



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/38873
Right	

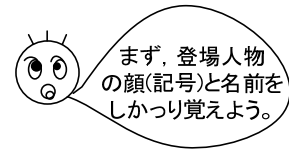
This document is downloaded at: 2019-09-21T09:20:14Z

第2章 電磁気学の世界地図

電界*や磁界*を記述する式は4つにまとめられ、これを**マクスウェルの方程式**と言う。ベクトル場を表すには、 div (発散) と rot (回転) の値が必要であることが数学的に判っている (ヘルムホルツの定理: 付録)。従って、マクスウェルの方程式が div と rot で表されていることは不思議なことではない。この章はマクスウェルの方程式を始めとした電磁気学の世界を紹介するもので、完全に理解できなくても全く構わない。特に○*のついた節は初読の際にはとばしてよい。

まず、用いる記号と名前を示しておく。単位については付録にまとめている。

E : 電界**, 電場, 電界の強さ [V/m]	⇒ 電気力線
D : 電束密度 [C/m ²]	⇒ 電束線
H : 磁界**, 磁場, 磁界の強さ [A/m]	⇒ 磁力線
B : 磁束密度 [T] または [Wb/m ²]	⇒ 磁束線
i : 伝導電流密度, 自由電流密度 [A/m ²]	#
ρ : 自由電荷密度, 真電荷密度 [C/m ³]	##



上記の量は全て場所 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と時間 t の関数であるが、簡単のため (\mathbf{r}, t) を省略している。高校で習う関数 $f(x)$ の独立変数は x だけであるが、上記の量は独立変数が4つある。電界と磁界という言葉は、広い意味(*のような場合)と狭い意味(**の場合)で使うことにする。いろいろの呼称があるが、太字の呼び方をする。矢印の右は力線の名称である。

i には、金属のような物体の中の電荷の移動による**伝導電流**と気体中を電子が動く場合のような**対流電流 (携帯電流)**があるが、本テキストでは**伝導電流**だけを考える。

通常、自由電荷は導体表面、真空中、気体中にあり、絶縁体中、導体中の ρ は0である。コンデンサでは、極板(導体)の**面自由電荷密度** σ [C/m²] を考える。 ρ を直接考えるのはプラズマ、半導体接合部の空乏層、真空管などである。 ρ に分極電荷は含まれない。

肉太の量は、ベクトル場を作る。すなわち、3つの成分を持つ。 ρ はスカラー場を作る。 E と D は電界*を表すのに、 H と B は磁界*を表すのに用いる。なお、真空中や空気中であれば、 E と B (あるいは E と H) だけで良いが、物質中も考えるので、 E, D, B, H の4つの量を用いる。

マクスウェルの方程式について、以下のポイントは重要である。

- ① マクスウェルの方程式は、物質中や動く物体がある場合でも成り立つ一般的なものである。ただし、電磁気学はもともと原子や電子のミクロなレベルの現象を扱う学問ではなく (これは量子論の分野)、原子や電子の巨視的な挙動についての学問である。
- ② 諸量を表す座標系は**静止座標系**である。地球自体が公転や自転をしているが、ここで言う静止座標系とは、地球上に固定し、一般に我々が静止と考えている座標系でよい。

○ 自由電荷密度, 伝導電流密度, 電荷保存の法則

電磁界を作る自由電荷密度と伝導電流密度を説明しよう。全ての物質はだんだん細かく分けていくと、最後に**原子(atom)**に到達する。原子は中心に原子核があり、そのまわりに負の電荷を持つ幾つかの**電子**がある。原子核は正の**電荷**をもつ幾つかの**陽子**と電荷を持たない**中性子**からなっている。普通の状態では、電子と陽子の数は等しく、それらが打ち消し合って電荷は**0**と考えてよい。原子の中の電子と陽子の数は物質により異なる。図 2-1 は銅の原子の構造を示している。一番外側の電子は**価電子**と呼ばれ、銅の場合は**1**個である。銅線は電気をよく通す**導体**であるが、これは電源をつなぐと**価電子**が動きやすいためである。電子が**1**個原子外へ移動すると原子は正に帯電する。これを**イオン**という。電荷は**自由電荷**と**束縛電荷**に分けられる。銅の場合、**価電子**のみが原子の外へ動くとする、自由電荷は**価電子 1**個と動かない陽子のどれか**1**個を指す(**価電子**だけではないので注意、コンデンサに貯まる正電荷がこの陽子と考える)。それ以外の電子と陽子を**束縛電荷**と呼ぶ。完全な絶縁物は束縛電荷のみである。

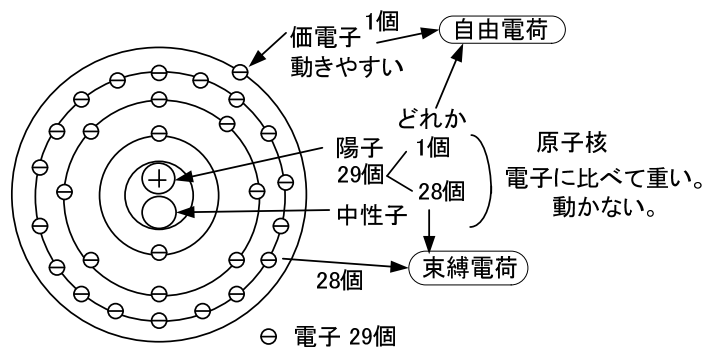


図 2-1 銅(原子番号 29)の原子の構造

電磁気学では**1**つひとつの原子のことは考えず、 10^{-6}m 程度の長さの平均値を考える⁽⁴⁾。従って、“+の電荷がある”と言う場合、電子が抜けた原子が多く、全体として+になっていると考えよう。“-の電荷がある”と言う場合、電子が増えた原子が多く、全体として-になっていると考えよう。なお、電子は気体中に取り出せるので、**2**極管のように電子だけを考える場合もある。

自由電荷密度について説明する。**自由電荷密度** $\rho(\mathbf{r}, t)[\text{C}/\text{m}^3]$ は 1m^3 に換算した自由電荷で、当然実際に 1m^3 の体積を考えている訳ではない。これを単位体積中の電荷ということもある。微小な体積 $\Delta V[\text{m}^3]$ 中 (それでも原子はたくさんある) の自由電荷の和を $\Delta Q[\text{C}]$ とするとき、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t) + \rho_+(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [\text{C}/\text{m}^3] \quad (2-1)$$

で求められる。 $\rho_-(\mathbf{r}, t)$ と $\rho_+(\mathbf{r}, t)$ は自由電荷のうちそれぞれ電子分と陽子分を表す。後で詳しく述べるが、一般に金属中では、電流が流れている場合でも

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-2)$$

と考えて良く、自由電荷密度は金属表面のみに現れる。自由電荷には陽子の一部も入っているので**0**になるのである。コンデンサの正に帯電した極板の電荷は、この陽子の電荷である。

電流 (伝導電流) は自由電荷の動く量を表す。回路では電線の太さを考えないが、実際の電線

や金属板に流れる電流は空間に分布するから**伝導電流密度** $i(\mathbf{r}, t)$ [A/m²]で表す。 $i(\mathbf{r}, t)$ は一般に次式で表される。 $\rho_-(\mathbf{r}, t), \rho_+(\mathbf{r}, t)$ の平均の速度をそれぞれ $\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t), \mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t)$ とする。

$$i(\mathbf{r}, t) = \rho_+(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t) + \rho_-(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \quad (2-3)$$

金属中で実際に動くのは価電子なので、価電子の電荷密度 $\rho_-(\mathbf{r}, t)$ (負)と、その平均速度 $\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t)$ を用いて、(2-3)は次式となる。陽子は動かないので、 $\mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ だからである。

$$i(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \quad (2-4)$$

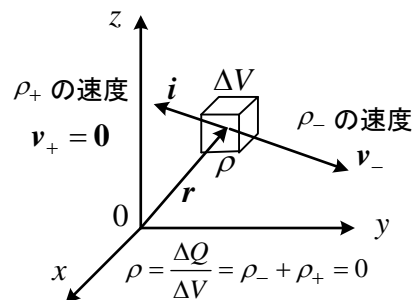


図 2-2 電荷密度と電流密度 (金属中)

以上の様に、金属中の電荷は0であっても、電流は流れている。

次に、電流が導体中を流れているとき、伝導電流密度 i (単に電流密度と呼ぶこともある) と回路で使う電流 I の関係を述べよう。図 2-3 は断面が一様でない導体を流れる電流である。導体の断面を含むように、任意の平面 S を考える。このとき、電流 I は、 i を用いて次式で求められる。

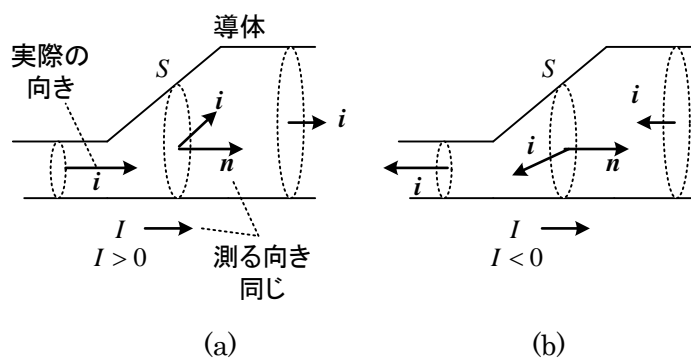


図 2-3 断面が一様でない導体を流れる電流

$$I(t) = \int_S i(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-5)$$

回路で使う電流 I の矢印は、実際の電流の向きではなく、電流を測定する向きを表す。これは、断面 S の法線ベクトル \mathbf{n} の向きに相当する。電流密度の面 S に垂直な成分を求め、導線の断面で集めると、電荷の蓄積がなければどの断面でも電流 I になる。電流密度 i の矢印は、 \mathbf{H}, \mathbf{E} のように実際の向きで、測定の向きではない。(b)の場合には、実際の電流が右から左側へ流れており、 $I < 0$ となる ($i \cdot \mathbf{n} < 0$ となる)。測定の向きつまり \mathbf{n} の向きは自分の好きに決めてよい。

次に、コンデンサの例で考えてみよう。図 2-4 にコンデンサの電荷と電流を示す。回路では、上の極板の電荷を $Q[C]$ とすると次式が成り立つ。

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2-6)$$

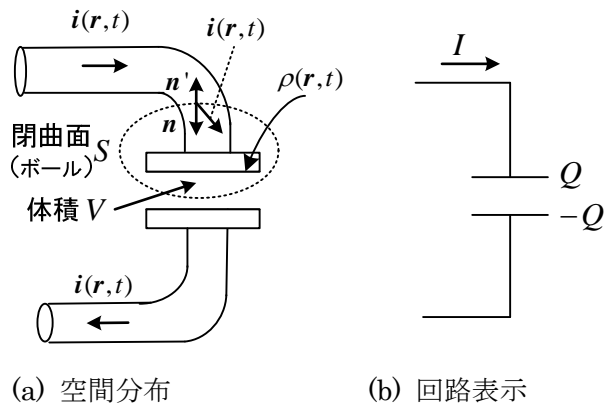


図 2-4 コンデンサの電荷と電流

図 2-4(a)のように、上の極板を囲むように、任意の閉曲面 S を考える。(2-6)の電流 I と電荷 Q については、

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS, \quad Q = \int_V \rho dV$$

が成立する。なお、閉曲面 S は広いが、 I の積分は電流が流れている導線の部分だけになる。この閉曲面で囲まれた領域を体積空間 V について、ガウスの定理を用いる場合、閉曲面 S の外側に向いた単位法線ベクトル \mathbf{n}' をとらなければならない。これは面 S から流れ出す電流を意味する。 $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$ として (2-6) より

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}' dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

となる。ガウスの定理を用いて

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{i} dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \quad (2-7)$$

となる。偏微分するのは、積分の中では $\rho(\mathbf{r}, t)$ が場所と時間の関数だからである。

任意の V で成り立つので、自由電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ には各点で次式が成り立つ。

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

①

これは**電荷保存の法則**(charge conservation)または**連続の式**と呼ばれている。 $\operatorname{div} \mathbf{i}$ は \mathbf{i} が極めて小さい閉曲面 S (微小体積 ΔV) から外に出る電流を集めたものである。実際に電流が流れ出していたら、 $\operatorname{div} \mathbf{i} > 0$ で、その分微小体積 ΔV の自由電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ が減少することを意味する。

○ マクスウェルの方程式（微分形）

以下の式は、どんな物質中(動いていても良い)でも空間の各点ごとに、ある瞬間に成立する。

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

①

空間に自由電荷密度 $\rho[\text{C}/\text{m}^3]$ が分布していれば、そこから電束密度 \mathbf{D} を生じるガウスの法則である。図 2-5 はコンデンサに電源をつなぐと極板（導体）の表面に電荷が分布し、正の電荷から負の電荷に向けて電束密度が生じる例を示す。空間を占める物質は絶縁体である。

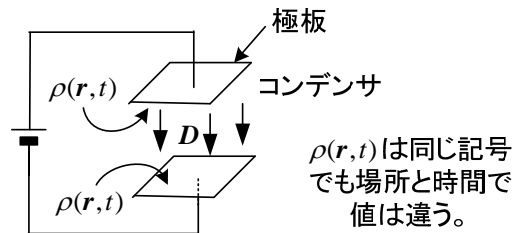


図 2-5 電荷密度による電束密度の発生例

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

②

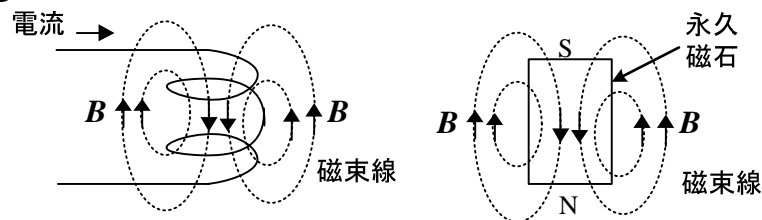


図 2-6 磁束密度の例

電流を流したコイルや永久磁石の周りには磁束密度 \mathbf{B} が生じる。②は磁束密度には電束密度のような湧き出し口はなく、 \mathbf{B} の力線である磁束線(line of magnetic flux)は常に閉じている（ループになる）ことを意味する。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

③

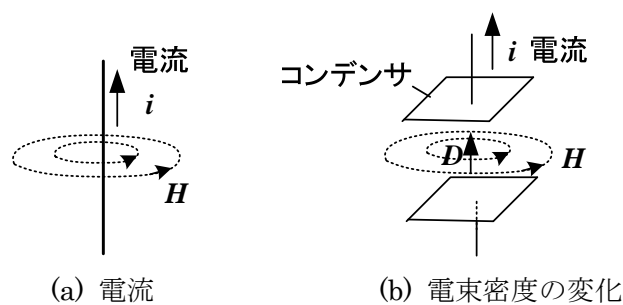


図 2-7 磁界の発生例

③は電流が流れると磁界 H ができるという**アンペアの法則(右ねじの法則)**やコンデンサの中の電束密度 D の時間変化 $\partial D / \partial t$ が磁界 H を作ることを表す式である。 $\partial D / \partial t$ の項は**変位電流** (displacement current) と呼ばれ、マクスウェルによって発見された。電磁波(電波)を考えるときにはなくてはならない量である。対流電流 ρv を考える場合は、③の i を $i + \rho v$ (伝導電流と対流電流の和) に変えないといけない。

③の覚え方：H が頭で回転すれば愛(i)をダメ(D)にすると(t)。

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{④}$$

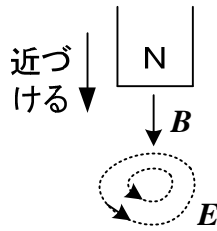


図 2-8 磁束密度の時間変化による電界の発生例

④は磁束密度が時間変化すると電界を生じることを表す式である。これは**ファラデーの電磁誘導の法則**とよばれる。電界の部分に閉じたコイルを置くと電流が流れる。

④の覚え方：胃(E)が回る(腹痛)とビタミン(B)使って(t)マイナス(-)へ。

①～④は全て独立な式ではなく、①は①と③から導かれる。数学の公式(付 11)より

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = 0$$

は常に成り立つから、③の div をとり

$$0 = \text{div } \mathbf{i} + \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D}) = \text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となって、①が導ける。偏微分の順番は入れ替えが可能である。ただ、①は電荷保存の法則という意味があり、毎回導くことなく利用した方がよいので、基本式の中に入れていいる。

○ マクスウェルの方程式 (積分形)

rot については(1-48)のストークスの定理を用い、div については(1-55)のガウスの定理を用いて、ある面や閉路について成り立つ積分形のマクスウェルの方程式を得ることができる。rot では開曲面、div では閉曲面を考える。簡単な計算で解が得られ、高校でも習うのは、積分形である。

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \, dV \quad \left(\int_V \text{div } \mathbf{D} \, dV = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS \right) \quad \text{①'}$$

①にガウスの定理を適用して得られる。空間に分布した自由電荷密度 $\rho(\mathbf{r},t)$ のスカラ場によって、電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ のベクトル場が生じている。空間に任意の閉曲面 S を考えると、 S 上にある \mathbf{D} の面積分は、その中に含まれる自由電荷密度 ρ の体積分となるということである。つまり \mathbf{D} を面上で集めれば、その中にある電荷の総和になるということ。閉曲面の外の ρ は体積分に関係ないことに注意しよう。なお、一般に \mathbf{D} は閉曲面の内外の全空間にある。

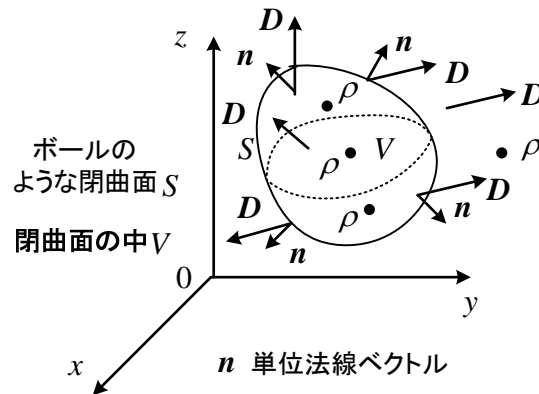


図 2-9 自由電荷による電束密度

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \text{②'}$$

②にガウスの定理を適用して得られる。空間に分布した磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ のベクトル場がある。空間に任意の閉曲面 S を考えると、 S 上にある \mathbf{B} の面積分は 0 になるということである。 \mathbf{B} は体積 V の中に入る量と出る量が変わらないことを意味する。例えば V の中にコイルを入れて電流を流したり、あるいは磁石を全部または半分だけ入れても、②'は成り立つ。

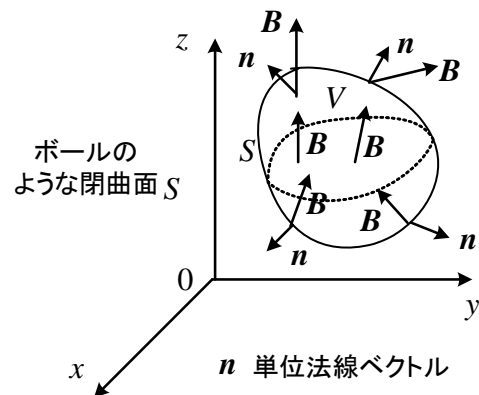


図 2-10 磁束密度

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \left(\mathbf{i}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{③'}$$

③の左辺を開曲面 S について面積分し、ストークスの定理を用いると

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl$$

となる。右辺も同じ開曲面 S で面積分して、③'が得られる。これは、アンペアの周回積分の法則とよばれる。電流 \mathbf{i} が流れるコイルの磁界を計算する場合、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は無視されることが多い。

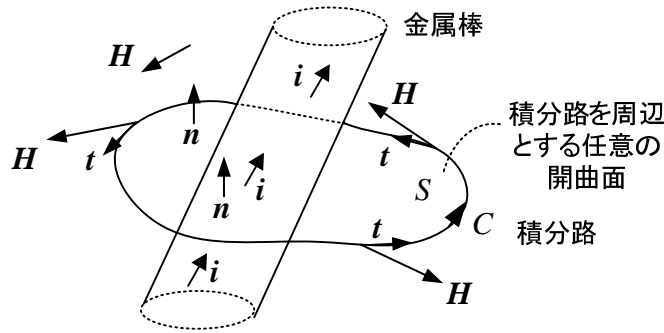


図 2-11 金属棒に分布して流れる電流が作る磁界

図 2-11 は、金属棒に伝導電流密度 \mathbf{i} が分布して流れ、それにより空間に磁界 \mathbf{H} ができる様子を示す。図の様にある積分路 C と、それを周辺としたある開曲面 S と取る。 \mathbf{n} は開曲面 S 上の単位法線ベクトルで、 C の向きに右ねじを回したときのねじの進む向きを選ぶ。 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ を無視すると

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = I \quad (2-8)$$

となる。 I は棒に流れる電流である。どんな形の積分路でも、磁界 \mathbf{H} (場所で異なる) を C 上で集めると I になることを意味する。これはすごいことではないでしょうか。

また、 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ を無視すると③より

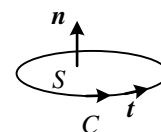
$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (2-9)$$

である。伝導電流密度 \mathbf{i} と $\text{rot } \mathbf{H}$ が等しい。 rot は回転と言うので、 $\text{rot } \mathbf{H}$ を回転しているベクトルと想像するかもしれないが、図 2-11 の場合、 $\text{rot } \mathbf{H}$ つまり \mathbf{i} は回転していない。そして、(2-9) は空間の各点で成立つから電流が流れていない棒の外では $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ である。 $\text{rot } \mathbf{H}$ は空間の各点ごとの小さな閉路に対するうず (回転) を回転軸の向きのベクトルとして定義している。電流のまわりの \mathbf{H} がループしていることと混同しないようにしよう。

$$V_e(t) = \int_C \mathbf{E}' \cdot \mathbf{t} \, dl = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} \, dl = - \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4')$$

変圧器起電力 速度起電力

C, n 右ねじ



④'

ここで、 $V_e(t)$: 閉路 C に生じる起電力[V]

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2-10)$$

$$\phi(t) : \text{磁束[Wb]} \quad \phi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-11)$$

ファラデーの電磁誘導の法則である。磁束線のことを磁束と呼び、(2-11)の磁束を全磁束と呼ぶこともある⁽²⁹⁾。④にストークスの定理を適用すると

$$V_e'(t) = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-12)$$

が得られる。これには変圧器起電力しか含まれていない。④'は(2-12)を含んだ、より一般的な式

である。つまり、マクスウェルの方程式以外の内容を含む。そう言うと難しく聞こえるかもしれないが、高校で習う線路の上を銅棒が動くような場合にも適用できるようにしたいのである。

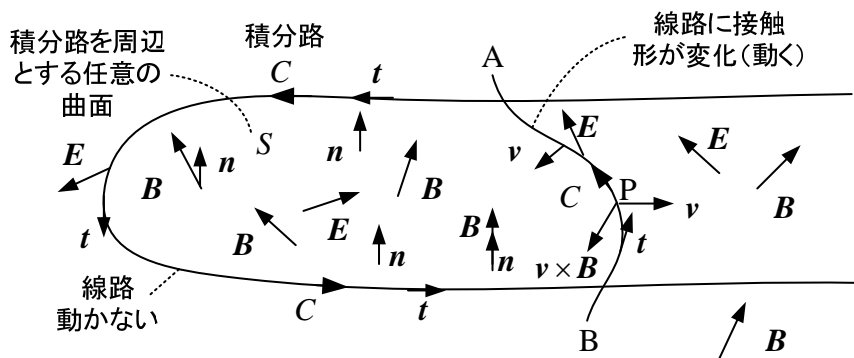


図 2-12 線路に接触しながら形を変え動く線路 AB

図 2-12 は、動かない線路に接触して、線路 AB が形を変えて動いているとする。空間には磁束密度 B の磁界がベクトル場を作っている。 B は場所と時間によって変化する。④に示したように、 B の時間変化は至る所に電界 E のベクトル場を作る。線路 AB の一部を含む図の積分路 C (閉路) を考え、この C 上で電界 E を集めた値は、④の**変圧器起電力**となる。これは、④の起電力 V_e の一部で、全てではない。速度 v (場所と時間で値は違う) で動く部分に、別の起電力が生じ、この分を加えなくてはならない。動く部分の起電力はベクトル $v \times B$ の線積分で求められ、**速度起電力**とよばれる。当然動かない部分には速度起電力は生じない。

磁束密度の時間変化がない場合には、④で、 $\partial B / \partial t = 0$ としてよい。このとき速度起電力は $-d\phi / dt$ に等しい。高校時代に vBl と $-d\phi / dt$ の 2 通りの方法で起電力を求めた人もいるだろう。なお、分りやすいように線路を考えたが、線積分を行う閉路 C を決めればよいので、電流を流さない糸でもよいし、想像上の道でも起電力は生じる。起電力が生じて、物がなければ電流が流れないだけである。

図 2-13 に示すように磁束密度 B の中で、速度 v で磁界を切るように棒を動かすと、棒に速度起電力が生じる。速度起電力の実際の向きはフレミングの右手の法則で求まる ($v \times B$ で考えてもよい)。速度起電力は電池に対応させると分りやすい。棒に図の極性の速度起電力 V_e (正)の電池ができると考えよう。速度起電力を測る線積分の t は $v \times B$ の向きに選んでいる。

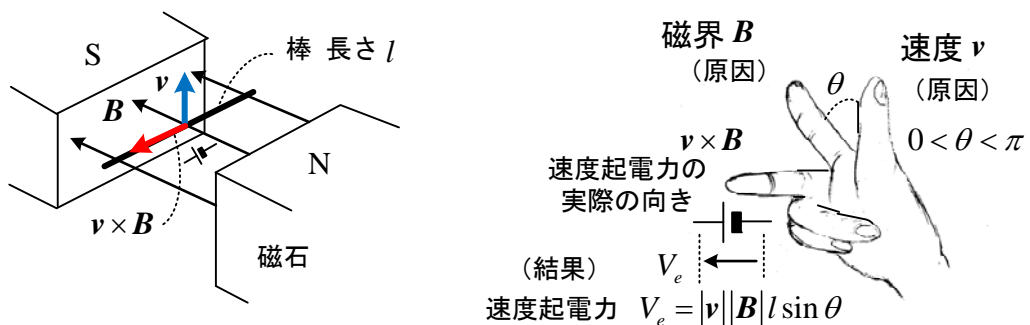


図 2-13 フレミングの右手の法則

知らなくても困ることはないだろうが(2-10)について述べておく。 C の一部(全部でもよい)が磁界の中を光速に比べて無視できる速度で動くとき、 C 上で動く任意の P 点から観測する P 点の電界を \mathbf{E}' とする。 \mathbf{E}' を地球上に固定した静止座標系の量 $\mathbf{E}, \mathbf{v}, \mathbf{B}$ (全て場所と時間の関数)で表すと(2-10)となるのが特殊相対性理論から導かれる⁽¹⁵⁾⁽²⁸⁾。起電力は、たくさんの点の電界 \mathbf{E}' を C 上で線積分して得られ、それが④になる。 P 点から観測するとき、 P 点の \mathbf{v} のことはわからず、単に電界が \mathbf{E}' として観測され、静止座標系で観測する P 点の電界 \mathbf{E} とは値が異なる。観測する座標系により電界と磁界は相互に入れ替わるのである。 \mathbf{v} は点で違うから座標系も点ごとに違う。起電力は動いている回路で観測されるので \mathbf{E}' の線積分となる。磁束 ϕ を用いると、驚くことに

$$V_e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2-13)$$

と非常に簡単な式になることが以下の様にして導出できる。実に不思議である。

図 2-14 に示すように磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ のベクトル場を速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (点で異なる)で動く閉路を考える。すなわち時間 t での閉路 C が、時間 $t + \Delta t$ での閉路 C' に動くとする。 S_1, S_2 は、それぞれ C, C' を周とする任意の面である。

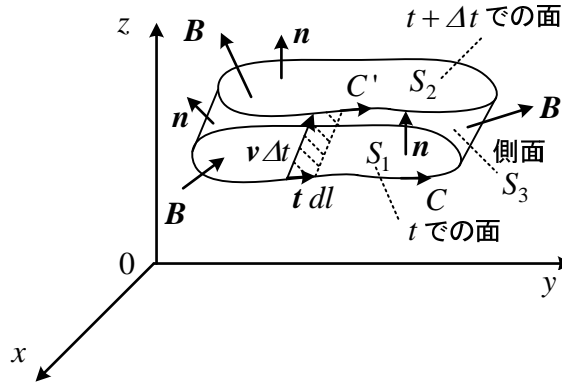


図 2-14 磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ のベクトル場を速度 \mathbf{v} (C 上の点で異なる)で動く閉路

S_1, S_2 を通る磁束の変化分を $\Delta\phi$ とすると、(2-11)より

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{S_2} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-14) \end{aligned}$$

となる。第1項と第4項の和は0である。時間 $t + \Delta t$ における $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ を用いて、 S_1, S_2 と、その側面 S_3 からなる閉曲面に磁束密度の連続性を表す②を適用すると次式がえられる。 S_1 では外向きの法線ベクトルを取らないといけないので、マイナスがつく。②は同じ時間で適用しなくてはならない。

$$\int_S \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{S_1} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

これを(2-14)の右辺 3, 4 項に代入すると

$$\Delta\phi = \int_{S_1} \{\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)\} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_3} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。図より S_3 においては、接線 \mathbf{t} と速度 \mathbf{v} の外積 $\mathbf{t} \times \mathbf{v}$ が外向きの \mathbf{n} の向きと一致し、 $\mathbf{t} d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$ の大きさが平行四辺形の面積だから dS と考えられるので

$$\mathbf{n} dS = \mathbf{t} d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$$

が成り立つ。よって

$$\Delta\phi = \int_{S_1} \{\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)\} \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \int_C \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) dl$$

テイラー展開した

$$\mathbf{B}(t+\Delta t) \approx \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t$$

を代入する ((1-26)参照)。(Δt)²の項を無視して、

$$\Delta\phi = \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \int_C \mathbf{B}(t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) dl$$

を得る。右辺第2項に公式(1-20)より $\mathbf{B}(t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(t))$ を用いて、次式が得られる。

$$V_e = -\frac{d\phi}{dt} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(t)) \cdot \mathbf{t} dl \quad (2-15)$$

(2-13)がファラデーの電磁誘導の法則で、変圧器起電力と速度起電力の両方を含むことに注意しよう。(2-13)は一見変圧器起電力だけを表しているように思えるかもしれないが、(2-11)で面 S が時間と共に変化することを忘れてはいけない。この面 S の変化が $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の項になるのである。

○ 電荷に働く力

電荷に働く力を述べる。図 2-15 に示すように、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ のベクトル場で、 q [C] の荷電微小粒子が、速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ [m/s] で動いているとき、微小粒子に働く力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ [N] は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad \text{⑤}$$

⑤はローレンツ力(Lorentz force)と呼ばれている。電荷 q は、自由電荷密度を荷電微小粒子全体で集めた量である。

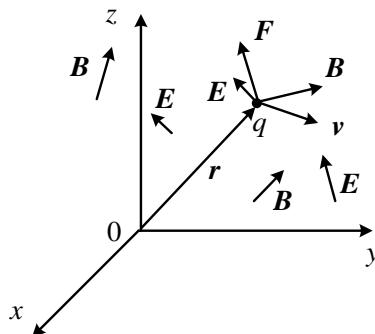


図 2-15 電荷に働く力

q とともに \mathbf{v} で動く点から見れば、電界 \mathbf{E}' が観測されるだけで、止まっている電荷に $q\mathbf{E}'$ のクーロン力が働いている。 \mathbf{E}' は(2-10)と同じである。

実用上重要な電流に働く力をローレンツ力より導く。

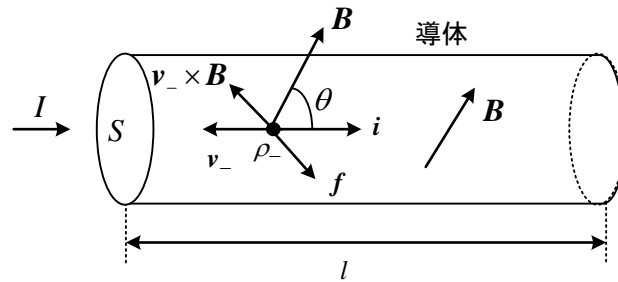


図 2-16 電流に働く力

図 2-16 のように、磁束密度 \mathbf{B} [T] の磁界中で断面積 S [m²] の導体に一様に伝導電流密度 \mathbf{i} [A/m²] の電流が流れているとする。 \mathbf{i} は(2-4)で与えられ、自由電荷密度 $\rho_- < 0$ だから、 \mathbf{i} の向きは図のようになる。⑤のローレンツ力より、 ρ_- に働く単位体積当たりの力 \mathbf{f} [N/m³] は

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2-16)$$

となる。 $\rho_- < 0$ だから、 \mathbf{f} の向きは図のようになる。(2-4)を(2-16)へ代入して

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (2-17)$$

となる。断面積 S [m²]、長さ l [m] の体積 V の部分の導体に働く力 \mathbf{F} [N] は \mathbf{f} がどこでも一定と仮定して単純に体積を掛け、 $S\mathbf{i} = \mathbf{I}$ とおいて

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{i} \times \mathbf{B} dV = S l \mathbf{i} \times \mathbf{B} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} l \quad (2-18)$$

で求められる。 \mathbf{i} と \mathbf{B} のなす角を θ とすると

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = (|\mathbf{i}| |\mathbf{B}| \sin \theta) \mathbf{e} \quad (2-19)$$

ここで、 \mathbf{e} は \mathbf{f} 方向の単位ベクトルである。大きさを $|\mathbf{F}| = F, |S\mathbf{i}| = |\mathbf{I}| = I, |\mathbf{B}| = B$ とおくと、

$$F = l I B \sin \theta \quad (2-20)$$

となる。 \mathbf{i} と \mathbf{B} が直交している場合、 $\theta = \pi/2$ だから、

$$F = l I B \quad (2-21)$$

となる。実際の向きについては**フレミングの左手の法則**として良く知られている。

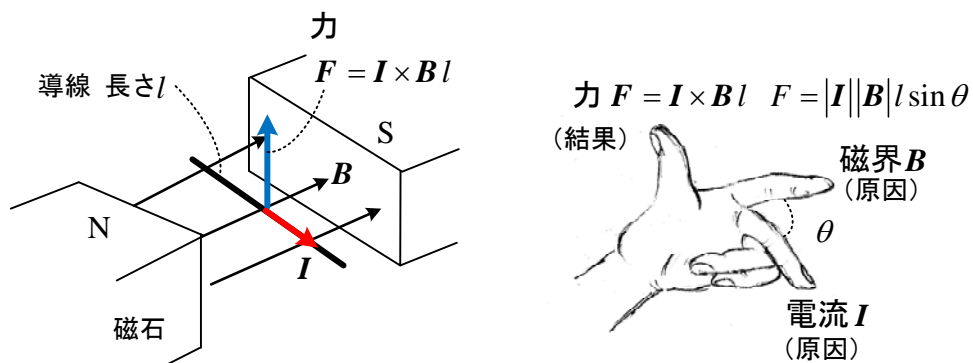


図 2-17 フレミングの左手の法則

○ 物質の式

これまで述べたマクスウェルの方程式は、空間を占める物質が何であっても成り立つ。実は物質がある場合を想定して、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ の4つの量を考えているのである。

多くの物質に関して、以下の関係式が成り立つとして問題を解くことが多い。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{⑥}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad \text{⑦}$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \kappa (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t)) \quad \text{⑧}$$

ここで、 ε : 誘電率 [F/m]、 μ : 透磁率 [H/m]、 κ : 導電率 [S/m]

⑥～⑧の使用に関し、以下に注意事項をまとめておく。

(1)真空中（空気中もほぼ等しい）の ε 、 μ 、 κ の値は、以下のようになる。

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}, \quad \kappa_0 = 0$$

真空中の ε_0 と μ_0 は、真空中の光速 c と次の関係がある。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

(2) 空間には、空気の部分、金属の部分、絶縁物の部分、電源の部分、動いている部分などいろいろの状況がある。従って、その部分ごとに、 ε 、 μ 、 κ は異なる定数（多くの場合）として扱う必要がある。永久磁石については、⑦は成立しない。

(3) ⑧は考える物質（空間）ごとに適宜組み合わせて使用する。例えば、動いていない金属中では $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$ でよい。

表 2-1 誘電率、透磁率、導電率の目安

	誘電率 ε [F/m]	透磁率 μ [H/m]	導電率 κ [S/m]
真空	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\mu = \mu_0$	$\kappa = 0$
空気	$\varepsilon \approx \varepsilon_0$	$\mu \approx \mu_0$	$\kappa \approx 0$
銅 (導体)	ε_0 程度*	$\mu \approx \mu_0$	5.76×10^7
鉄 (磁性体)	ε_0 程度*	$\mu \approx 5 \times 10^3 \mu_0$	1.03×10^7
磁器 (誘電体)	$\varepsilon \approx 3000 \varepsilon_0$ チタン酸バリウム	$\mu \approx \mu_0$	10^{-14}

* 金属（銅や鉄）の誘電率は測定できず、推定値である。

伝導電流密度 \mathbf{i} に関しては,

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_c \quad (2-22)$$

と空間を 2 つに分けて考えることがある。 \mathbf{i}_0 は伝導電流ではあるが問題を解くときに既に値がわかっている電流で、**強制電流**とよぶ。一方、 \mathbf{i}_c は⑧の関係を利用して問題を解く伝導電流である。導電率 κ (カッパ) は σ の記号で書かれることが多いが、面電荷密度に σ の記号を使うのでこの記号とする。 \mathbf{E}_e は電池の等価な電界であるが、説明すべきことが多いので第 3 章で詳しく述べる。

真空中や空気中の場合は $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$ (一定) だから、数学的に言って、 \mathbf{E} か \mathbf{D} 、あるいは \mathbf{B} か \mathbf{H} のいずれかだけを用いて問題を解くことができる。 ϵ, μ の異なる物質が組み合わせられていたり、 ϵ, μ が一定でない物質については、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ を使う必要がある。なお、⑥ ~ ⑧ は測定に基づく近似式であり、自然界の法則を記述するマクスウェルの方程式やローレンツ力とは同列に扱うことはできない。

速度 \mathbf{v} で動いている点については、⑥の関係は、次式で表される。以下の関係も含めて、これらはローレンツ変換とアインシュタインの**特殊相対性理論**から導かれるものである⁽¹⁵⁾⁽²⁸⁾。

$$\mathbf{D} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c^2} = \epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2-23)$$

真空中の光速 c は大きな値であるから、左辺の第 2 項は小さい。右辺の第 2 項であるが、誘電体が動くような問題を扱わない限りこの項を考える必要はない。よって、⑥を使うことが多い。

速度 \mathbf{v} で動いている点については、⑦の関係は、次式で表される。

$$\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = \mu(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad (2-24)$$

真空中の光速 c は大きな値であるから、左辺の第 2 項は小さい。一般に右辺の第 2 項は第 1 項に比べて十分小さいので、たとえ動いている物質中でも⑦を用いてよい。

ところがオームの法則については、速度 \mathbf{v} で動いている点について、新たに増える等価な電界 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を考慮する必要があるが、⑧ではこれを考慮している。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は速度起電力でも現れる項である。③の \mathbf{i} に**対流電流** $\rho\mathbf{v}$ を含んでいる場合は、 $\mathbf{i} - \rho\mathbf{v} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ となり、左辺は伝導電流だから、⑧と等しくなる。最初から、③で \mathbf{i} の代わりに $\mathbf{i} + \rho\mathbf{v}$ (\mathbf{i} は伝導電流) としたらわかりやすいだろうが、マクスウェルの方程式が複雑に見える。本テキストでは、対流電流は考えない。

○ 電位とベクトルポテンシャル

マクスウェルの方程式を使って問題を解く場合、ポテンシャルを利用することがある。

(付 11)の $\text{div}(\text{rot}\mathbf{A}) = 0$ が常に成り立つことから②より

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2-25)$$

と置くことができる。 \mathbf{A} は**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる。

(2-25)を④に代入すると次式が得られる。

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

(付 10)より、 $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$ が常に成り立つことから、次式が得られる。 $-\text{grad}V$ の-は+でもよいが慣用による。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-26)$$

ここで、

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \equiv -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) \quad (2-27)$$

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \equiv -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-28)$$

と定義し、 \mathbf{E}_c : **クーロン電界**, \mathbf{E}_b : **誘導電界** と呼ぶことにする。このような言葉の定義は教科書では見られないようであるが、一般に使用されているクーロン電界 (クーロン電場⁽²⁵⁾) や誘導電界の意味と大差ないと考えている。少ない例ではあるが、宮副は、端子が開放されたコイルの電磁誘導に関し以下の様に述べている⁽¹³⁾。“導体中に誘導電界が誘導されると電荷が動き、電荷分布が変わるので、クーロン界ができる”。また、“電流が0のときオームの法則から電界も0で、誘導電界とクーロン界はつりあっている”。この場合のクーロン界は時間的に変化し、静電界ではない。(2-26)より電界は次式で表せる。なお、 \mathbf{E}_c , \mathbf{E}_b は後述のローレンツゲージを前提とする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \quad \textcircled{9}$$

定義した(2-27)のクーロン電界では、時間的変化も考えているので、時間的変化がないとした静電界を特別な場合として含む。 $V(\mathbf{r}, t)$ を**電位**と呼ぶ。物理学で V はスカラポテンシャルとよばれ、 ϕ の記号で書かれることが多い。

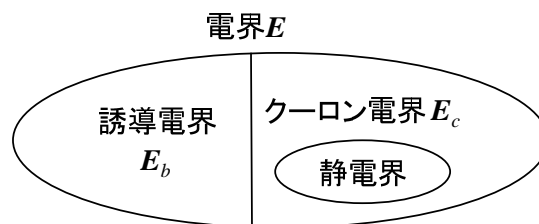


図 2-18 電界の分類

(2-27)の定義より、 $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$ が常に成り立つことから次式が成立つ。

$$\text{rot} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (2-29)$$

以下に、電荷がクーロン電界を作り、電流が誘導電界を作ることを説明しよう。電位とベクトルポテンシャルを定義するとき、②と④を用いた。よって、①と③を使う必要がある。⑥、⑦、⑧の ϵ, μ, κ は、ここで考える空間の全領域で一定と仮定する。

③を⑥, ⑦, (2-25), (2-26)を用いて \mathbf{A}, V だけの式にすると

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{i} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \quad (2-30)$$

が得られる。ここで, (付 13)の

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を用いると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{i} + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}) \quad (2-31)$$

となる。①については,

$$\varepsilon \text{div}(-\text{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = \rho$$

である。ここで(付 12)の

$$\text{div}(\text{grad} V) = \nabla^2 V$$

を用いると, 次式が得られる。

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2-32)$$

(2-25)より $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の回転は $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ として与えられているが, ヘルムホルツの定理より, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の発散は自由に与えることができるので, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $V(\mathbf{r}, t)$ に次の条件を課す。

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mu \varepsilon \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2-33)$$

これは**ローレンツゲージ**(ローレンツ力とは別人)と呼ばれる。このとき(2-31), (2-32)は次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (2-34)$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \quad (2-35)$$

ローレンツゲージを用いると, 時間変化する場合においても, 電流によってベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ が, 電荷によって電位 $V(\mathbf{r}, t)$ が作られると考えられる。(2-34), (2-35)の解が**遅延ポテンシャル**として導出されている⁽²⁾⁽²⁸⁾。この解は第7章で述べる。

(2-34), (2-35)はローレンツゲージが前提であった。飯田は, 広い物理学の解析の基礎となる条件はローレンツゲージ以外になく, 物理的条件が与えられた場合, 物理的実在としての $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $V(\mathbf{r}, t)$ は一意に決ると述べている⁽⁵⁾。

(2-34)の div をとり, (2-35)を時間で偏微分して, ⑩の電荷保存の法則

$$\text{div } \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2-36)$$

に代入すると次式が得られる。

$$(\nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2})(\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \mu \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t}) = 0 \quad (2-37)$$

ローレンツゲージは電荷保存則と対応している。山下は, (2-33)で関係づけられているから, (2-34)か(2-35)のどちらか都合の良い方を解けばよいと述べている⁽¹⁰⁾。

○* エネルギーと電力

③より

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

であった。③の各項と \mathbf{E} の内積をとって、領域 V について体積分を行うと

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} dV = 0 \quad (2-38)$$

である。ここで、(付7)より

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H}$$

が成り立つ。④を代入すると

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \quad (2-39)$$

であり、(2-38)に代入すると

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = 0 \quad (2-40)$$

⑧より

$$\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e) \equiv \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) \quad (2-41)$$

とおくと、

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{\kappa} - \mathbf{E}_s \right) dV$$

となる。これを(2-40)に代入し、左辺の第4項に(1-55)のガウスの定理を用いて、次式が得られる。

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}_s dV = \int_V \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_V \frac{\partial w_e}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial w_m}{\partial t} dV + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad [\text{W}] \quad (2-42)$$

これは閉曲面 S で囲まれた領域 V についての電力の保存則を表している。

左辺：発電あるいは電動にともなう電力、電池が供給する電力

右辺第1項：抵抗で消費される電力

右辺第2項：単位時間に蓄積される電界のエネルギー(すなわち電力)

右辺第3項：単位時間に蓄積される磁界のエネルギー(すなわち電力)

右辺第4項：領域 V から空間へ放射される電力

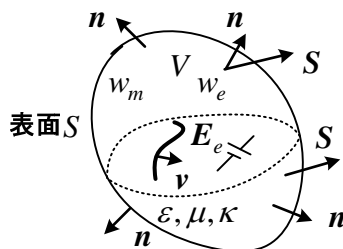


図 2-19 電力の保存

ここで、⑥、⑦を用い、 ε が定数の場合に、以下の式が成り立つ。 μ も同様である。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad [\text{J/m}^3] \quad : \text{単位体積中の電界のエネルギー} \quad (2-43)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad [\text{J/m}^3] \quad : \text{単位体積中の磁界のエネルギー} \quad (2-44)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W/m}^2] \quad : \text{ポインティングベクトル} \quad (2-45)$$

$\mathbf{S} [\text{W/m}^2]$ はポインティングベクトルと呼ばれ、放射される単位面積中の電力を表す。

○* 物質に働く力

ミクロな場合を含めて⑤のローレンツ力が電荷（分極電荷を含む）に働く力を表している。しかし、電荷だけを用いて物質に働く電磁力を計算することは困難である。天下りの的ではあるが、自由電荷密度 ρ と伝導電流密度 \mathbf{i} を用いて、物質全体に働く電磁力 \mathbf{F} は物質を囲む領域 V について体積分を行って次式で求められる⁽¹⁵⁾⁽¹⁹⁾⁽²³⁾。

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu) dV \quad (2-46)$$

$$= \int_V [\text{div} \mathbf{T}_x, \text{div} \mathbf{T}_y, \text{div} \mathbf{T}_z] dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} dV \quad (2-47)$$

$$\text{ただし、} \quad E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad H^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \quad (2-48)$$

(2-46)の右辺第3項や第4項にそれぞれ分極電荷や磁極に働く力が考慮されている。(2-46)では、例えば誘電率 ε_1 の物質が誘電率 ε_0 の真空中にあるとき、 ε が境界面で変化するから、 $\text{grad} \varepsilon$ の項の体積分では ε_1 だけでなく ε_0 も計算結果に含まれることになる。**磁性体**についても同様である。(2-47)の $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z$ は**マクスウェルの応力**と呼ばれ、後で導出するが、次式で与えられる。(2-47)の右辺第2項は物質中では他の項に比べて小さく通常は無視できる⁽²³⁾。

$$\mathbf{T}_x = \left[E_x D_x - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + H_x B_x - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad E_x D_y + H_x B_y, \quad E_x D_z + H_x B_z \right] \quad (2-49)$$

$$\mathbf{T}_y = \left[E_y D_x + H_y B_x, \quad E_y D_y - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + H_y B_y - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad E_y D_z + H_y B_z \right] \quad (2-50)$$

$$\mathbf{T}_z = \left[E_z D_x + H_z B_x, \quad E_z D_y + H_z B_y, \quad E_z D_z - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + H_z B_z - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right] \quad (2-51)$$

ここで、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z$, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z$

(2-49)~(2-51)を用いて, 3行3列の行列で表した \mathbf{T} は**マクスウェルの応力テンソル**とよばれている。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x \\ \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

ここで, $T_{xx} = E_x D_x - (1/2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + H_x B_x - (1/2)\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$, $T_{xy} = E_x D_y + H_x B_y$ などである。ガウスの定理を用いて, (2-47)の第1項は面積分で表すこともできる。

$$\int_V [\text{div} \mathbf{T}_x, \text{div} \mathbf{T}_y, \text{div} \mathbf{T}_z] dV = \int_S [\mathbf{T}_x \cdot \mathbf{n}, \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{n}, \mathbf{T}_z \cdot \mathbf{n}] dS \quad (2-53)$$

$\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]$ は表面 S の外向き単位法線ベクトルである。(2-53)の成分を F_x, F_y, F_z とすると

$$F_x = \int_V \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_S (T_{xx} n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z) dS \quad (2-54)$$

$$F_y = \int_V \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) dV = \int_S (T_{yx} n_x + T_{yy} n_y + T_{yz} n_z) dS \quad (2-55)$$

$$F_z = \int_V \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) dV = \int_S (T_{zx} n_x + T_{zy} n_y + T_{zz} n_z) dS \quad (2-56)$$

となる。 V の表面 S は閉曲面である。具体的な適用は第4章で詳しく述べる。

物質内部の各点に働く力は**電気ひずみ**や**磁気ひずみ**などのため複雑である⁽²³⁾。電気ひずみや磁気ひずみを無視した場合, 電磁力の体積密度 f [N/m^3] は次式で与えられると言われている⁽¹⁹⁾⁽²³⁾。

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu \quad (2-57)$$

ただし, 電気ひずみと磁気ひずみは物質全体で積分すると0になる。一般に電界に関する力は磁界に関する力に比べて小さい。電気ひずみや磁気ひずみを無視した場合, 物質内のある部分に働く力は, その部分の表面(閉曲面)を面積分して(2-54)~(2-56)より求められる((2-47)の第2項は無視できる)。小さな体積領域に分割して解析する**有限要素法**では, 力の計算に**節点力法**が用いられているようである。これにはマクスウェルの応力が関係する。

(2-46)と(2-47)が等しくなることを以下に示そう。(2-49)より

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}_x &= \frac{\partial}{\partial x} (E_x D_x + H_x B_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y + H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z + H_x B_z) \\ &= E_x \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + H_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

マクスウェルの方程式①, ②を用いて

$$\text{div} \mathbf{T}_x = E_x \rho + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

ところで

$$\mathbf{D} \times \text{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ D_x & D_y & D_z \\ \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z & \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x & \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y \end{vmatrix}$$

よって、マクスウェルの方程式③, ④を用いて, x 成分について

$$D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = -(\mathbf{D} \times \text{rot} \mathbf{E})_x + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} = -(\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{H})_x + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = -(\mathbf{B} \times (\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}))_x + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

を得る。() $_x$ は x 成分を表す。従って

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}_x &= E_x \rho + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ &\quad + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

等方性物質については, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ より

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}_x &= E_x \rho + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x \\ &= E_x \rho + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x - \frac{E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x \end{aligned}$$

同様に, $\text{div} \mathbf{T}_y, \text{div} \mathbf{T}_z$ が求まるので

$$[\text{div} \mathbf{T}_x, \text{div} \mathbf{T}_y, \text{div} \mathbf{T}_z] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{E^2}{2} \text{grad} \varepsilon - \frac{H^2}{2} \text{grad} \mu + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

となる。以上により, (2-46)と(2-47)は一致する。

○* 境界条件

異なる物質が空間を占めるとき, その境界ではどのような関係式が成り立つであろうか? この関係式もマクスウェルの方程式から導かれる。①~④で div の式では垂直成分, rot の式では接線方向成分について境界条件が出てくる。

まず, 磁界 \mathbf{H} , 磁束密度 \mathbf{B} については, 境界面の任意の点について次式の境界条件が成り立つ。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s \quad (2-58)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (2-59)$$

ここで, $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ はそれぞれ境界面の点 \mathbf{P} の媒質 1 側, 2 側の磁界である。 \mathbf{n} は境界面に垂直な単位法線ベクトルで, 図の様に媒質 1 から 2 に向けた向きである。 \mathbf{i}_s [A/m] は境界面に流れる単位長

あたりの面電流密度を表す。図 2-20(a)には、媒質 1 から媒質 2 に移ったとき磁界が変化する様子
を示している。本来 P 点近傍の磁界だから、(b)のように 2 つに分けて考える。 $n \times H_2, n \times H_1$ は
外積の定義より、いずれも境界面上にある。これらの差が面電流密度だから、(c)の図が得られる。
 $n \times H_2, n \times H_1$ の大きさは、それぞれ H_2, H_1 の面に平行な方向 (接線方向) 成分の大きさである。

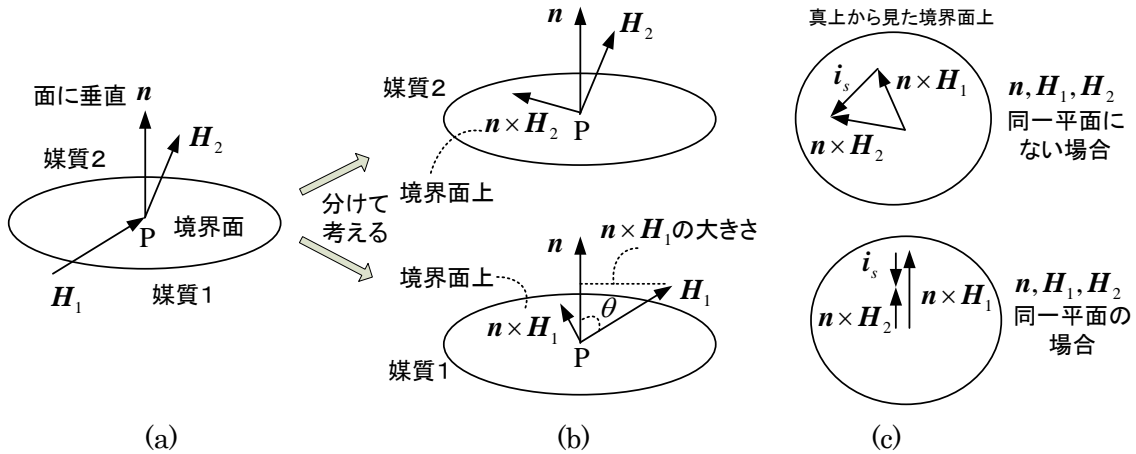


図 2-20 磁界 H の境界条件

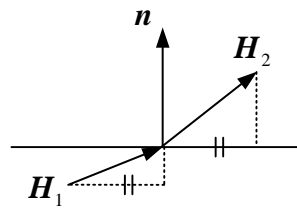


図 2-21 n, H_2, H_1 を含む面で切った断面図 (面電流がない場合)

$|n \times H_1| = |n| |H_1| \sin \theta = H_1 \sin \theta$ である。面電流があると、 n と H_2 が作る面と、 n と H_1 が作る
面は必ずしも同じにならないだろう。面電流が流れていない場合には、 n, H_2, H_1 は同一平面
にある。この場合を図 2-21 に示す。この場合、磁界の接線成分は等しくなる。(2-58)の証明は例
題 1 で述べる。

磁束密度 B については、図 2-22 に示すように垂直方向成分が等しいことを表している。
 $B_1 = \mu_1 H_1, B_2 = \mu_2 H_2$ より、 B_1 と H_1 は同じ向き、 B_2 と H_2 は同じ向きである。

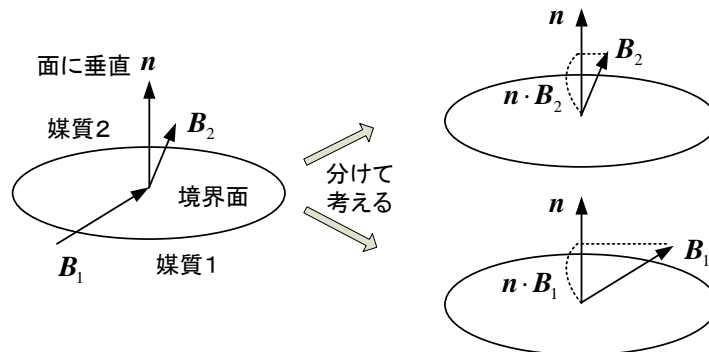


図 2-22 磁束密度 B の境界条件

次に、媒質1が完全導体($\kappa_1 = \infty$)の場合を述べる。完全導体中には電界は存在しないので、交流磁界の場合には $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ となる。よってこの場合(2-58),(2-59)より次式が成り立つ。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{i}_s \quad (2-60)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (2-61)$$

(2-61)より \mathbf{B}_2 は境界面上になくなくてはならない。よって、 $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ より、 \mathbf{H}_2 も境界面上になくなくてはならない。つまり、磁界や磁束密度の垂直成分は0である。

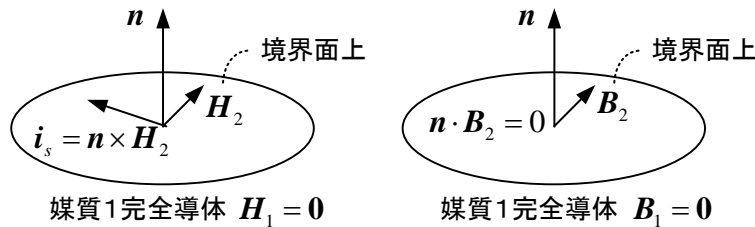


図 2-23 \mathbf{H}, \mathbf{B} の境界条件 (完全導体の場合)

次に、電界 \mathbf{E} 、電束密度 \mathbf{D} については、境界面の任意の点について次式の境界条件が成り立つ。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \quad (2-62)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \sigma \quad (2-63)$$

ここで、 $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$ は境界面の面自由電荷密度である。

(2-62)は面電流が流れていない場合の磁界と同じ関係である。電界の面の接線方向成分は境界面の両側で等しいことを示している。 $\mathbf{n}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1$ は同じ平面内にある。これは磁束の時間変化が境界面で有限であることから導ける⁽¹³⁾。この平面の断面で、 $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1$ は図 2-24 の様になる。電束密度 \mathbf{D} の場合には面に垂直な成分の差が、境界面の σ に等しいことを示している。⑥より $\mathbf{n}, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1$ は同じ平面内にある。(2-63)の証明は例題2で述べる。

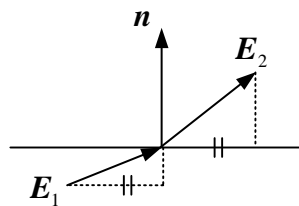


図 2-24 電界 \mathbf{E} の境界条件

次に、媒質1が完全導体($\kappa_1 = \infty$)の場合を述べる。完全導体中には電界は存在しないので、 $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ となる。よって、次式が成り立つ。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \quad (2-64)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma \quad (2-65)$$

(2-64)より、 \mathbf{E}_2 は \mathbf{n} と同じ方向であることを示している。つまり電界は面に垂直である。

$\mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2$ の関係があるので、電束密度も面に垂直である。この様子を図 2-25 に示す。 σ の正、

負に対し、(2-65)より電束密度の向きが決まる。

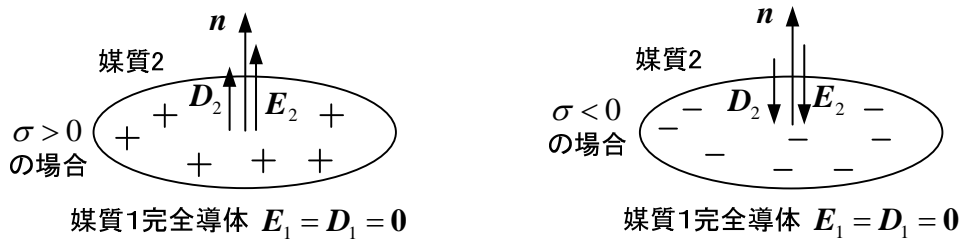
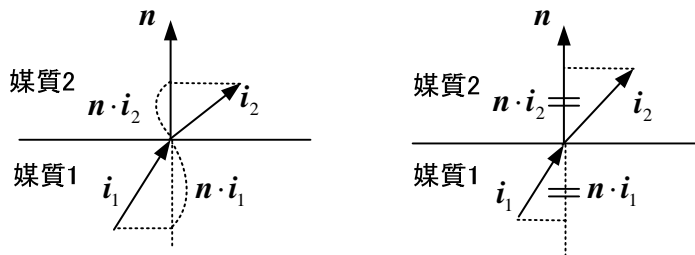


図 2-25 E, D の境界条件 (片方が完全導体の場合)

最後に伝導電流密度について述べる。電流密度に関しては、電荷保存の法則より次式が成り立つ。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2-66)$$

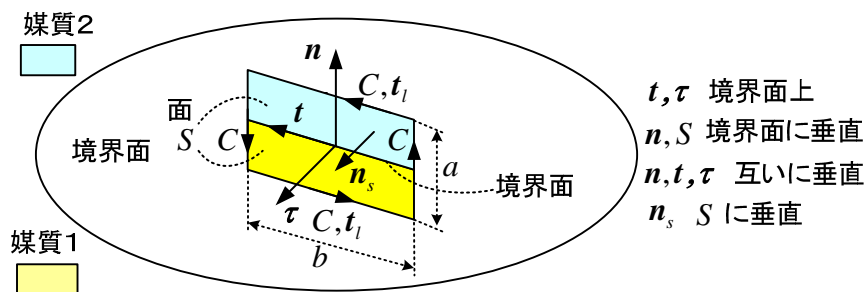
σ は境界面の面自由電荷密度である。 $\mathbf{n}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1$ は同じ平面内にあり、オームの法則 $\mathbf{i}_1 = \kappa_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{i}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2$ が成り立つので、 $\mathbf{n}, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1$ も同じ平面内にある。図 2-26 はこの平面での断面図である。媒質 1 が完全導体の場合、図 2-24 に示したように電界は面に垂直だから、 $\mathbf{i}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2$ より電流密度も面に垂直となる。



(a) 境界面で電荷の時間変化あり (b) 境界面で電荷の時間変化なし

図 2-26 電流 \mathbf{i} の境界条件

例題1 透磁率の異なる境界面において、 $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ より磁界 \mathbf{H} の境界条件を求めよ。



(解) 図のように境界面をまたいで幅 a, b の長方形の積分路 C をとり、 \mathbf{H} についてストークスの定理を適用する。幅 a を b に対して十分小さく取ると、 a についての線積分は無視できるので

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t}_l \, dl = \int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_s \, dS = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_s \, dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_s \, dS$$

$$\therefore (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} b = \mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\tau} a b + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\tau} a b \quad (\mathbf{H}_2 \text{ については } \mathbf{t}_1 = \mathbf{t})$$

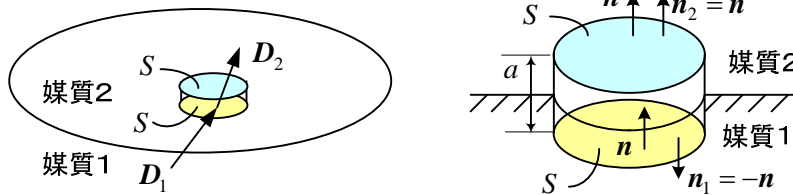
$a \rightarrow 0$ のとき、 $\mathbf{i} a = \mathbf{i}_s$ [A/m] が境界面の単位長当たりの電流密度として存在するとし、次式が得られる。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は有限とすると、 $a \rightarrow 0$ のとき $a \partial \mathbf{D} / \partial t \rightarrow \mathbf{0}$ である。

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ だから、ベクトルの公式より、 $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}) = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1))$ である。任意の $\boldsymbol{\tau}$ について成立つことから次式が得られる。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s$$

例題2 $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ より、電束密度 \mathbf{D} の境界条件を求めよ。



(解) 図のように境界をまたいで厚さ a の薄い円板状の体積 V をとり、それにガウスの定理を適用する。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV$$

左辺は a を非常に小さくとれば、側面の積分は 0 となり、上面と下面のみの積分となる。円板の面積 S を小さくして、その面積 S 内では \mathbf{D} は一様と考えられるようにすると

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 S + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 S = \rho a S = \sigma S$$

σ は面自由電荷密度である。下の面では法線ベクトル \mathbf{n}_1 は \mathbf{n} と向きが反対だから

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \sigma$$

○ いろいろな場合の問題の解き方

これまで、一般的に成り立つ式を述べてきた。第3章以降で、いろいろの問題を解いていくが、ここでは、これらの問題を大きく3つの場合に分類しておく。

(1) 静電界と静磁界

電界や磁界が時間的に変化しない場合、 $\partial / \partial t = 0$ において、マクスウェルの方程式と物質の式は電界と磁界が無関係となる。この場合を、**静電界**、**静磁界**という。電気回路で言えば、スイッチを入れて時間が十分経過した直流回路に相当する。

静電界	静磁界
$\text{div} \mathbf{D} = \rho$	$\text{div} \mathbf{B} = 0$
$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

静電界では、時間的に変化しない電荷 ρ が与えられた場合の電界を求めることが中心のテーマである。直流回路にコンデンサが接続されていて時間が十分経過したとき、コンデンサの中の電界を求める問題が典型的な例である。本テキストでは第4章のコンデンサで主に静電界を扱う。

一方、静磁界は時間的に変化しない直流電流 \mathbf{i} が与えられた場合の磁界を求めることが典型的な例である。

静電界、静磁界は、電磁気学の中では比較的理解しやすいテーマである。とは言っても、偏微分方程式を解くことになるから、特別な形状でなければ式で解を求めることは困難である。よって電磁気学の教科書に書かれているのは簡単な形状の場合だけである。一般の場合にはコンピュータを使って数値的に解くことになる。有限要素法などの数値解法が実際に用いられている。

(2) 緩慢に変化する現象

変位電流 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ の作る磁界が、伝導電流 \mathbf{i} の作る磁界に比べて無視できる場合である。他の $\partial / \partial t$ は無視しない。変圧器、電動機、発電機を扱う場合がこれに相当する。また、回路の長さにもよるが周波数がおよそ 1MHz 以下の交流回路が当てはまるであろう。③、③'より

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad , \quad \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-67)$$

を使用する。(2-67)より、 $\text{div } \mathbf{i} = 0$ である。ただし、コンデンサでは $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は無視できず、 $\text{div } \mathbf{i} = 0$ は成立しない。

電磁気では**準定常電磁界**とよばれているが、本テキストでは交流でもスイッチを入れて時間が十分経過した状態を**定常**（電気回路の定義）いうので、緩慢に変化する現象⁽⁹⁾とした。第 3,5,6 章で緩慢に変化する現象を扱う。

(3) 急速に変化する現象

アンテナや伝送路の電波や電磁波を考える場合には、変位電流 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が重要な役割を演じる。本テキストでは、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を考慮した解析を第 7 章で扱う。電気回路の場合には分布定数回路で解析する。分布定数回路では分布したコンデンサを考えることで、等価的に $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が考慮されるとみることができよう。電磁波は交流であれば大なり小なり存在している。

いずれの場合にも適用できる基本的な考え方として**重ね合わせの理**がある。これはマクスウェルの方程式が線形な演算で表されていることによる。すなわち、

$$\text{div } \mathbf{D}_1 = \rho_1 \quad \text{div } \mathbf{B}_1 = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \quad (2-68)$$

$$\text{div } \mathbf{D}_2 = \rho_2 \quad \text{div } \mathbf{B}_2 = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{H}_2 = \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \quad (2-69)$$

なら、 $\text{div } (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{div } (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = 0$

$$\text{rot } (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = -\frac{\partial (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)}{\partial t} \quad \text{rot } (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \frac{\partial (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2)}{\partial t} \quad (2-70)$$

が常に成り立つ。つまり、電荷や電流によって電界や磁界ができるとき、(2-68)、(2-69)に分けて解を求め、そのあとで加算することができる。ただし、マクスウェルの方程式だけでは解は得られず、物質の式を必要とする。このとき透磁率、誘電率、導電率が電界や磁界に依存しないならたとえ時間や空間の関数であっても重ね合わせの理が使えるが、電界や磁界の関数で透磁率、誘電率、導電率が変化するなら重ね合わせの理は使えない。磁束の飽和はその例である。