



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/38873
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-17T00:47:32Z

第3章 電源と抵抗

この章では、電源と抵抗からなる簡単な回路を電磁気学の立場から考えて、第2章で述べた電磁気学の法則がどのように利用できるかを述べよう。また、起電力、電位、電圧、抵抗、導体とは何かについても述べる。

問題を解くには電磁気学の世界地図にある①～⑩の全てを使う必要はなく、必要に応じて用いる。どんな場合に、どの式が必要か、あるいはどんな場合に影響が小さいとして近似できるかを知ることが、これからの勉強である。第2章で述べたように①～⑤は常に成り立つが、⑥～⑧は物質に関する近似式である。回路の式とはやや異なるが、電磁気学では⑧をオームの法則と呼んでいる。

図3-1(a)は、電源に抵抗をつないだ最も簡単な回路である。電気回路では、普通これを(b)図のようにモデル化する。電源は直流電源(電池)か交流電源の場合がある。成り立つ式は、

$$V_e(t) = R_0 I(t) + V(t) \tag{3-1}$$

$$V(t) = RI(t) \tag{3-2}$$

である。この章では電磁気学の法則を使って(3-1), (3-2)を導くことにする。

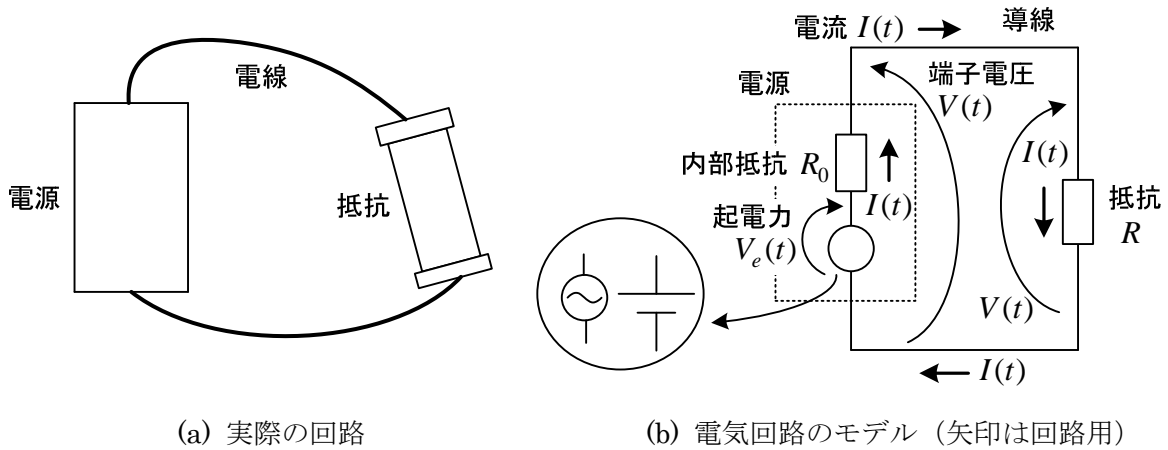


図 3-1 電源につないだ抵抗

○ 電界の分類

まず電界について説明しよう。

$q[C]$ の自由電荷にいろいろの種類力 $F_{all} [N]$ が働いているなら、そこには広い意味での電界があると考え、 $E_{all} [V/m]$ を次式で定義する。

$$E_{all} = \frac{F_{all}}{q} \tag{3-3}$$

E_{all} を働く力によって, 表 3-1 の様に分類する。大きくはクーロン電界 E_c と非クーロン電界 E_{nc} に分ける。⑤のローレンツ力には電池の中の電荷に働く力は含まれていないので, その分も追加している。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}, E_e$ は電界とはよべないが, 電荷に働く力を生むので等価な電界とよぶ。

表 3-1 拡張した電界の分類

クーロン電界 E_c	自由電荷密度 ρ が作る電界 $\text{rot } E_c = \mathbf{0}$ である。電界 E に含まれる。
非クーロン電界 E_{nc}	電流密度 i の時間変化が作る誘導電界 E_b 電界 E に含まれる。
	磁界中の運動による等価な電界 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ④', ⑤, ⑧に含まれる。
	電池の等価な電界 E_e ①~⑤にはない

E_{all} [V/m] は次式で与えられる。

$$E_{all} = E_c + E_{nc}, \quad E_{nc} = E_b + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + E_e \quad (3-4)$$

(3-4)は, 空間の点ごとに各時間で和をとる。場所によっては, 存在しないものもある。例えば E_e は電池の中にしかないので電池以外の点では $\mathbf{0}$ と考える。動く物体があっても, 当然 \mathbf{v} を持つ空間の点だけに $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ があり, 他の点では $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ である。

マクスウェルの方程式④, ④' やローレンツ力⑤及び⑥, ⑧の電界 E は(2-26)で

$$E = E_c + E_b \quad (9)$$

と定義した。一般に電界と呼べるのは E だけなので注意。(3-4)は E を用い

$$E_{all} = E + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + E_e \quad (3-5)$$

とも表せる。 E_{all} により, 電流が流れ, ⑧のオームの法則が成り立つ。

$$i = \kappa(E + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + E_e) \quad \kappa: \text{導電率(真空中 } 0 \text{)} \quad (8)$$

自由電荷密度 ρ が時間的に変化する場合も含めて, ρ の作るクーロン電界 E_c は, (2-27)で $E_c = -\text{grad}V$ により定義した。よって, (2-29)に示したようにたとえ時間的に変化しても

$$\text{rot } E_c(r, t) = \mathbf{0} \quad (3-6)$$

である。一般に**静電界**は時間的に変化しない ρ によってつくられる電界として定義されているので、クーロン電界に含まれる。

⑨, (3-6)を用いると, ④より

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) = \text{rot } \mathbf{E}_c + \text{rot } \mathbf{E}_b = \text{rot } \mathbf{E}_b = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-7)$$

である。(3-7)を見て, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_b$ と考えてはいけない。 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ でも $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ とは言えない。

○ 電位, 電圧

電磁気学の教科書では時間的に変化のない静電界を考えて, 電位や電圧を定義しているようである。しかし, 電気回路では, 時間的に変化する交流回路においても電位や電圧を良く使っているので, どうなっているのか疑問に思う人も多いだろう。

よって, 本テキストでは, 電界の時間変化を許した上で, 電圧や電位を定義しよう。電圧や電位は, (3-6)を満たすクーロン電界 $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$ に対して定義する。(3-6)にストークスの定理を用いるとある瞬間に次式が得られる。

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (3-8)$$

図 3-2(a)で, 図の様に 1 周回る積分路 C とそれで囲まれた任意の開曲面 S を考えている。一方(b)では, 図の様に点 A から点 B へ 2 つの積分路 C_1, C_2 を定義している。(a)と(b)は, 積分路の向きが違い他は同じである。このとき, (3-8)より, 次式が成立する。

$$\int_C \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{C_1} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl - \int_{C_2} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (3-9)$$

積分路の向きが変わると, 単位接線ベクトル \mathbf{t} が反対向きになることに注意せよ。故に

$$\int_{C_1} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{C_2} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-10)$$

この結果は, 点 A から点 B へのクーロン電界の線積分は, 積分路に無関係であることを意味している。すなわち回転が $\mathbf{0}$ のベクトル場(**保存場**とよばれる)の線積分は道に関係しない。

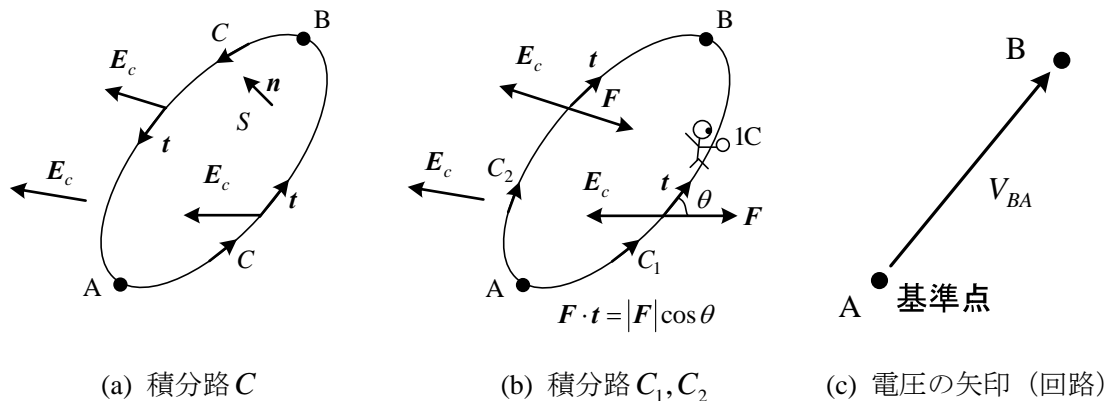


図 3-2 クーロン電界 \mathbf{E}_c の線積分

点 A から見た点 B の電圧 V_{BA} を次式で表すことができる (導出は後述)。

$$V_{BA}(t) = -\int_A^B \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad (= \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl) \quad (10)$$

(3-10)の結果から、この線積分はどのような道を選んでも値は変わらない (C_1, C_2 どちらでもよい)。電気回路では、点 A から見た点 B の電圧 V_{BA} を図 3-2(c)の矢印 (曲線でもよい) を使って表す。この矢印は(b)の \mathbf{t} の向きに相当する。1C の電荷を点 A から点 B まで、電界から受ける力に逆らって $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}_c = -\mathbf{E}_c$ の力を加えて動かすと想像した場合、(10)はある瞬間で見積もられるエネルギー (仕事) を表しており、 \mathbf{F} と \mathbf{t} との内積が力の有効分である。重力場も、道筋によらず持ち上げた高さだけ位置エネルギーが増すので保存場である (摩擦がある面を動かす場合は道筋に依存し保存場ではない)。

無限遠点 (あるいはアース点) から見た点 A, 点 B の電圧を特に**電位**といい、それぞれ次式で表される。

$$V_A(t) = -\int_{\infty}^A \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl, \quad V_B(t) = -\int_{\infty}^B \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-11)$$

電位を用いると、(10)の電圧は次式で表せる。

$$V_{BA}(t) = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = -\left(\int_A^{\infty} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\infty}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl\right) = V_B(t) - V_A(t) \quad (3-12)$$

このことから、電圧は**電位差**ともよばれる。図 3-3 に電圧と電位の関係を示す。図の矢印は回路で用いるもので、電圧の測定の向きを示す(曲線で書いても構わない)。この矢印はベクトルではないが、ベクトルの和と同じ関係になるので覚え易い。

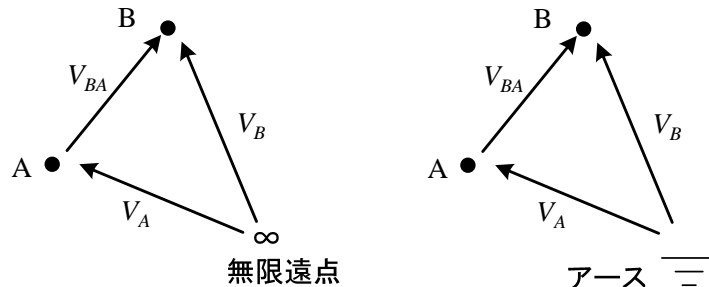


図 3-3 電圧と電位の関係 (回路で使う矢印)

電磁気学のテキスト (高校の教科書を含めて) で、電圧を表すのに両端に矢を書いたものを見ることがある。これは困ったことで、符号で混乱することになる。電気回路で電圧や電流に使う測定の向きを表す矢印 (これが実用的) を電磁気学でも是非導入すべきと考える。

ところで、本テキストではクーロン電界 \mathbf{E}_c は(2-27)より電位 V を用いて次式で定義していた。

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (3-13)$$

ここで、 ∇ はナブラと読み、演算子として良く用いられ、直角座標系では下記の意味がある。

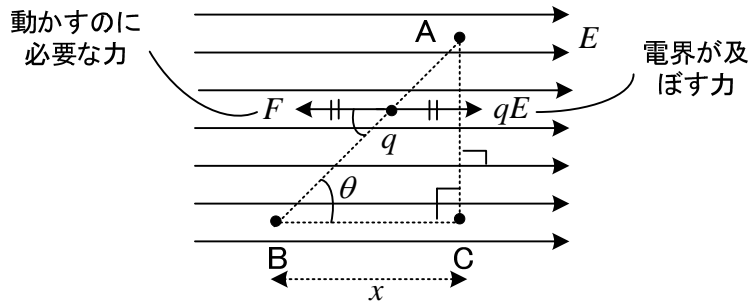
$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3-14)$$

以下に、(3-13)から(10)及び(3-11)を導出する。単位接線ベクトル \mathbf{t} は(1-39)で求まるから

$$\begin{aligned}
-\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl &= \int_A^B (\text{grad}V) \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dl} \right) dl \\
&= \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \quad \text{全微分: } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\
&= \int_A^B dV = V_B - V_A \tag{3-15}
\end{aligned}$$

以上により, ⑩で定めた V_{BA} が(3-13)から導かれた。無限遠点の電位を 0 とすると, A または B を無限遠点とすることで, (3-15)より(3-11)が導ける。

例題 1 図のように一様なクーロン電界中の点 A に $q[\text{C}]$ (ただし $q > 0$) の電荷がある。この電荷を A から B へ動かすときの仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。ただし, 電界の大きさを $E[\text{V/m}]$, BC 間の距離を $x[\text{m}]$ とする。また, q による電界の乱れは無視する。



(解) 求める仕事は動かす道に関係ないので, まず A から C へ動かし, 次に C から B へ動かす。AC 間では, 動かす方向と電界が直交しているので, 仕事は 0 である。C から B へ動かす場合には, 電界と反対方向の力 qE を加えて x 動かす必要がある。このときの仕事は, BC 上では全て同じ力を必要とするので単純に長さを掛ければよく qEx で求まる。よって, $W = qEx$ である。

* A 点から見た B 点の電位 V_{BA} は 1C を運ぶ場合の仕事なので $V_{BA} = Ex$ となる。また, AC 間は仕事が 0 なので, A 点と C 点の電位は等しい。この結果電界に垂直に等電位面ができる。

* AB 間で直接仕事を計算しても良い。加える力は電界 E と逆方向に $F = qE$ で, これを AB に沿って動かすときは, その AB 方向成分だけが仕事になる。よって仕事は, $W = F \cos \theta \times r$, ここで r は AB の長さである。 $r \cos \theta = x$ だから, $W = qEx$ となる。

○ 起電力

起電力(electromotive force)は, 英語で理解できるように電力ではなく力である。閉路 (積分路) C に生じる起電力 V_e を, 非クーロン電界 \mathbf{E}_{nc} を用いて次式で定義する。

$$V_e \equiv \int_C \mathbf{E}_{nc} \cdot \mathbf{t} dl \tag{3-16}$$

C の向き (\mathbf{t} の向き) を起電力の測定の向き (正の向き) という。測定の向きなので, 自由に選んでよい。 \mathbf{E}_{nc} のうち, \mathbf{E}_b は変圧器起電力を作り, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は速度起電力を作り, \mathbf{E}_e は電池の起

電力をつくる。通常、交流の起電力は、 \mathbf{E}_b または $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ により、直流の起電力は \mathbf{E}_e で作られる。クーロン電界については(3-8)より閉路での線積分値が 0 になるから、(3-4)の $\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc}$ を用いて

$$V_e = \int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-17)$$

と表すこともできる。図 3-4 に起電力の積分路を示す。 \mathbf{E}_{nc} は \mathbf{E}_{all} でもよい。

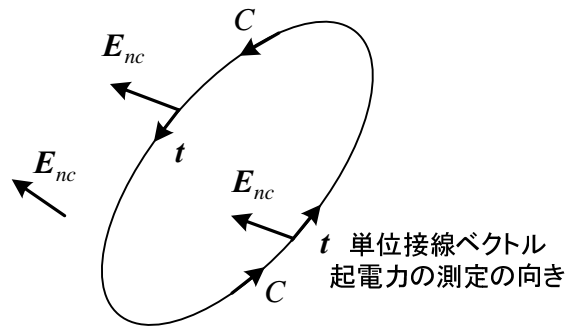


図 3-4 起電力の積分路

以上の様に、**電圧はクーロン電界で定義し、起電力は非クーロン電界で定義した**。従って、両者は根本的に違うものである。ところが電圧と起電力の言葉をきちんと使い分けている人は少ないように思われる。つまり、電源の起電力と言うこともあるが、電源電圧と言うこともある。これは後で述べるように内部抵抗が無視できる場合に起電力と端子電圧が同じ値になることや両者の単位が V(ボルト)であることが要因であろう。

電圧と起電力は定義できたが、図 3-1 を理解するためには、接続する電線、抵抗そして電源のことを知らなければならない。このことを順に説明していこう。

○ 導体

物質は導電率の違いにより、導体、抵抗体、絶縁体に分類できる。銅で作られた電線は、回路では導体または完全導体としてモデル化される。**完全導体**の導電率 κ は無限大である。導体という言葉は小さい抵抗がある場合または**完全導体**の場合で使われるので、文脈で判断しよう。

導体の性質 1 導体の内部の電界

⑧のオームの法則より、たとえ電流が流れていても完全導体では

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc} = \mathbf{i} / \kappa = \mathbf{0} \quad (3-18)$$

となる。すなわち、クーロン電界と非クーロン電界は完全に打ち消しあう。オームの法則が成立するには 10^{-14} s より十分な時間が必要と言われているが⁽¹²⁾、このことは周波数が 10^{14} Hz より十分小さいならオームの法則が適用できることを意味する。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ なら、電界

$E = E_c + E_b = \mathbf{0}$ となる。

孤立した導体に外部から電界 $E_1(\mathbf{r}, t) = E_c + E_b$ を加えると、導体の自由電子は導体表面に移動して、導体内の電界を $\mathbf{0}$ にする。導体内に少しでも電界が残っていると自由電子に⑤の力が働き動くからである。電界 $E_1(\mathbf{r}, t)$ はオームの法則が成立する範囲で時間的に変化しても良い。これを**静電誘導**（もともと時間的に変化しない静電界の場合に使われる言葉であるが）という。

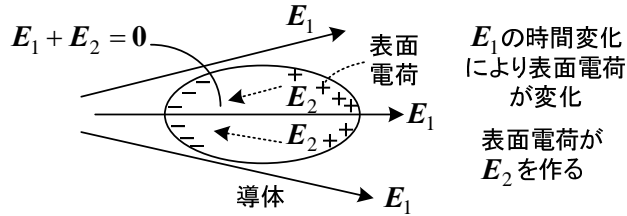


図 3-5 静電誘導

導体の性質 2 導体の電位

非クーロン電界 E_{nc} が $\mathbf{0}$ であれば、(3-18)よりクーロン電界 $E_c = \mathbf{0}$ となる。導体上の点 A と点 B 間の電圧はクーロン電界を用いて⑩より

$$V_{BA} = -\int_A^B E_c \cdot \mathbf{t} dl = 0 \tag{3-19}$$

となる。よって、非クーロン電界 E_{nc} が $\mathbf{0}$ であれば、クーロン電界も $\mathbf{0}$ となるので導体は至る所で同電位である。図 3-1 (b)の電気回路では、素子と素子の間の導線は至る所で同電位と考える。同電位と考えてはいけない場合としては、数 m の電線では周波数がおおよそ 1MHz 以上の場合がある。この場合電気回路では分布定数回路として取り扱う。これは誘導電界 E_b が無視できなくなるため、導線もインダクタンスをもつ。また導体が動く場合も同電位と考えてはいけない。

導体の性質 3 導体の内部の電荷

導体の内部に何らかの方法で電荷を持ち込んだとしても、互いに反発して、電荷は導体表面に集まる。すなわち導体の内部の電荷はたとえ電流が流れていても $\mathbf{0}$ と考えてよい。

仮に、導体中の自由電荷密度が時間 $t = 0$ で $\rho(\mathbf{r}, 0)$ に分布しているとし、時間が経過すればどうなるか調べてみよう。ただし、非クーロン電界 E_{nc} は $\mathbf{0}$ 、よって $E = E_c$ とする。

⑥より、 $D = \epsilon E_c$ で (ϵ は一定と仮定)、これを①に代入して $\epsilon \operatorname{div} E_c = \rho(\mathbf{r}, t)$ となる。③より $i = \kappa E_c$ だから、 $(\epsilon/\kappa) \operatorname{div} i = \rho(\mathbf{r}, t)$ となる。これを、⑨に代入して

$$\frac{\kappa}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

これを解いて、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{ただし、時定数} \quad \tau = \frac{\epsilon}{\kappa} \tag{3-20}$$

金属の誘電率は測定できず、おおよそ真空中の誘電率 ϵ_0 に等しいと考えられている。表 2-1 より、

銅では $\tau = 1.54 \times 10^{-19}$ となる。極めて短い時間で導体内の電荷は 0 となることを意味する。しかしながら、前提となるオームの法則 $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}_c$ が成立するのに 10^{-14} s よりも十分大きい時間が必要とされている⁽¹²⁾。よって、電荷が再配置するのに必要な時間は 10^{-10} s 程度と考えれば十分であろう。なお、(3-20)はわずかでも電流が流れるなら絶縁物においても成立するので、(3-20)の時定数で長くなるがいずれ絶縁物内部の電荷も 0 になる。

導体の性質 4 導体表面の電界

(2-64)で述べたように完全導体の表面では、電界は面に垂直であり、ガウスの法則①' は常に成立するから、その大きさは $E = \sigma / \epsilon$ あるいは $D = \sigma$ である (第 4 章で詳しく述べる)。ここで $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$ は境界面の面自由電荷密度である。

○ 抵抗

次に図 3-1 の抵抗に成り立つオームの法則を説明する。抵抗は回路につながれて、電流 I が流れているとする。抵抗の断面積を $S[\text{m}^2]$ 、長さを $l[\text{m}]$ とする。抵抗の両端 A,B には、自由電荷があり、抵抗の中に様なクーロン電界 \mathbf{E}_c を作っていると考えられる。抵抗も金属であり、抵抗の中の自由電荷密度 ρ は 0 である。 \mathbf{E}_c により負の電荷 ($-e$) をもつ電子が力 $-e\mathbf{E}_c$ を受ける (⑤より)。電子の質量を $m[\text{kg}]$ とすると加速度は $-e\mathbf{E}_c/m$ となる。加速度が一定の場合、速度は時間に比例して増加するが、自由電子は熱振動している陽イオンと衝突を繰り返すため、平均時間 T ごとに図 3-6 の様に変化するとしよう⁽²⁵⁾。平均速度は $\bar{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}_c T / (2m)$ となる。自由電子が単位体積当り n 個あるとすると、電荷密度は $-en$ であるから、伝導電流密度 \mathbf{i} は次式となる。

$$\mathbf{i} = -en\bar{\mathbf{v}} = \frac{e^2 T n}{2m} \mathbf{E}_c \quad (3-21)$$

となる。導電率 κ_R を

$$\kappa_R = \frac{e^2 T n}{2m} \quad (3-22)$$

とすると

$$\mathbf{i} = \kappa_R \mathbf{E}_c \quad (3-23)$$

が成り立つ。これは⑧のオームの法則に相当する。

A 点から見た B 点の電圧は、⑩より

$$V = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = |\mathbf{E}_c| l \quad (3-24)$$

となる。A→B の積分路を抵抗の中にとると、 \mathbf{t} は \mathbf{E}_c と逆方向である。電流密度については、面 S と垂直の向きに \mathbf{n} をとると、電流密度 \mathbf{i} の向きと一致するので

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = |\mathbf{i}| S \quad (3-25)$$

である。(3-23)の大きさを考え、(3-24), (3-25)を代入すると

$$V = \frac{l}{\kappa_R S} I \quad (3-26)$$

となる。これはオームの法則に他ならない。抵抗は次式で与えられる。

$$R = \frac{l}{\kappa_R S} \quad (3-27)$$

電磁気学では、⑧もオームの法則と呼ぶ。

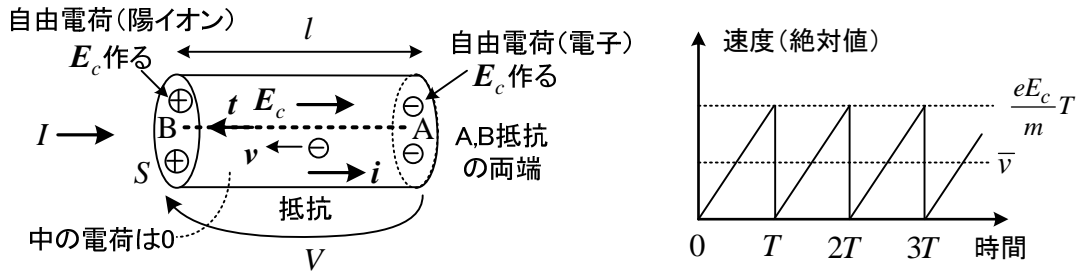


図 3-6 オームの法則の説明

○ 電源と抵抗の接続

最後に電源と抵抗の接続について考える。

まず、図 3-7(a)に示すように、スイッチ S をオフして電池だけを考える。

電池を簡単なモデルとして考えよう。電池は+極から-極に、電池の中の電子を動かす働きがある（あるいは正電荷を一極から+極に動かす働きがあると考えても良い）。すなわち、電池は起電力という力を電子に働かせる。これは化学的に電子に及ぼす力で、**非クーロン電界** E_e を作って、電子に力を及ぼすと考えることができよう。この結果、-極には電子が増加し、その分+極には電子が少なくなって+に帯電される。しかし、電子の移動がずっと続くことはない。なぜなら、両極にたまった電荷によって、電池の中にクーロン電界 E_c が E_e と逆向きに生じるからである。最終的には

$$E_c + E_e = \mathbf{0} \quad (3-28)$$

で電子の動きは止まる。このとき、電池の-極から見た+極の端子電圧は⑩より

$$V = -\int_A^B E_c \cdot t \, dl \quad (3-29)$$

である。電圧はクーロン電界に対して定義されていることに注意しよう。一方、起電力については、⑩より

$$V_e = \int_C E_e \cdot t \, dl = \int_A^B E_e \cdot t \, dl \quad (3-30)$$

である。本来起電力は閉曲線での積分だが、 E_e は電池の中しかないので、その部分だけでよい。(3-30)に(3-28), (3-29)を用いると

$$V_e = V \quad (3-31)$$

が成り立つ。つまり起電力 V_e と端子の電圧 V は等しい。図 3-1(b)で、抵抗を接続しない場合には電流が流れないから $R_0 I = 0$ で、(3-31)が成り立ち、モデルが妥当であることが判る。ここで、 V_e につけた矢印は、起電力を測る t の向きを表すものである。ところが、(3-31)が成立つので回路の電圧につける矢印（矢印の先端の電位から根の電位を引く）とみなすこともできる。

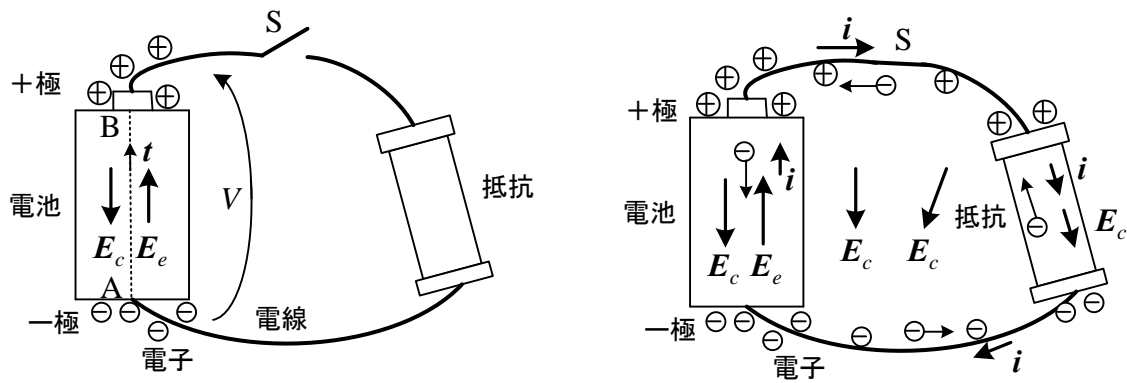
次に、スイッチ S をオンし時間が経過した図 3-7 (b) の場合を考える。

電流が流れる回路に沿って、 E_{all} の線積分を考える。電線は完全導体と仮定すると、(3-18)より導体中の E_{all} は 0 と考えて良いので、その線積分は 0 になる。従って、積分路 C を図 3-7(c) に示すように選ぶと次式が得られる。

$$\int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl = \int_C (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl = V_e \quad \left(\int_C \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = 0 \text{ より} \right) \quad (3-32)$$

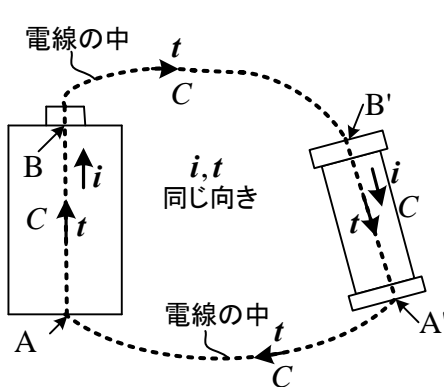
$$\begin{aligned} \text{一方, } \int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl &= \int_A^B (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{B'}^{A'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \\ &= \int_A^B \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{B'}^{A'} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl \quad \text{⑧より} \\ &= R_0 I + R I \end{aligned} \quad (3-33)$$

κ, κ_R はそれぞれ電源と抵抗の導電率である。抵抗は(3-27)と同様に考え、 R_0 は電源の内部抵抗である。(3-32), (3-33)が等しいので次式が得られる。

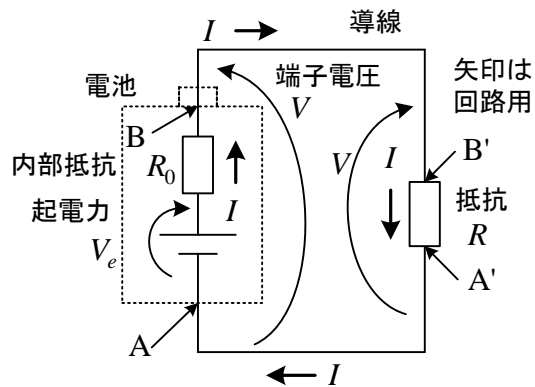


(a) スイッチ S オフのとき

(b) スイッチ S オンのとき



(c) 積分路 C



(d) 回路のモデル

図 3-7 電池と抵抗の接続

$$V_e = R_0 I + RI \quad (3-34)$$

これは、キルヒホッフの第2法則の一例となっている。

A点から見たB'点の電圧は

$$V = -\int_{A'}^{B'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t}' dl = \int_{B'}^{A'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = RI \quad (\mathbf{t}' = -\mathbf{t}) \quad (3-35)$$

で、(3-2)が導けた。電流が流れているときは電池の中で $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e$ は $\mathbf{0}$ とはならない。ただし、電源の内部抵抗が無視できる場合には、例え電流が流れていても、 $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ で起電力と端子電圧は一致する。図 3-7 (b)に電荷の分布のイメージ図を示している。自由電荷は、主に電池の両端、抵抗の両端、電線の表面に存在すると考えられよう。電線の表面に分布する電荷により上側と下側の空気中にクーロン電界でき、その積分である電位差が生じると考えられる。この例では、電荷分布を正確に求める必要はなかった。しかし、おおまかでも電荷分布を考えないと、いろいろの現象が説明できない。

次に、電力について考えよう。このために、空間に起きる現象を簡単に説明しよう。図 3-8 に示すように電流が流れるとその周りに磁界 \mathbf{H} が生じる。そして電線表面などに生じる電荷によって空間にクーロン電界が生じる。

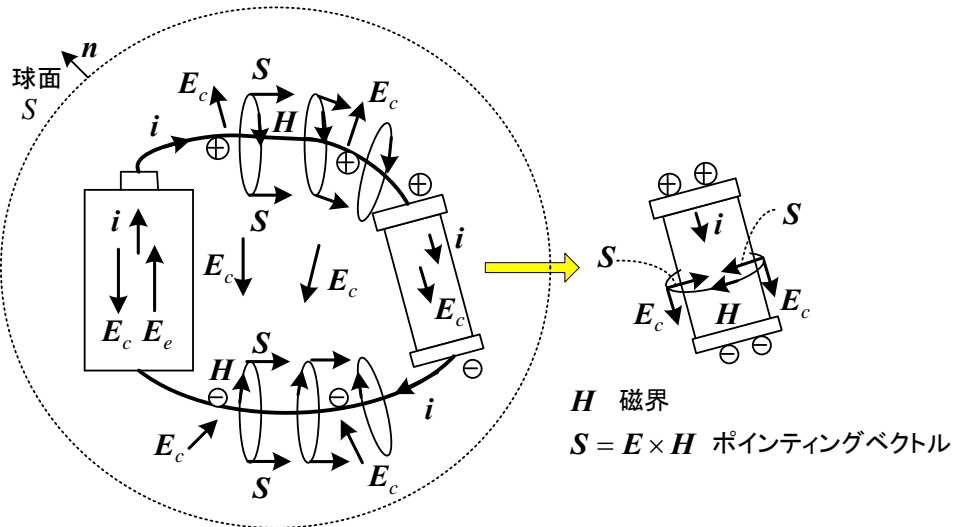


図 3-8 電力

直流電源なので、電界や磁界の時間変化がないから、(2-42)より次式が得られる。

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}_e dV = \int_{V_1} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_{V_2} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} dV + \int_S (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad [\text{W}] \quad (3-36)$$

V_1 は電池、 V_2 は抵抗である。直流電源なので、電波が生じることはなく、ある程度広い球面 S を考えるとその面上では電界や磁界は $\mathbf{0}$ になる。よって右辺第3項は $\mathbf{0}$ となる。このとき

$$\int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}_e dV = \int_{V_1} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_{V_2} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} dV \quad (3-37)$$

図 3-6 の寸法の抵抗に、一様な電界 E_c があって、一様な電流 i が流れている場合、

$$\int_{V_2} \frac{|i|^2}{\kappa_R} dV = \kappa_R \frac{|i|^2}{\kappa_R} S l = \frac{1}{\kappa_R} \left(\frac{I}{S}\right)^2 S l = \frac{l}{\kappa_R S} I^2 = R I^2 \quad (3-38)$$

電源も同様に内部抵抗を R_0 とすると

$$\int_{V_1} \frac{|i|^2}{\kappa} dV = R_0 I^2 \quad (3-39)$$

これは、内部抵抗で消費される電力を表す。

電源が供給する電力は

$$\int_V \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i} dV = |\mathbf{E}_e| |i| S l' = V_e I \quad (3-40)$$

となる。以上の結果を(3-37)に代入すると、よく知られた以下の関係が得られる。

$$V_e I = R_0 I^2 + R I^2 \quad [\text{W}] \quad (3-41)$$

図 3-8 に示すように、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}$ は球面 S 内には存在している。電線の部分で考えると \mathbf{S} は電源側から抵抗に向かっていて、これは電力が電源側から抵抗に向かって、電線の中でなく、その周りの空間をポインティングベクトルとして送られていることを意味する。抵抗の部分では、 \mathbf{S} は抵抗の中に向かっていて、つまり抵抗の中に電力が入って消費されることを意味する。ポインティングベクトルは特に電磁波を考える場合に利用される。

次に、直流電源のスイッチを入れた後の過渡状態から定常状態までを図 3-9 で考えよう⁽²¹⁾。スイッチ S を入れた直後、電源は電子を動かすので電線の一番左端の電子が電源を通り上の電線から下の電線に動く。上の電線では左端の電子が動いた後、その右側の電子が陽子に引かれ左に動きだし、順次右側に伝わっていく。下の電線では、電源から来た電子がその右側の電子を右に押し、それが順次右側に伝わっていくと考えられる。その際、上の電線では電子がぬけた陽子が+イオンとなり、逆に下の電線では+イオンに対応して電子が表面に分布する。これらはクーロン電界 E_c ①を作る。この時点では図に示す AB のラインの右側の電子はまだ動いていない。 AB のラインは時間と共に右側へ移動し、 E_c ②, ③, ④と順番に電界が伝搬していく。 AB のラインが動く速度は速く光速と考えてよい。要するに左側の電線から電流は流れ始め右に広がる。

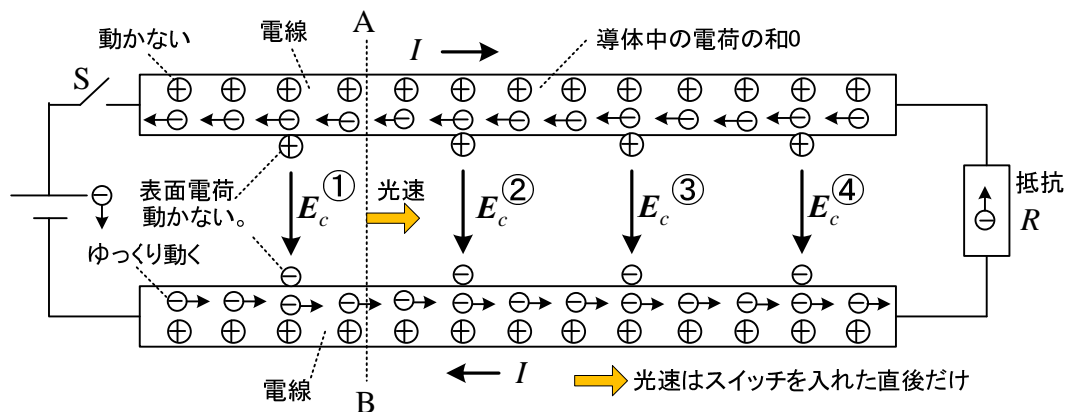


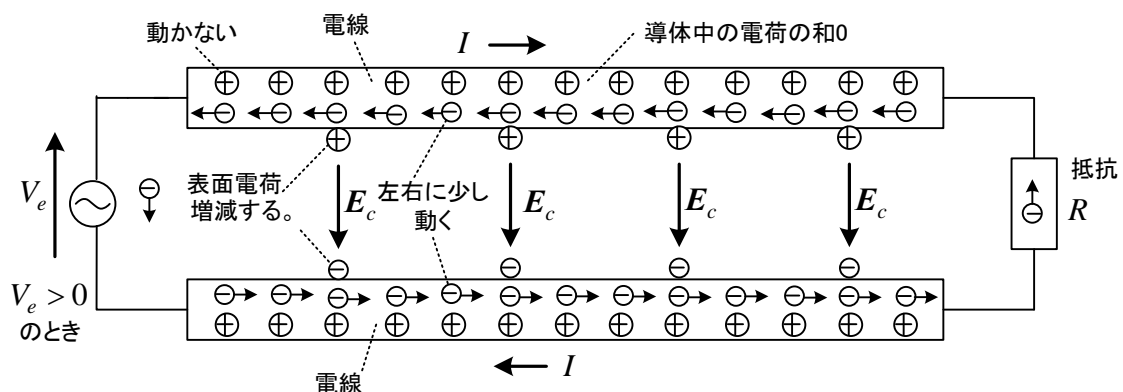
図 3-9 直流電源のスイッチ S を入れた後の電界

定常状態では、電線の中の電子が図の矢印の向きに動くが、その平均速度は遅い（秒速数 cm くらい）。また導体中の電荷はトータルとして 0 であるが、導体表面には電荷が分布する（プラスは電子が足りないイオンである）。スイッチを入れてもすぐに抵抗 R に電流が流れる訳では無く、電子を動かす電界が光速で伝わってくるまでの時間遅れる。また、スイッチをオフしても、瞬時に電流は 0 にならない。ただ、その時間は非常に短いので、電気回路ではスイッチを入れると瞬時に抵抗 R に電流が流れ、スイッチを切ると瞬時に抵抗 R の電流が 0 になると考える。

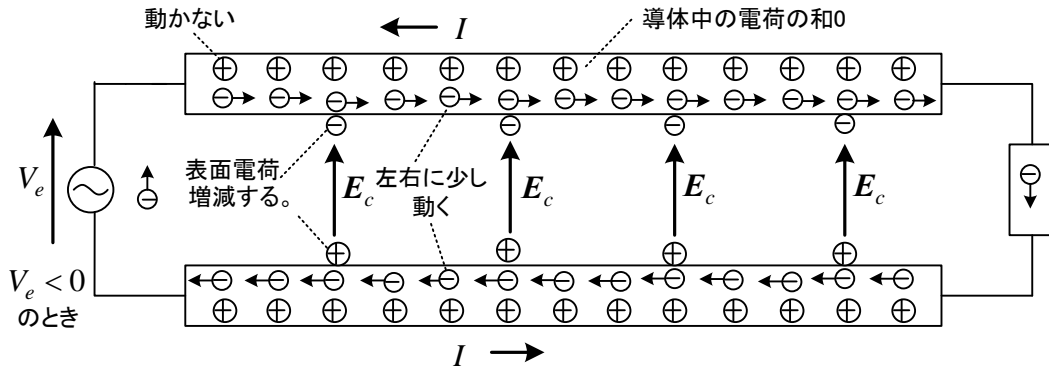
なぜ光速で電圧や電流が左から右へと生じていくかについては、付録の分布定数回路の過渡現象解析で説明している。

交流電源の場合には、電源内で非クーロン電界が時間的に正弦波で変化していると考えればよい。交流の電流では、磁界が時間的に変化し、その結果④で電界が変化する。そうすると、①～⑧の多くの式がお互いに関係してくる。電源、電線、抵抗だけでなく空気中の電磁界も含めて①～⑧は成り立つ。回路で、電源、電線、抵抗だけを考えているのとは大きな違いである。本テキストでは、第 7 章で簡単化された場合についての解析を行っている。

しかしながら、電源の周波数が 60Hz 程度で、電線の長さも送電線のように長くなければ、その動作は簡単になる。これらの条件の下、交流電源を接続した図 3-10 の場合について考えよう。スイッチを閉じてしばらくした定常状態にあるとする。導線の中の電位は変わらないから、クーロン電界 E_c より求めた導線間の電圧が電源の起電力 $V_e(t)$ と等しくなければいけない(電源の内部抵抗は無視する)。従って導体表面の電荷は時間と共に各点で正負に増減する必要がある。これは導体中の電子の移動によって達成される。電子の速度は遅いので、 V_e の極性や大きさに応じて電子は左右に行き来するだけで、電子が循環することは考えられない。ただし電子の速度が遅いのは平均値であり、かなりの速度で動く電子もあろう。なおポインティングベクトルの向きは電流の向きが逆になっても電界の向きも逆になるから常に右向きである。



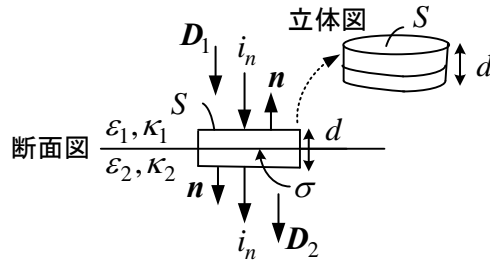
(a) 電源電圧 V_e が正のとき



(b) 電源電圧 V_e が負のとき

図 3-10 交流電源の電界 (定常状態)

例題 2 誘電率と導電率がそれぞれ ϵ_1, κ_1 の物質と ϵ_2, κ_2 の物質の境界面に垂直に電流密度 i_n の直流電流が流れるとき、境界面に蓄積される電荷密度 σ を求めよ。



(解) 境界面をはさんで、図の様に微小断面積 S で、微小長さ d の円柱を考える。この円柱について①のガウスの法則を適用する。 d は十分小さく側面からの電束は 0 とすると

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho \, dV \quad \text{より,} \quad (D_{2n} - D_{1n})S = \rho Sd$$

ここで、 $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = -D_{1n}$, $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = D_{2n}$

d を十分小さくすると、 ρd は面電荷密度 σ [C/m^2] になるから

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \therefore \quad \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

オームの法則より、 $i_n = \kappa_1 E_{1n} = \kappa_2 E_{2n}$

従って、 $\left(\frac{\epsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1}\right)i_n = \sigma$

* 電流密度 i_n については、(2-66)の境界条件で、電荷密度の時間変化がないと考えると

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad \text{であるから、境界面に垂直に媒質 1 に電流が流れ込むと、媒}$$

質 2 でも境界面に垂直に電流が流れる。