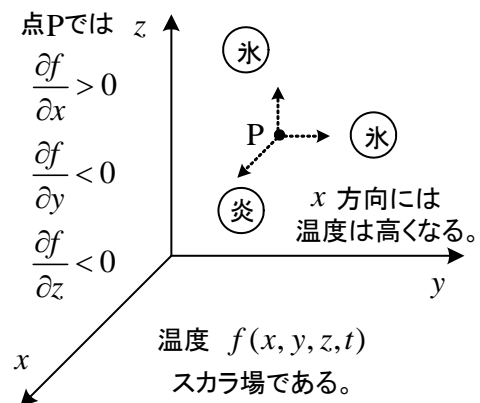


図 1-4 偏微分の意味

偏微分を用いた**テイラーの定理**を示しておく。スカラ関数  $f(x, y, z)$  について、任意の点  $P(x_0, y_0, z_0)$  の近くの点  $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  における関数の値は、 $P$  点の値で近似できる。近似と言うと嫌いな人もいるだろうが、 $Q$  点が非常に近いなら実質的に等号でよい。

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta z \quad (1-25)$$

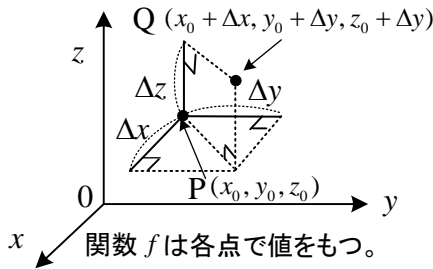


図 1-5 P, Q 点

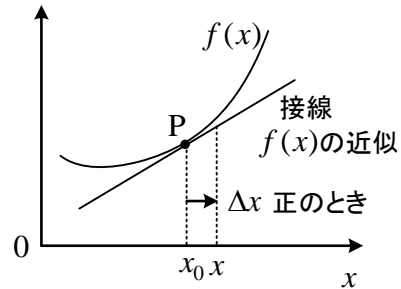


図 1-6 関数の接線 (1 変数)

$\Delta$  (デルタ) は点  $P$  からの小さな変動を意味する。 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  は負でもよい。時間  $t$  についても同様に考えてよいが、(1-25)では、ある瞬間を考え  $\Delta t = 0$  とした。右辺の第 2, 3, 4 項はそれぞれ  $f(x, y, z)$  を  $x, y, z$  で偏微分した後、 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  を代入して求める。つまり、 $P$  点での偏微分の値である。 $\partial f(x_0, y_0, z_0) / \partial x$  と書くと、一定値の偏微分で 0 になる。点  $P$  の近くの点では、関数  $f$  は、 $P$  点の値に、 $x, y, z$  の各向きの傾きに変動分をそれぞれ掛けた変化分(負になることもある)を全部加えたものになる。 $P$  点の座標を  $(x, y, z)$  として

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (1-26)$$

$$\text{全微分} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1-27)$$

と書くことも多い。 $f(x, y, z)$  を偏微分した後、 $x = x, y = y, z = z$  を代入するので、簡単な表現になる。(1-26)で  $\Delta y = \Delta z = 0$  とすると、(1-23)の偏微分の定義式に対応していることが判る。

変数が  $x$  だけなら  $\partial \rightarrow d$  としよく、 $x_0 + \Delta x = x$  とおくと、(1-25)より次式が得られる。

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

これは、高校で習う接線の方程式である。つまり、元の関数は、 $P$  点の近くでは  $P$  点における接線の値で近似できるのである(図 1-6 参照)。(1-25)は、それが 3 変数になっただけである。(1-25), (1-26)はいろいろの場合に利用される重要な公式である。

#### (4) 勾配

スカラ場  $f(x, y, z)$  の点  $(x, y, z)$  における**勾配**(gradient)は

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (1-28)$$

で表される。ここで、 $\nabla$  (**ナブラ**と読む) は演算子で、次式で与えられる。

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-29)$$

例えば、部屋の温度  $f(x, y, z)$  の分布はスカラ場を作る。ある点  $P(x, y, z)$  で  $x$  方向にどれだけ温度が変化するか、その変化の割合 (傾き, 勾配) が  $\partial f / \partial x$  であった。ベクトル  $\text{grad } f$  は、変化の割合が大きい向きを向く。  $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$  である。

**例** スカラ場  $f(x, y, z) = 2x^2 - xyz$  の点  $(2, 1, 1)$  における勾配を求めよ。

$$\text{grad } f = (4x - yz)\hat{x} - xz\hat{y} - xy\hat{z} = 7\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z}$$

点  $(2, 1, 1)$  から  $x$  軸の向きに進むと急に  $f$  が増え、 $y$  軸の向きに進むと  $f$  が減る。

## (5) 発散

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  に対して

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-30)$$

を点  $(x, y, z)$  における**発散**(divergence)という。  $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$  である。

**例** ベクトル場  $\mathbf{A} = (x^2 + yz)\hat{x} + (y^2 + zx)\hat{y} + (z^2 + xy)\hat{z}$  のとき、点  $(1, -1, 1)$  における発散を求めよ。  $\text{div } \mathbf{A} = 2x + 2y + 2z = 2$

## (6) 回転

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  に対して

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad (1-31)$$

を点  $(x, y, z)$  における**回転**(rotation)という。  $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$  である。

**例** ベクトル場  $\mathbf{A} = x^2y\hat{x} - 2xz\hat{y} + 2yz\hat{z}$  のとき、点  $(1, 1, 1)$  における回転を求めよ。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = (2z + 2x)\hat{x} - (2z + x^2)\hat{z} = 4\hat{x} - 3\hat{z}$$

## 線積分, 面積分, 体積分

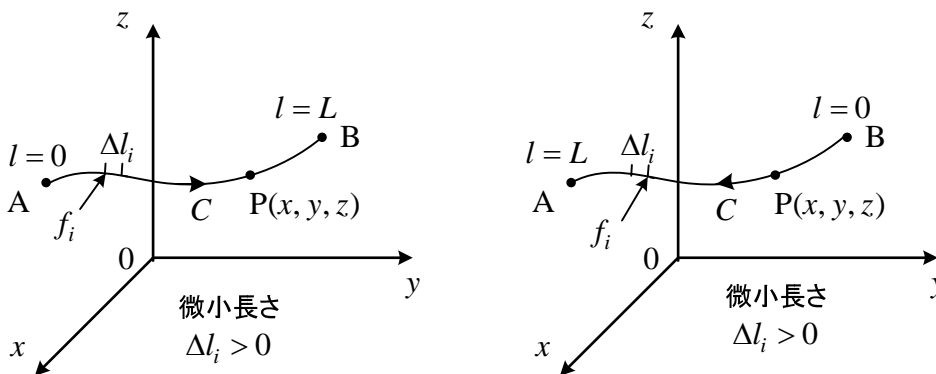
### (1) 線積分

図 1-7(a) の様に 2 点 A, B を結ぶ曲線  $C$  に沿って, 点 A から図った長さを  $l$ , 点 B では  $l = L$  (線の長さ) とする。  $C$  上の各点でスカラー関数  $f(x, y, z)$  が与えられているとき,  $f(x, y, z)$  の曲線  $C$  に沿っての **線積分(line integral)** は次式で定義される。

$$\int_0^L f(x, y, z) dl \equiv \int_C f(x, y, z) dl \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \Delta l_i \quad (1-32)$$

ここで,  $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\Delta l_i = L/n$

右辺の意味は, 2 点 A, B 間を  $n$  等分し, 各区間での関数の値  $f_i$  と微小長さ  $\Delta l_i$  (正) を掛けて, それらを加え合わせる。そのとき,  $n \rightarrow \infty$  として分割数を十分大きくし, その分  $\Delta l_i$  は十分小さく取る。A から B の道  $C$  の上にお金落ちていて (ある点ではお金を落としてマイナス), A から出発し B に着くまでに集めたお金の総額が線積分のイメージである。



(a)  $A \rightarrow B$  の線積分

(b)  $B \rightarrow A$  の線積分

図 1-7 スカラ場の線積分

図(b)では, 点 B から図った長さを  $l$  としている。今度は B から出発して A までお金を集めるということである。微小長さ  $\Delta l_i$  は正で変わらない。よって,

$$\int_{A \rightarrow B} f(x, y, z) dl = \int_{B \rightarrow A} f(x, y, z) dl \quad (1-33)$$

が成り立ち積分値は変わらない。もし,  $f(x, y, z) = 1$  なら, 線積分の値は道の長さ  $L$  になる。

高校で習う積分

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \quad \text{ここで, } \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad (1-34)$$

は,  $x$  軸上で値が  $f(x)$  であるとき,  $a$  から  $b$  までの線積分と考えることができる。しかし,  $\Delta x_i$  は  $b > a$  なら正であるが,  $b < a$  なら負となる。この結果



$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (1-35)$$

となる。この点は  $\Delta l_i$  が常に正で、(1-33)が成り立つ線積分と異なる。

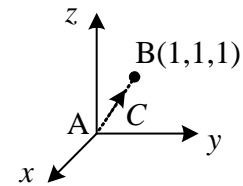
**例** 点 A(0,0,0) から点 B(1,1,1) に至る直線を経路 C として、A から B までの線積分

$$\int_{A \rightarrow B} z dl$$

を求めよ。  $f(x, y, z) = z$  である。次に、B から A までの線積分を求めよ。

(解) AB 間の距離は  $\sqrt{3}$  である。A から経路 C に沿った長さ  $l$  に対し  $z = l/\sqrt{3}$  である。故に

$$\int_{A \rightarrow B} z dl = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{l}{\sqrt{3}} dl = \left[ \frac{l^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



B から測った長さ  $l$  に対し  $z = 1 - (l/\sqrt{3})$  である。よって

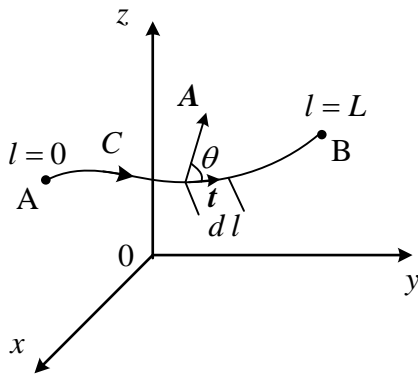
$$\int_{B \rightarrow A} z dl = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{3}}\right) dl = \left[ l - \frac{l^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

次にベクトル場の線積分について述べる。

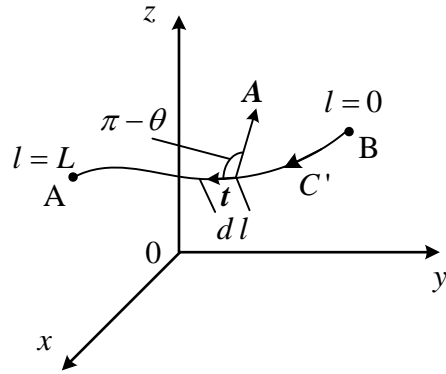
図 1-8(a) に示すように、空間の各点で値が異なるベクトル場  $\mathbf{A}$  がある。経路 C に対し、 $\mathbf{A}$  の線積分を次式で定義する。図 1-8 の  $dl$  は図 1-7 のように  $\Delta l_i$  と書くのが厳密だが、次式との対応が判りやすいので、 $dl$  と書いた。もともと  $dl$  は極めて小さいから図には書けないだろう。

$$\int_0^L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad \text{または} \quad \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1-36)$$

ここで、 $\mathbf{t}$  は経路 C と同じ向きに単位接線ベクトルである ( $|\mathbf{t}| = 1$ )。  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}$  は内積で、スカラーである。よって、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = f(x, y, z)$  とおけば、(1-32) の定義はそのまま使える。接線は tangent だから  $\mathbf{t}$  とする。



(a) A → B の線積分



(b) B → A の線積分

図 1-8 ベクトル場の線積分

この場合、 $A \rightarrow B$  の線積分と  $B \rightarrow A$  の線積分は値が異なる。図に示すように、(a)の場合、 $A \cdot t = |A| \cos \theta$  だが、(b)の場合、 $A \cdot t = |A| \cos(\pi - \theta) = -|A| \cos \theta$  となる。従って、

$$\int_C A \cdot t \, dl = - \int_{C'} A \cdot t \, dl \quad (1-37)$$

となる。 $t$  の向きが逆になるので、スカラー関数の値の符号が変わる。ベクトルの線積分と言っても、内積を取るのだから、実はスカラーの線積分である。図 1-8 で物体に力  $A$  を加え、 $A$  から  $B$  まで動かしたとき、線積分はこの力がする仕事を表す。

図 1-9 を使って**単位接線ベクトル** $t$  の公式を導いておく。積分路  $C$  上の任意の点  $P$  は、点  $A$  から測った長さ  $l$  の点である。この点の位置ベクトルは、 $l$  だけの関数として

$$\mathbf{r}(l) = x(l)\hat{x} + y(l)\hat{y} + z(l)\hat{z} \quad (1-38)$$

と書ける。つまり  $C$  上の点の座標  $(x, y, z)$  は  $l$  で表されるということ。点  $P$  から少し  $l$  が増えると、その分、座標も変化する。点  $P$  で、それぞれの座標を  $l$  で微分したベクトル

$$\mathbf{t}(l) = \frac{d\mathbf{r}(l)}{dl} = \frac{dx(l)}{dl}\hat{x} + \frac{dy(l)}{dl}\hat{y} + \frac{dz(l)}{dl}\hat{z} \quad (1-39)$$

は、点  $P$  での曲線  $C$  の**単位接線ベクトル**となる。なぜなら、まず図 1-9 より

$$\frac{d\mathbf{r}(l)}{dl} \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(l + \Delta l) - \mathbf{r}(l)}{\Delta l} \quad (1-40)$$

は  $C$  の接線方向を向いている。次に、大きさについては

$$\left| \frac{dx}{dl}\hat{x} + \frac{dy}{dl}\hat{y} + \frac{dz}{dl}\hat{z} \right| = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dl} = 1 \quad (1-41)$$

が成り立つ。

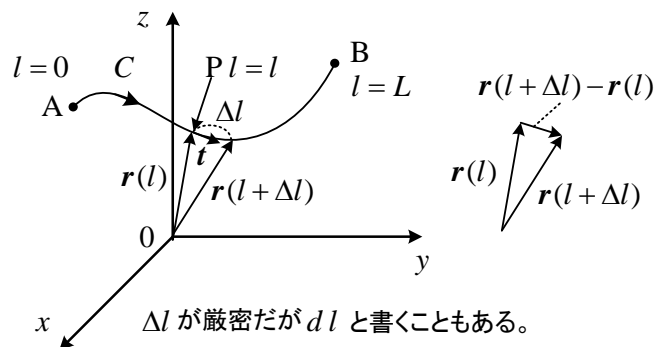


図 1-9 単位接線ベクトル  $t$

(1-39)より、次式が成り立つ。

$$\mathbf{t} \, dl = d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \quad (1-42)$$

また、 $\mathbf{t} \, dl \equiv d\mathbf{l}$  と置いて、(1-36)の線積分を

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \equiv \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{あるいは} \quad \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \equiv \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-43)$$

と書いた本も多い。本テキストでは、線積分の意味がはっきりわかるように(1-36)のように書く。

## (2) 面積分

### スカラー場の面積分

図 1-10 に示すように、スカラー場  $f(x, y, z)$  の中に滑らかな曲面  $S$  がある。この曲面を  $n$  分割して、 $i$  番目の小片上に任意の点  $P_i$  をとる。点  $P_i$  でのスカラー場の値  $f(P_i)$  と小片の面積  $\Delta S_i$  (正) を用いて、**面積分**(surface integral)を次式で定義する。  $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  である。

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (1-44)$$

$n \rightarrow \infty$  とするのは、分割数を十分大きくし、 $\Delta S_i$  は十分小さく取るということである。十分小さくとるので、小片の形に制限はない。畑  $S$  上にお金が落ちていて (ある点ではお金を落ととして)、畑で集めたお金の総額が面積分のイメージである。畑やベレー帽は面のイメージのため、ボールのような閉曲面であっても構わない。  $f = 1$  なら面積分は  $S$  の面積になる。

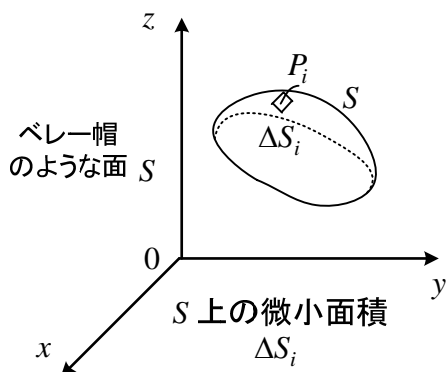


図 1-10 スカラー場の面積分

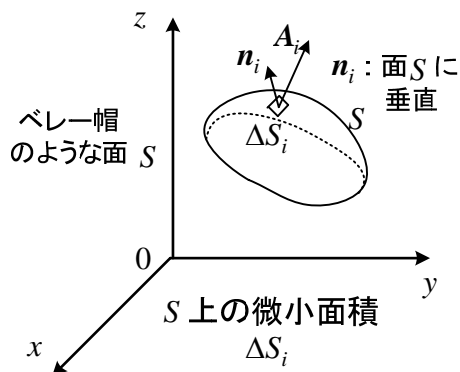


図 1-11 ベクトル場の面積分

### ベクトル場の面積分

図 1-11 に示すように、空間の各点で値が異なるベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  がある。いま曲面  $S$  があり、曲面上にある  $\mathbf{A}$  (ベクトル場  $\mathbf{A}$  の一部) の面積分を次式で定義する。

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (1-45)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は曲面  $S$  の向きを決める**単位法線ベクトル**( $\mathbf{n}$  は  $S$  に垂直) である。  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  は内積で、スカラーである。よって、  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i = f(P_i)$  とおけば、(1-44)と同じである。  $\mathbf{n} dS \equiv d\mathbf{S}$  と置いて

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-46)$$

と書く本もある。  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i$  は、ベクトル  $\mathbf{A}_i$  のうちで面を  $\mathbf{n}_i$  の向きに通過する量のイメージである。  $\mathbf{A}_i$  と  $\mathbf{n}_i$  のなす角が  $\pi/2$  なら  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i$  は 0 となり、面を通過する量が 0 ということである。  $\pi/2$  以上になると値が負になり、  $\mathbf{n}_i$  と逆向きに通過することを意味する。ベクトルの面積分と言っても、内積を取るのだから、実はスカラーの面積分である。本テキストでは  $\mathbf{n}$  が見えたほうが良いので(1-45)の様に書く。

### (3) 体積分

スカラー場  $f(x, y, z)$  の中にボールのような閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  がある。この領域を  $n$  分割して、 $i$  番目の小立体内に任意の点  $P_i$  をとる。点  $P_i$  でのスカラー場の値  $f(P_i)$  と小立体の体積  $\Delta V_i$  を用いて、**体積分**(volume integral)を次式で定義する。

$$\int_V f(x, y, z) dV \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i \quad (1-47)$$

$n \rightarrow \infty$  は、分割数を十分大きくし、 $\Delta V_i$  は十分小さく取るということである。貯金箱の中  $V$  に各種のお金が入っていて、全部を集めたお金の総額が体積分のイメージである。  $f=1$  のとき体積分は  $V$  の体積となる。

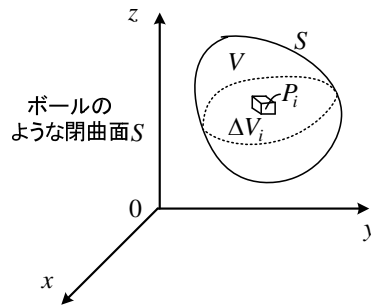


図 1-12 スカラー場の体積分

## 線積分，面積分，体積分の定理

#### (1) ストークスの定理

図 1-13 に示すように、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に開曲面  $S$  を考える。開曲面  $S$  上で面に垂直な単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。もちろん  $\mathbf{A}, \mathbf{n}$  は場所によって異なる ( $\mathbf{A}$  は面の上だけではない)。 $\mathbf{n}$  の向く側を  $S$  の**表**という。境界  $C$  の向きは  $S$  の表を左に見て進む向きにとるものとする。  $\mathbf{t}$  は  $C$  の向きの単位接線ベクトルである。このとき、次式が成立する。

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1-48)$$

これを**ストークスの定理**(Stokes' theorem)という。 $\mathbf{A}$  の回転である  $\text{rot} \mathbf{A}$  の面に垂直な成分を開曲面  $S$  上で集めた値と、境界  $C$  上で  $\mathbf{A}$  の接線方向成分を 1 周回って集めた値は等しいことを意味する。

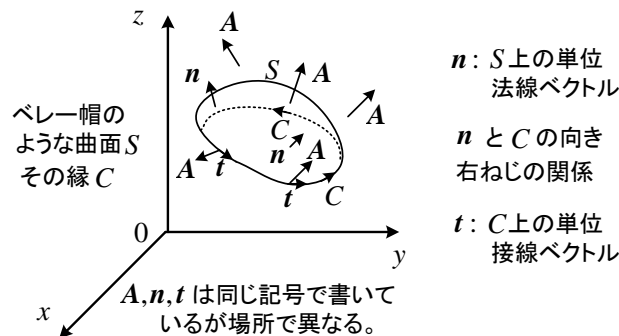


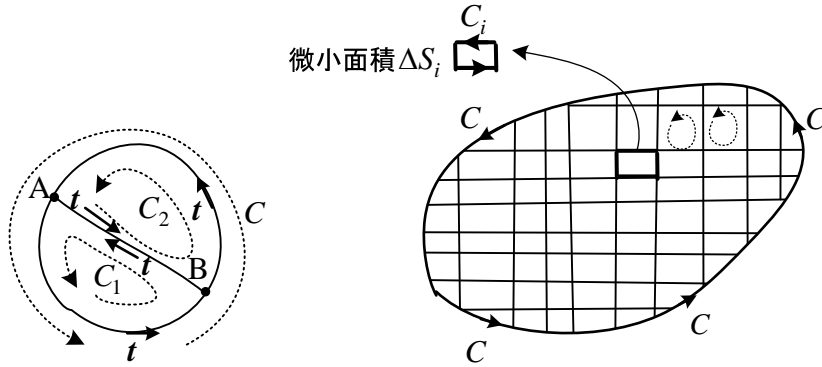
図 1-13 ストークスの定理

以下、回転の定義、ストークスの定理の証明、(1-31)の導出に関して説明しよう。

図 1-14 に示すように、曲面を 2 分割し、2 つのループ  $C_1, C_2$  を考える。1 周する  $C_1$  と  $C_2$  の線積分の和を考えると、 $A, B$  間は向きが反対なので、(1-37)より打ち消し

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-49)$$

となる。 $C$  は外側の境界を 1 周している。単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  は  $C_1, C_2, C$  ごとに一部異なる。



(a) 開曲面（ベレー帽）の 2 分割 (b) 開曲面（ベレー帽）の多分割

図 1-14 線積分の和（ベレー帽を真上から見た図）

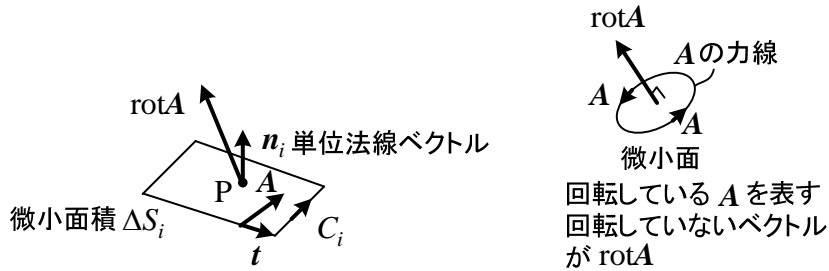


図 1-15  $\text{rot}\mathbf{A}$  の定義

図 1-14 (b) のように開曲面を小片（形に制限はない）に  $n$  分割した場合、(1-49)の考え方を何度も使うと内側の線積分は消えて、一番外側  $C$  の線積分だけが残る。よって、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-50)$$

が成り立つ。いま、図 1-15 に示す小片の境界での線積分を面積  $\Delta S_i$  で割って、小片での（極限では点と考えてよい）  $\text{rot}\mathbf{A}$  を次式で定義する。 $\mathbf{n}_i$  は面に垂直な単位法線ベクトルである。

$$(\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_i \equiv \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_i} \quad (1-51)$$

分りにくい定義の仕方であるが、以下の様に解釈しよう。ベクトル場  $\mathbf{A}$  について、ある点で、うずを巻いている量を定義したい。このために、ある点  $P$  を含む小さな面を考え、その境界  $C_i$  で線積分を計算する。これが大きければ経路  $C_i$  に沿って強いうずを巻いていると考えられる。なぜなら線積分は  $P$  の回りを 1 周する  $C_i$  の向きで  $\mathbf{A}$  の経路方向成分を集めたものだから。ところが、ある点  $P$  を含む小さな面は角度を変えればいろいろある。全部試してみて最も大きな線積分が得

られた面の法線の向きを  $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きと定義する。 $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさはそのときの線積分の値としたところであるが、それだと面の大きさで値が異なるから、 $\Delta S_i$  で割っている。 $\lim$  は、 $\Delta S_i$  が極めて小さいなら、省いて考えてよい。適当に決めた経路  $C_i$  は、線積分が最も大きくなるとは限らず、 $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きとのずれの分だけ小さくなる。それが(1-51)左辺で内積をとる理由である。たまたま線積分が最も大きくなるなら、 $\text{rot}\mathbf{A}$  と  $\mathbf{n}_i$  の向きは一致し、右辺が  $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさとなる。小さな水車を点 P において、角度をいろいろと試し、水車が最も速く回るときの水車の軸が  $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きで、水車の速さが  $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさに対応すると考えるとイメージしやすい。

(1-51)で  $\Delta S_i$  は十分小さいとして  $\lim$  を省き、図 1-14(b)の場合について  $n$  個分加え合わせると

$$\sum_{i=1}^n (\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1-52)$$

となる。分割数を多くし  $n \rightarrow \infty$  としたときの左辺を(1-45)の面積分の定義で

$$\int_S (\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

と書くので、右辺に (1-50)を用いて、(1-48)のストークスの定理が証明できた。

最後に、(1-31)の導出を行う。図 1-16 のような、微小な長方形の経路  $C$  を考える。 $z$  軸は紙面に対し手前を向いている。点 1  $(x, y, z)$  の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$$

と書ける。点 3 の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると

$$\mathbf{A}(x + \Delta x, y + \Delta y, z) = A_x(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{z}}$$

と書ける。

テイラーの定理を用いると、(1-26)より次式を得る。

$$A_x(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \approx A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y$$

$$A_y(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \approx A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y$$

点 2 は、上式の  $\Delta y$  を 0、点 4 は上式の  $\Delta x$  を 0 とすればよい。

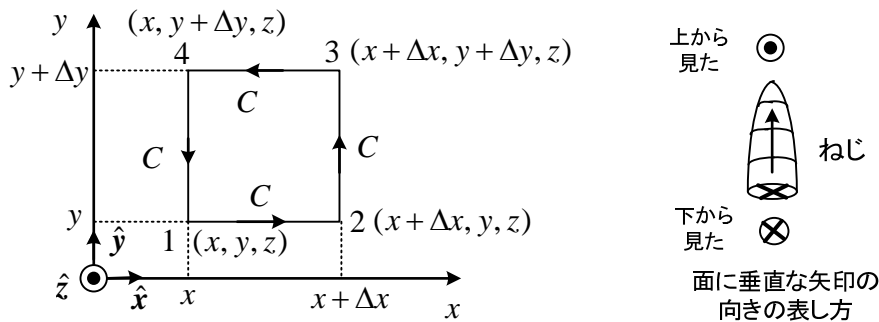


図 1-16  $z$  一定の  $x$ - $y$  平面にとった積分路

次に、経路  $C$  での  $\mathbf{A}$  の線積分を考える。例えば、 $1 \rightarrow 2$  への積分では、 $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{x}}$  であるから

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl &= \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \\ &= \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} \, dl - \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dl - \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} \, dl \\ &= \int_{1 \rightarrow 2} A_x \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} A_y \, dl - \int_{3 \rightarrow 4} A_x \, dl - \int_{4 \rightarrow 1} A_y \, dl \end{aligned} \quad (1-53)$$

各線積分を、例えば  $1 \rightarrow 2$  の場合は点 1 と点 2 の  $A_x$  の平均値に長さを掛けて求めると

$$\begin{aligned} \int_{1 \rightarrow 2} A_x \, dl &= \frac{1}{2} (A_x(x, y, z) + A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x) \Delta x \\ \int_{2 \rightarrow 3} A_y \, dl &= \frac{1}{2} (A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y) \Delta y \\ \int_{3 \rightarrow 4} A_x \, dl &= \frac{1}{2} (A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y + A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y) \Delta x \\ \int_{4 \rightarrow 1} A_y \, dl &= \frac{1}{2} (A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + A_y(x, y, z)) \Delta y \end{aligned}$$

これらを(1-53)に代入して、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

(1-51)より

$$(\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1-54)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は経路  $C$  と右ねじの関係で決まるから、 $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$  で  $(\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$  は  $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $z$  軸方向成分である。これで、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $z$  成分が求まった。 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$  と順に入れ替えることで、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $x$  成分が求まる。 $x \rightarrow z, y \rightarrow x, z \rightarrow y$  と順に入れ替えることで、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $y$  成分が求まる。以上で、(1-31)が導出できた。

## (2) ガウスの定理

図 1-17 に示すように、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に例えばボールのような閉曲面  $S$  とその中の領域  $V$  を考える。閉曲面  $S$  上で面に垂直な外向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。もちろん  $\mathbf{A}, \mathbf{n}$  は場所によって異なる。このとき、次式が成立する。

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1-55)$$

これを**ガウスの定理**(Gauss' theorem)という。 $\mathbf{A}$  の発散である  $\text{div} \mathbf{A}$  を領域  $V$  で集めた体積分と、面  $S$  上で  $\mathbf{A}$  の外向き成分を集めた面積分とは等しいことを意味する。 $\text{div} \mathbf{A}$  は水の源泉で、領域  $V$  の中の湧き水を全て集めると、境界面から出て行く水の量( $\mathbf{n}$  方向成分)と等しいというイメージである。

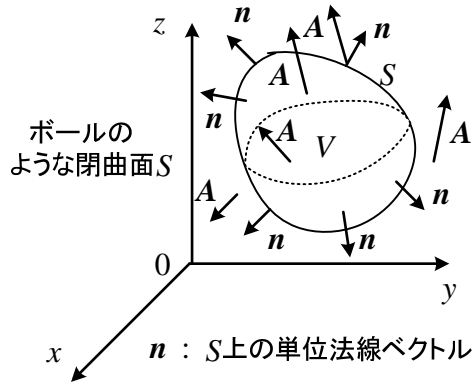


図 1-17 ガウスの定理

以下、発散の定義、ガウスの定理の証明、(1-30)の導出に関して説明しよう。

図 1-18(a)に示すように、ボールのような閉曲面を 2 分割し、2 つの閉曲面  $A+C$  と  $B+C$  を作る。境界面  $C$  は共通の断面である。閉曲面上でのベクトル場  $A$  の面積分を考える。曲面  $C$  上の同じ点では、単位法線ベクトル  $n_A = -n_B$  であり、面積分について次式が成り立つ。

$$\int_C A \cdot n_A dS = -\int_C A \cdot n_B dS \quad (1-56)$$

したがって、境界面  $C$  上の面積分は打ち消すので

$$\int_{A+C} A \cdot n_A dS + \int_{B+C} A \cdot n_B dS = \int_A A \cdot n_A dS + \int_B A \cdot n_B dS \quad (1-57)$$

となる。

図 1-18(b)のように閉曲面内を小閉曲面  $S_i$  (形に制限はない) に  $n$  分割した場合、共通の面 (小立体中の面) の面積分が打ち消すので、この考え方を繰り返し用いることで

$$\int_S A \cdot n dS = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} A \cdot n_i dS \quad (1-58)$$

が成り立つ。 $n_i$  は面  $S_i$  に垂直な単位法線ベクトルである。結局一番外の面積分しか残らない。

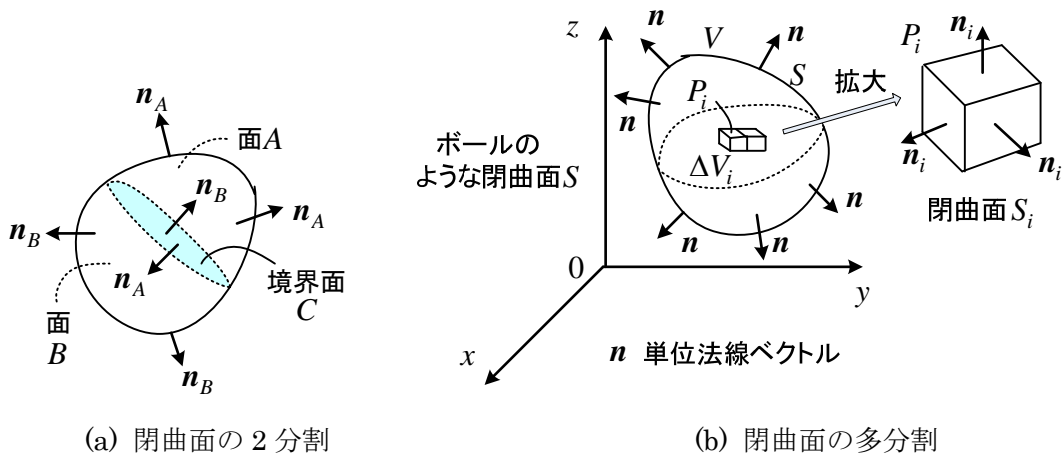


図 1-18 面積分の和



いま、図 1-18(b)に示す小閉曲面の面上での面積分をその体積  $\Delta V_i$  で割って（極限では点と考えてよい）  $\text{div} \mathbf{A}$  を次式で定義する。

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i dS}{\Delta V_i} \quad (1-59)$$

$\lim$  は、 $\Delta V_i$  が極めて小さいとして、省いて考えてもよい。 $\text{div} \mathbf{A}$  は極めて小さい閉曲面（点とみなせる）から  $\mathbf{A}$  が外に出る量を集めたものである。 $\mathbf{A}$  が面に垂直な部分では最も外に出る。

図 1-18(b)の場合について考えると、定義(1-59)より

$$\sum_{i=1}^n \text{div} \mathbf{A} \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad (1-60)$$

となる。 $n \rightarrow \infty$  とし、十分小さく分割したときの左辺を体積分の定義(1-47)で

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} dV$$

と書くので、(1-58)であるから、ガウスの定理が証明できた。

最後に、(1-30)の導出を行う。図 1-19 のように、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に座標軸に平行な辺の極小の直方体を考え、6 つの面上で面積分を考えていく。

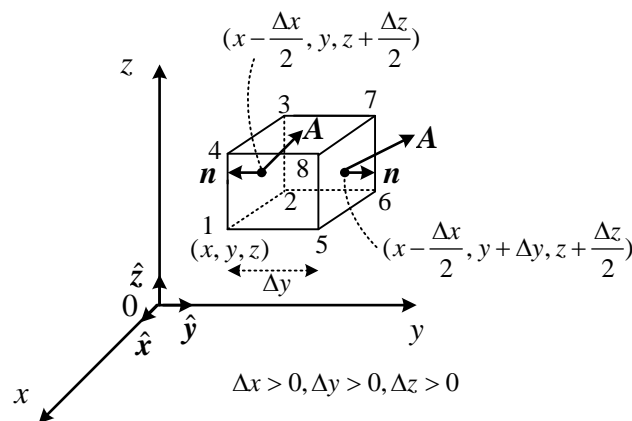


図 1-19  $\text{div} \mathbf{A}$  の公式の証明

点 1( $x, y, z$ ) の  $\mathbf{A}$  を成分表示して

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$$

とする。まず、面 1234 と面 5678 について考える。面 1234 の中心の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると

$$\mathbf{A}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) = (A_x(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z), A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z), A_z(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z))$$

と書ける。テイラーの定理を用いると、 $y$  成分について次式を得る。

$$A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) \approx A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \quad (1-61)$$

同様に、面 5678 の中心の  $\mathbf{A}$  の  $y$  成分は、テイラーの定理を用いると、次式で表せる

$$A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y + \Delta y, z + \frac{1}{2}\Delta z) \approx A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \quad (1-62)$$

次に、面 1234 と面 5678 での面積分を考える。(1-61), (1-62)を用い、面積分を面の中心の値×面積と近似すると

$$\begin{aligned} \int_{1234} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{5678} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= -\int_{1234} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} dS + \int_{5678} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} dS \\ &= -\int_{1234} A_y dS + \int_{5678} A_y dS \\ &= -(A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta z + (A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta z \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (1-63)$$

$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  であるから、(1-59)より、 $\Delta V$  で割って、これらの面に関しては  $\partial A_y / \partial y$  となる。他の  $x, z$  軸方向についても同様に求まり、これらの和として(1-30)が得られる。

以上は、**直角座標系**  $(x, y, z)$  で考えたが、**円柱座標系**  $(r, \varphi, z)$  や**球座標系**  $(r, \theta, \varphi)$  を考えることもある。定義は当然同じであるが、div, grad, rot などの得られる公式については、付録を参照願いたい。

数学の公式は恐れることなく使ってみよう。複雑な式は覚える必要もない。また、導かなくても、3冊以上の版を重ねた本に同じ公式が載っていて本文中でも利用されていたら、正しいと信じて良いだろう。