



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/38873
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-18T18:24:40Z

第4章 コンデンサ

コンデンサでは、磁束密度の変化による誘導電界 E_b は $\mathbf{0}$ と考えるので、以下に示す電界 \mathbf{E} は特に断らない限り電荷が作るクーロン電界 \mathbf{E}_c を意味する（面倒なので \mathbf{E}_c の代わりに \mathbf{E} と書く）。すなわち、⑨で $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_c$ であり、 $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ が常に成り立つ。最後に、電荷の時間的な変化を考える。

○ 静電界とは？

まず、最も簡単な場合として、誘電率 ϵ の空気中にある金属球の表面に分布した時間的に変化しない電荷が作る静電界を考えることにしよう。空気中の誘電率は真空中の誘電率 ϵ_0 とほぼ等しいが、あえて区別することにより一般的な式を示すことができる。なお空気中の ϵ は一定である。真空中なら $\epsilon = \epsilon_0$ とおけばよい。

金属球に電荷を集める方法を図 4-1 に示す。スイッチ S を閉じると電源によって金属球の電子がアース（大地）に移動し、金属球は正に帯電される。その後スイッチ S を開くと、金属球の表面に正の電荷が分布する。金属球を負に帯電させたい場合には電源の極性を逆にして、同様に行えばよい。金属球と大地あるいは無限遠点が一種のコンデンサになっていると考えればよい。

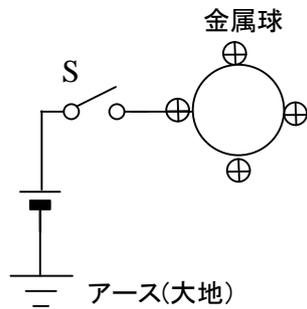


図 4-1 電荷の集め方

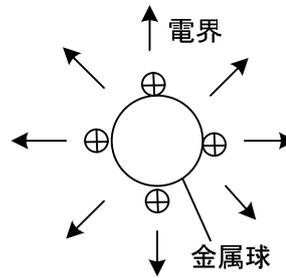


図 4-2 ρ が作る電界

図 4-1 で得られた帯電した金属球が図 4-2 のように空気中にあるとしよう（大地は考えない）。このとき①～⑧について、どのような式が成り立つか考える。

金属球表面の自由電荷密度 ρ は時間的に変化しないので $\partial\rho/\partial t = \mathbf{0}$ である。金属球の運動は考えないので、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である。また伝導電流は $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ である。全ての量の時間変化は考えられないので、 $\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathbf{0}$ である。このとき②, ③, ⑦より、全空間で磁界を作る原因となるもの（電流や磁石）がないから、磁界 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ となる。以上のことから、

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \tag{4-1}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{4-2}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{4-3}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{4-4}$$

を使って問題を解くことになる。これらの式は、**静電界**を記述する式である。

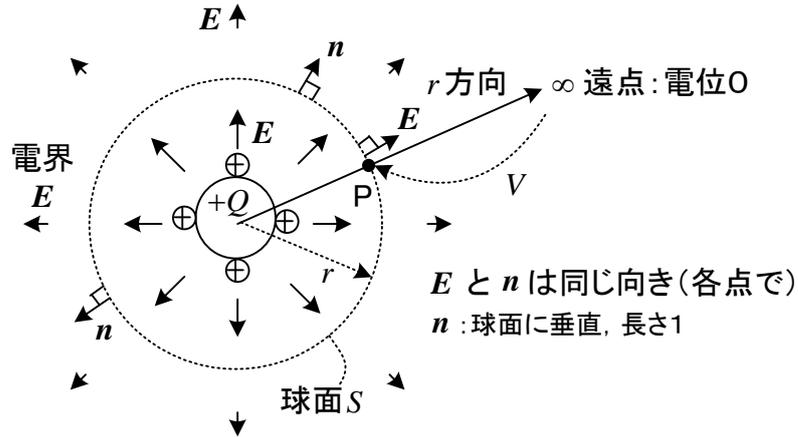


図 4-3 金属球表面の電荷が作る電界

それでは、電界を求めよう。

簡単に電界を求めるには、ガウスの法則(4-1)の積分形①を利用する。図 4-3 に示すように、中心が金属球と同じで、半径 r の球面 S (ガウス面とよぶ) を考えると、 ϵ は定数だから面 S 上で

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho \, dV = Q \quad (4-5)$$

が成り立つ。体積 V は、球面 S で囲まれた球全体であるが、電荷は金属球表面にしかない。金属球の表面電荷を集めた全電荷を $Q[\text{C}] > 0$ とする。電界や電束密度の大きさは、対称性より球面上ではどこでも同じで、方向は球面に垂直で \mathbf{n} 方向と仮定する。この仮定が正しいかどうかは求めた解が(4-1)と(4-2)を満足するかどうかで判定できる。 $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|$ とおいて

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S |\mathbf{E}| |\mathbf{n}| \cos 0 \, dS = \epsilon \int_S E \, dS = \epsilon 4\pi r^2 E = Q$$



よって、電界の大きさは

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q > 0 \text{ のとき}) \quad (4-6)$$

となる。電界は電荷から遠いほど弱くなり、無限遠点では 0 である。 $Q < 0$ の場合には、 \mathbf{E} の向きが逆になるが、 \mathbf{n} の向きは変わらないので、なす角は π で $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -E$ となり、

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{-Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q < 0 \text{ のとき}) \quad (4-7)$$

となる。 E は大きさであり当然ながら正になっている。ただ、(4-6)、(4-7)は(4-1)だけを使って求めたので、正しいかどうかはまだ判らない。

Q の正負によらず、もっとスマートに解く方法がある。それは、以下のような変形である。

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S E_r \, dS = \epsilon 4\pi r^2 E_r = Q \\ \therefore E_r &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q > 0 \text{ のとき } E_r > 0, \quad Q < 0 \text{ のとき } E_r < 0) \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E_r \quad (4-9)$$

E_r は \mathbf{E} の \mathbf{n} 方向成分で, 正にも負にもなる。絶対値は $E = |E_r|$ である。

電界をベクトルで表示するには, 球の中心を原点とした位置ベクトル $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ を用いて以下の様に表すことができる。 $\mathbf{r}/r = \hat{\mathbf{r}}$ である。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} = E_r \hat{\mathbf{r}} \quad (Q \text{ は正負 OK}) \quad (4-10)$$

$$\text{ここで, } r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\hat{\mathbf{r}}| = 1$$

(4-10)は, 電界の向きと大きさを考えた一般的な表現である。 \mathbf{D} は $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ より求める。先に \mathbf{D} を求めても良い。(4-10)は球座標系での表示となっていて, $\hat{\mathbf{r}}$ 成分のみであり, しかも r だけの関数である。よって, (付 26)より, 見ただけで $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ となることが判る。よって得られた解(4-10)は(4-1), (4-2)を満たし最初に図 4-3 で放射状の電界を仮定したことが正しかったのである。

次に空気中の任意の点 P の電位 (無限遠点に対する P 点の電圧) を求めよう。図 4-4 に示すように, 電位とは 1C の電荷を無限遠点から運ぶときの仕事を表しており, 運ぶ路 C を無限遠点から金属球までの直線上とすると ($\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ のとき道によらないことを 3 章で示した), ⑩より

$$V = \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, dl = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (4-11)$$

で求められる。(4-11)の ∞ は無限遠点の意味である。 $\mathbf{t} = -\hat{\mathbf{r}}$ であり, (4-10)を用いると,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = -E_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -E_r$$

である。(4-11)で常に $dl > 0$ であるが, 無限遠点から P 点まで積分するとき $dr < 0$ なので, $dl = -dr$ としなければならない (厳密には無限遠点の代わりに, 遠い点 $r = R$ からの積分を考え, あとで $R = \infty$ とする)。結局, (4-11)より次式が得られる。

$$V = - \int_{\infty}^r E_r \, dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (Q \text{ は正負 OK}) \quad (4-12)$$

(4-12)は電荷が負のときも成立し, このとき電位 V は負になる。

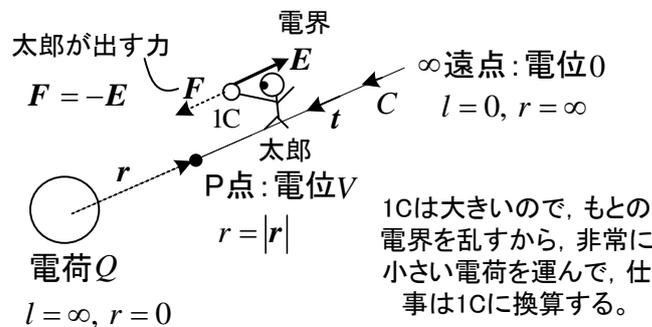


図 4-4 電界と電位のイメージ (無限遠点から 1C の電荷を運ぶ太郎)

E, dr は、 dr 間の小さな電圧を意味し、これを集める（積分する）ことによって無限遠点と P 点間の電圧すなわち電位になる。平行平板コンデンサのように電界 E がどこでも一定なら単純に長さを掛ければよいが、 E が r によって違うため積分をしないといけなくなる。無限に遠い所から電荷を運ぶと太郎がする仕事(エネルギー)も無限になりそうであるが、遠いところは出す力もかなり小さくて済むのでこの場合は無限にはならない。

金属球内部の電界は 0 で、電位はどこでも等しく(4-12)で $r = a$ とした値になる (a は金属球の半径)。金属球の半径が十分小さい場合は点電荷とよべれ、金属球の外部の電界や電位は点電荷の場合と同じである。ここで、(4-1)をもう一度ながめてみよう。 ρ があるのは、金属球の表面だけで、他は 0 である。よって多くの点で $\text{div } \mathbf{D} = 0$ である。たとえ $\text{div } \mathbf{D} = 0$ の点でも、空間のどこかに ρ があれば、 $\mathbf{D} = 0$ とはならないのである。また、金属球の誘電率は関係なかった。全空間で ϵ でなくても良いのである。(4-1)や(4-3)は、空間の各点で成立つが、点によっては $\rho = 0$ であったり、 ϵ が異なったりすることがある。

(4-12)を使って、図 4-5 に示す V_{BA} (A 点から見た B 点の電圧) を求めよう。

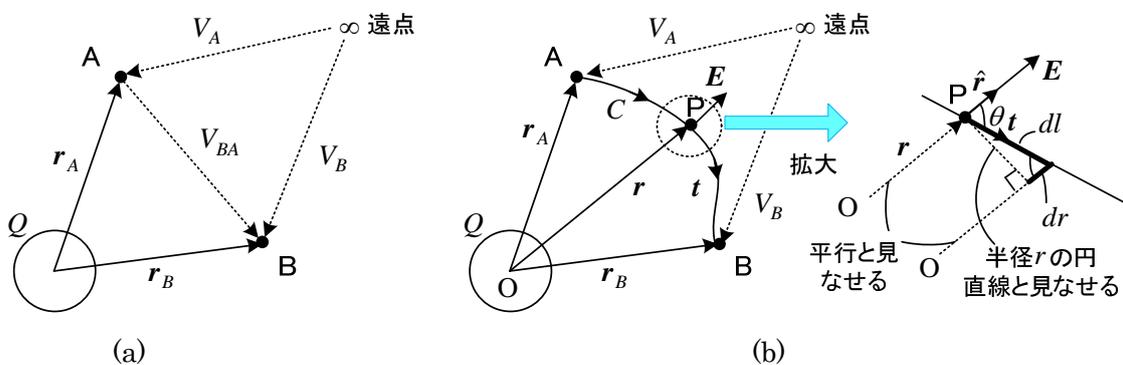


図 4-5 電圧 V_{BA} の求め方

(4-12)より、次式で求められる。

$$V_{BA} = V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_B} - \frac{Q}{4\pi\epsilon r_A} \quad (4-13)$$

これでよいが、⑩より A 点から B 点まで線積分することで求めることもできる。(4-10)より

$$V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl$$

ここで、(b)図より、

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl = dl \cos \theta = dr \quad (4-14)$$

が得られる ($\theta = \pi$ なら $dl = -dr$ で(4-12)で使った)。 dr は原点からの距離 r の変化分で正負がある。図で考えなくても、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ より、 $rdr = xdx + ydy + zdz = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ と(1-42)を使って $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl = \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = dr$ としてもよい ($\mathbf{r}/r = \hat{\mathbf{r}}$)。よって、結局次式により V_{BA} が求められる。

$$V_{BA} = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (4-15)$$

$r_B = r, r_A = \infty$ とすると、(4-12)を導くこともできる。いろいろの導き方がある。

ところで、クーロン電界と電位は、(2-27)で次のように定義した。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad (4-16)$$

(4-10), (4-12)の場合にも(4-16)の関係が成立することを確認しておこう。まず

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{r^3} \quad (4-17)$$

である。(4-12)の V を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\text{grad}V &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{x}{r^3} \hat{\mathbf{x}} - \frac{y}{r^3} \hat{\mathbf{y}} - \frac{z}{r^3} \hat{\mathbf{z}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (4-18)$$

が得られる。これは(4-10)と一致する。

(4-16)と(4-3)を(4-1)に代入すると

$$\text{div}(\epsilon \text{grad}V) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

だから、 ϵ が一定のところでは

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4-19)$$

となる。これを**ポアソンの方程式**と言う。(付10)より $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$ は常に成立し、(4-16)を使うとき、(4-2)の条件は常に満たされているので、ポアソンの方程式には(4-1), (4-2)が加味されていることに注意しよう。**ラプラスの演算子** ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{直角座標系}) \quad (4-20)$$

を用いて、

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4-21)$$

と書くこともある。これは、(2-35)の特別な場合で、時間変化がないという条件を入れると得られる。電荷密度が0の点では

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{または} \quad \nabla^2 V = 0 \quad (4-22)$$

である。これを**ラプラスの方程式**という。

静電界の問題を解く場合、ポアソンの方程式またはラプラスの方程式を境界条件を満たすように解いて電位を求め、次に(4-16)を使って電界を求めることも行われる。 図4-3の場合に適用してみよう。球座標系を用いる。対称性より V は r のみの関数と考えられるから、空气中で、(付27)より $\partial V / \partial \theta = \partial V / \partial \varphi = 0$ とおいて

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) = 0 \quad \therefore \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dV}{dr}) = 0 \quad (V \text{ は } r \text{ のみの関数, } \partial \rightarrow d \text{ へ})$$

より

$$r^2 \frac{dV}{dr} = k_1 \quad \therefore \frac{dV}{dr} = \frac{k_1}{r^2} \quad \therefore V = -\frac{k_1}{r} + k_2$$

$r = \infty$ で $V = 0$ とすると, $k_2 = 0$ である。よって

$$V = -\frac{k_1}{r}$$

V は r のみの関数だから(付 24)より

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{k_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

境界条件 (2-65)より, $r = a$ で, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = D_r = \sigma$, $\mathbf{D}_r = \epsilon \mathbf{E}_r$, $Q = 4\pi a^2 \sigma$ より

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon a^2} = -\frac{k_1}{a^2} \quad \therefore k_1 = -\frac{Q}{4\pi \epsilon}$$

これらの結果は(4-10),(4-12)に一致する。

球座標系を恐れることはない。覚える必要もなくただ公式に代入するだけである。

○ クーロンの法則

$Q[\text{C}]$ の点電荷も(4-10)の電界を作る。図 4-6 の様に, $r[\text{m}]$ 離れた P 点に点電荷 $q[\text{C}]$ を置いたとき, P 点の点電荷 q が電界から受ける力は(4-4)より

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4-23)$$

となる。これは**クーロンの法則**(Coulomb's law)と呼ばれる。点電荷とすれば, q, Q の大きさに関係なくクーロンの法則が成り立つ。 q, Q はいずれも負になることも有るが, (4-23)は $q[\text{C}]$ に働く力のベクトルをどの場合も表している。なお, 半径のある金属球では電荷分布が偏るので (4-23)は適用できない。

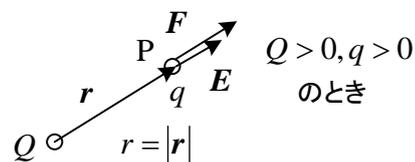


図 4-6 クーロンの法則

力の大きさは真空中においては次式となる。距離が短いとかなり大きくなる！

$$F = |\mathbf{F}| = \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{|q||Q|}{r^2} \quad [\text{N}] \quad (4-24)$$

$Q[\text{C}]$ の点電荷は $q[\text{C}]$ の点電荷が作る電界によって(4-23)と同じ大きさの力を受ける。 $Q \neq q$ でも両者に働く力の大きさは同じである。2つの点電荷に働く力は, その方向が両電荷を結ぶ直線

上にあり，同じ極性の電荷は反発し，異なる符号の電荷は引き合う。

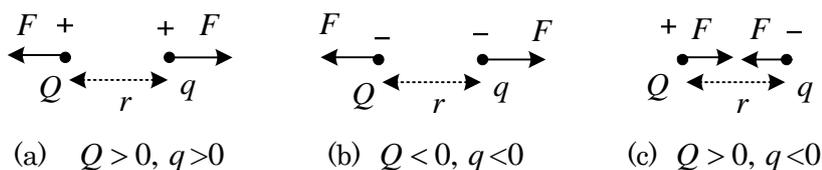


図 4-7 2つの点電荷に働く力の向きと大きさ

電荷と電荷の間には力が働くが，片方の電荷がもう片方の電荷に直接力を及ぼしているのではなく，電荷があると，そのまわりに電界ができ（第7章遅延ポテンシャル参照），電界がもう片方の電荷に力（ローレンツ力）を与えている。これを**近接作用**という⁽²⁷⁾。

プラスの電荷とマイナスの電荷が空間にあり，その間にできる**電界E**の様子を図4-8に示す。矢印の長さが**E**の大きさを，矢印の向きが**E**の向きである。各矢印は矢印の根の点の**E**を示す。全て同じ**E**と書いているが，**E**は場所の関数で同じとは限らない。また，図示が難しいので平面上の点数で描いているが，実際の**E**は全空間（3次元）に分布している。

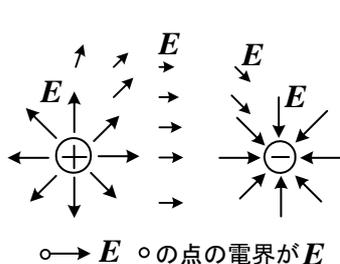


図 4-8 矢印による電界の表現

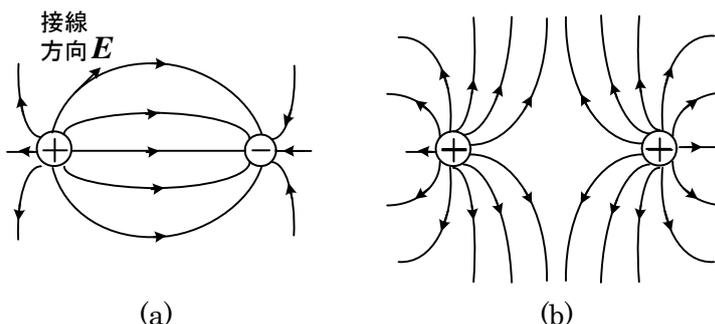


図 4-9 力線による電界の表現

Eを**電気力線**として図4-9の様に表示する方法もある。静電界の場合について電気力線の性質を以下に示す。

- (1) 電気力線の向きが各点の**E**の向きで，密度で**E**の大きさ**E**を表す。線が多く集まっていれば**E**は大きい。
- (2) (4-1)より電気力線は正電荷より出て負電荷に終わる。無限遠点やアース(大地)で終わること(出ること)もある。(4-2)は電界がループしないことを意味する。
- (3) 電気力線は電位の高い点から低い点に向う。
- (4) 電気力線は伸ばしたゴムひものように，できるだけ短くなるようにする引っ張り力が働く。
- (5) 電気力線の間には反発力が働き，互いに離れようとする。

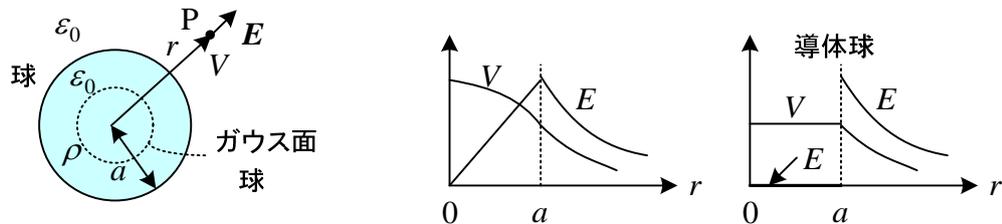
なお，誘導電界**E_b**だけで電界が作られる場合には，電界はループ状になる。

クーロンの法則がわかっているなら，(4-23)より電界はすぐに得られるが，このテキストの立場は①～③と数学の公式を使って全ての電磁現象を説明しようとしている。

○ 静電界の基本的な例題

これから、静電界の基本的な問題を解いて理解を深めよう。

例題 1 図の様に半径 a [m] の球内に一様に電荷密度 ρ [C/m³] の電荷が分布している。各部の電界と電位を求めよ。



(解) 対称性より電界は放射状にできると考えられる。球全体の電荷 Q [C] は、 $Q = (4/3)\pi a^3 \rho$
(身の上に心配アールの 3 乗)

$r \geq a$ の場合

導体球表面に電荷が分布している場合と同じで、電界と電位は次式で求められる。

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad [\text{V/m}], \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r} \quad [\text{V}]$$

$r \leq a$ の場合

半径 r の球の表面をガウス面として、ガウスの法則を適用すると以下のように求められる。

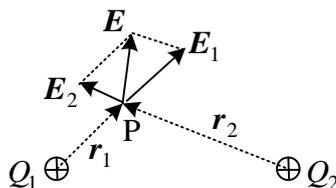
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \int_S E_r dS = \epsilon_0 4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}$$

$$V = -\int_{\infty}^r E_r dr = -\left(\int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_a^r \frac{r\rho}{3\epsilon_0} dr\right)$$

$$\therefore V = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2)$$

例題 2 誘電率 ϵ の空気中に図に示すように 2 個の点電荷 Q_1, Q_2 がある。P 点に作る電界 \mathbf{E} を求めよ。また P 点の電位 V を求めよ。



(解) 点電荷 Q_1, Q_2 によってそれぞれ作られる電界を $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ とする。重ね合わせの理を用い

E_1, E_2 のベクトル和より, P 点の電界 E が以下の様に求まる。

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} \frac{r_1}{r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} \frac{r_2}{r_2} \quad \text{ただし, } r_1 = |r_1|, r_2 = |r_2|$$

P 点の電位 V は

$$V = -\int_{\infty}^P E \cdot t \, dl = -\int_{\infty}^P (E_1 + E_2) \cdot t \, dl = -\int_{\infty}^P E_1 \cdot t \, dl - \int_{\infty}^P E_2 \cdot t \, dl = V_1 + V_2$$

であるから, 電位についても重ね合わせの理が成立つことがわかる。よって

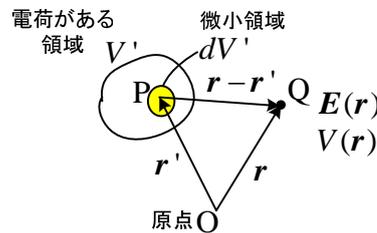
$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2}$$

点電荷が 3 個以上の場合にも同様に重ね合わせの理で計算できる。電荷が領域 V' に連続的に分布している場合には, 体積分して Q 点の電界と電位が計算できる。すなわち, 電荷が領域 V' にあるとき r' を変化させて V' の中を動かし電界や電位を集めればよい。PQ 点間の距離 $|r - r'|$ が関係する。これまでは $|r - r'|$ を r_1, r_2 としていたので式が簡単に見えていた。電界と電位は

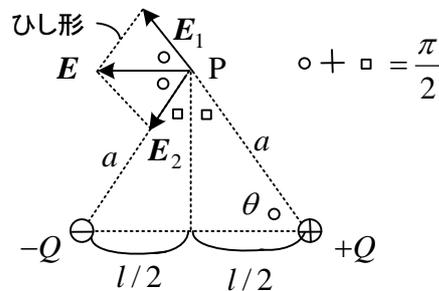
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r')(r - r')}{|r - r'|^3} dV' \quad (4-25)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' \quad (4-26)$$

(4-26) がポアソンの方程式(4-21)の解である。



例題 3 誘電率 ϵ の空気中に $+Q[C], -Q[C]$ ($Q > 0$) の点電荷が, $l[m]$ 離れてある。点電荷からそれぞれ $a[m]$ 離れた点 P の電界と電位を求めよ。



(解) $+Q, -Q$ による電界をそれぞれ E_1, E_2 とすると, E_1, E_2 の大きさは等しく

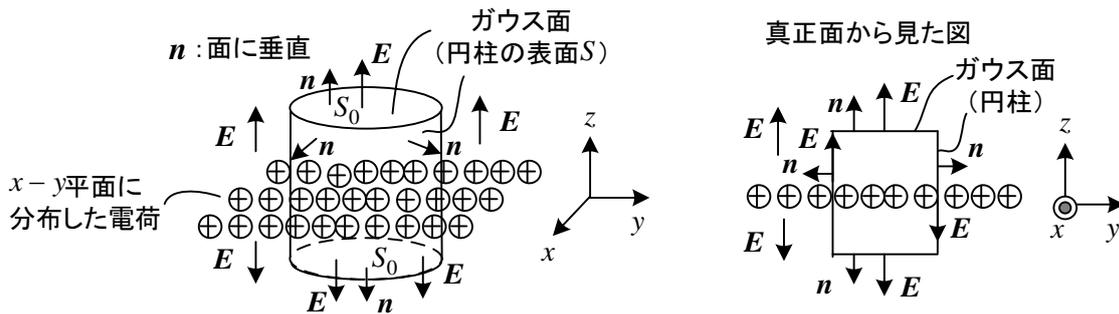
$$|E_1| = |E_2| = \frac{Q}{4\pi\epsilon a^2}$$

\mathbf{E} は重ね合わせの理より $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ で求まる。図より方向は電荷を結ぶ線に平行で、大きさは、

$$|\mathbf{E}| = 2 \times \frac{Q}{4\pi\epsilon a^2} \cos\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon a^3}$$

電位は、重ね合わせの理より $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon a} = 0$ である。

例題 4 十分に広い x - y 平面上に一樣に電荷が分布している場合の電界を求めよ。電荷の面密度を σ [C/m²] (正) とする。また、空間は誘電率 ϵ の空気中とする。



(解) ガウスの法則の積分形①を用いる。面積分を行うガウス面としては、中心軸が z 軸に平行な円柱の表面とする。電界は z 軸方向に一樣に分布していると考えられる。円柱表面に垂直で外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} と電界 \mathbf{E} の内積は、側面では両者が直交するので 0 になるから、面積 S_0 の上の面と下の面だけを考えればよい。よって、

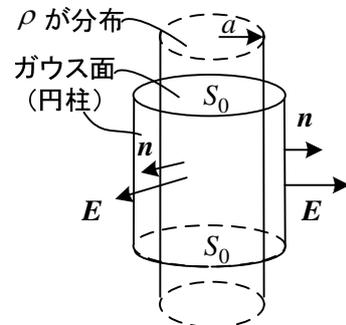
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2\epsilon \int_{S_0} |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{n}| \cos 0 \, dS = 2\epsilon E S_0 = \int_V \rho \, dV = \sigma S_0$$

ただし、 $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|$ である。 V は円柱の中の全空間であるが、電荷は x - y 平面上にしかない。よって、

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (D = \frac{\sigma}{2}) \tag{4-27}$$

$\sigma < 0$ の場合には、大きさは同じで電界の向きが逆になる。

例題 5 図の様に誘電率 ϵ の空気中で無限に長い軸を持つ半径 a [m] の円筒内に一樣に電荷密度 ρ [C/m³] の電荷が分布している。このとき各部の電界を求めよ。



(解) 電界は軸から外側に向かって放射状にできると考えられる。軸が同じで、半径 r [m]、高さ 1m の円柱のガウス面を考える。上面と下面では \mathbf{E} と \mathbf{n} は直交するので $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ である。

$r \leq a$ のとき、ガウスの法則より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_{\text{側面}} E_r \, dS = \epsilon 2\pi r \times 1 \times E_r = \int_V \rho \, dV = \pi r^2 \times 1 \times \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{r}{2\epsilon} \rho$$

$a \leq r$ のとき, ガウスの法則より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon \int_{\text{側面}} E_r dS = \epsilon 2\pi r \times 1 \times E_r = \int_V \rho dV = \pi a^2 \times 1 \times \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{a^2}{2\epsilon r} \rho$$

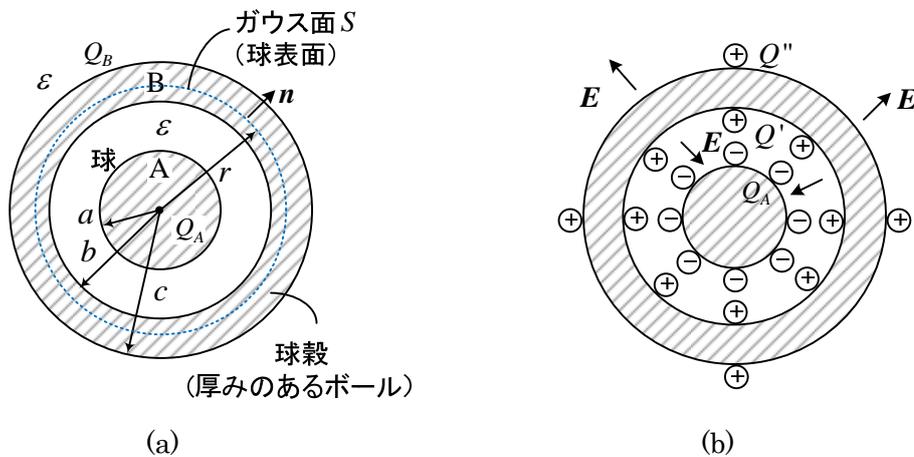
(注) $a \leq r$ のとき, r 点の電位については, 電界に沿って, 電界を積分することで

$$V_r = -\int_{\infty}^r \frac{a^2 \rho}{2\epsilon r} dr = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon} [\log r]_{\infty}^r = \infty$$

となる。これは無限に長いとしたことによる。半径 r_1 の点から見た半径 r_2 の点の電位差は

$$V_{r_2} - V_{r_1} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{a^2 \rho}{2\epsilon r} dr = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon} [\log r]_{r_1}^{r_2} = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon} \log \frac{r_1}{r_2}$$

例題 6 図(a)のように半径 a の導体球 A の外側に, 中心が同じで内半径 b , 外半径 c の導体の球殻 B で包み, それぞれに電荷 Q_A, Q_B を与えた。各部分の電界と電位を求めよ。ただし, A, B 間と B の外は誘電率 ϵ の空気中とする。 $Q_A < 0, Q_B > 0, Q_A + Q_B > 0$ とする。



(解) (b)に示すように, 電荷は導体表面に一様に分布し, 導体中の電界は 0 である。
 B の外側 ($r > c$): 対称性より電界は放射状にできると考えられる。半径 r の同心球表面をガウス面として, ガウスの法則より(図 4-3 の場合と同様に考えて)

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon \int_S E_r dS = \epsilon 4\pi r^2 E_r = \int_V \rho dV = Q_A + Q_B \quad \therefore E_r = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon r^2}$$

$$\text{電位は, } V = -\int_{\infty}^r E_r dr = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon r}$$

B の中 ($c > r > b$): 導体中なので $E_r = 0$, 電位は $V = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon c}$ で一定である。

$$E_r = 0 \text{ だから, ガウスの法則より } 0 = Q_A + Q' \quad \therefore Q' = -Q_A$$

A と B の間 ($b > r > a$) : ガウス面の中の電荷の和は, Q_A のみだから

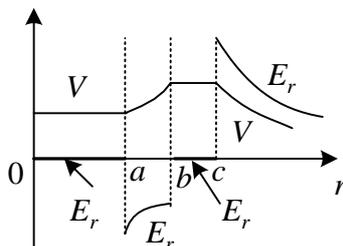
$$\text{電界は, } E_r = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon r^2}$$

$$\text{電位は B の電位に } V_{rb} = -\int_b^r E_r dr = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon r} - \frac{Q_A}{4\pi\epsilon b} \text{ 分が加わるので}$$

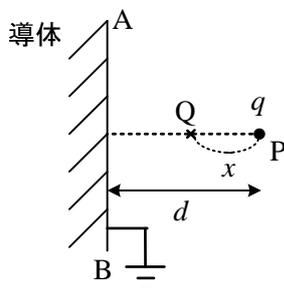
$$V = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon r} - \frac{Q_A}{4\pi\epsilon b} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon c}$$

A の中 ($a > r$) : 導体中なので電界は 0 である。

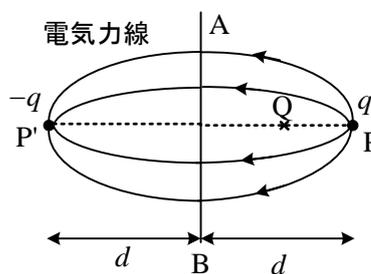
$$\text{電位は } V = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon a} - \frac{Q_A}{4\pi\epsilon b} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon c} \text{ で一定である。}$$



例題 7 図(a)の様に接地された無限に広い導体板から d 離れた空気中の P 点に, $q (> 0)$ の点電荷がある。P 点から x 離れた Q 点の電界の大きさと電位を求めよ。



(a)



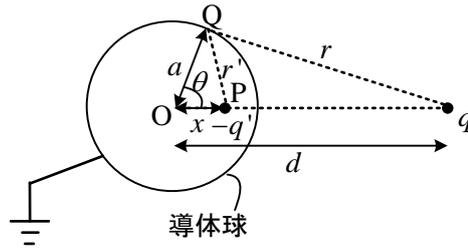
(b)

(解) 図(b)に示すように, 導体をなくして, P と対称の位置にある P' 点に電荷 $-q$ を置いた場合を考える。導体に垂直に電気力線ができるので, (a),(b)については, 面 AB の右側の電界は等しいと考えられる。従って, Q 点の電界 (左向きを正として) は重ね合わせの理より

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon x^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon(2d-x)^2}$$

$$\text{電位も重ね合わせの理より } V = \frac{q}{4\pi\epsilon x} - \frac{q}{4\pi\epsilon(2d-x)}$$

例題 8 接地された半径 a の導体球の中心 O から d 離れた点に, $q (> 0)$ の点電荷がある。導体球の外 (誘電率 ϵ の空気中) の電界を求めるとき, O から x の P 点に $-q'$ の電荷をおいた場合と等しくなるという。 x と Q' を求めよ。



(解) 導体球上に点Qをとり，導体球を取り除いて考える。Q点の電位Vは次式で与えられる。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-q'}{r'} + \frac{q}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-q'}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta}} + \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}} \right)$$

導体球外の電界が等しくなるには， $V=0$ であればよい。よって，

$$\frac{q'}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta}} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}}$$

$q > 0$ なので， $q' > 0$ でなければならない。両辺を2乗して

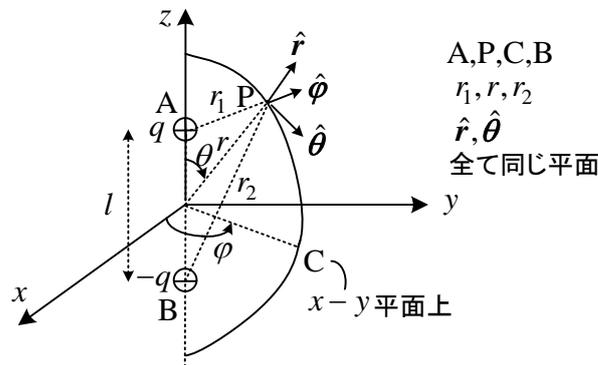
$$q'^2 (a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta) = q^2 (a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta)$$

任意の θ について成り立つには， $\cos \theta$ の係数が0でなくてはならないので， x, q' が以下のように求められる。

$$x^2 d - (a^2 + d^2)x + a^2 d = 0 \quad \therefore (xd - a^2)(x - d) = 0 \quad \text{などにより}$$

$$x = \frac{a^2}{d}, \quad q' = \frac{a}{d} q$$

例題9 図のように誘電率 ϵ の空气中で， l 離れた z 軸上の2点A,Bにそれぞれ $q, -q$ ($q > 0$)の点電荷がある。原点から r の距離にあり，角度 θ の点Pの電位を求めよ。さらに， l が r に比べて十分小さいとき（**電気双極子**という）の電位と電界を求めよ。



(解) 対称性から，図の角度 ϕ (ファイ)が変わってもP点の電位は同じと考えられる。P点の電位は，重ね合わせの理により

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2} \quad (1)$$

ここで, $r_1 = \sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 - rl \cos \theta}$, $r_2 = \sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 + rl \cos \theta}$ (余弦定理)

次に, $(l/r) \ll 1$ の場合を考える。 $\delta \ll 1$ のとき近似式 $(1 + \delta)^\alpha \approx 1 + \alpha\delta$ を用いて

$$r_1 = \sqrt{r^2(1 + (\frac{l}{2r})^2 - \frac{l}{r} \cos \theta)} \approx r(1 - \frac{l}{r} \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta \quad (2 \text{ 乗の項は無視})$$

同様に $r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta$

$$\frac{1}{r_1} \approx (r - \frac{l}{2} \cos \theta)^{-1} = \frac{1}{r} (1 - \frac{l}{2r} \cos \theta)^{-1} \approx \frac{1}{r} (1 + \frac{l}{2r} \cos \theta), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} (1 - \frac{l}{2r} \cos \theta)$$

よって, (1)に代入して, $V = \frac{M}{4\pi\epsilon r^2} \cos \theta$ [V] (4-28)

ここで,

$$M = ql$$

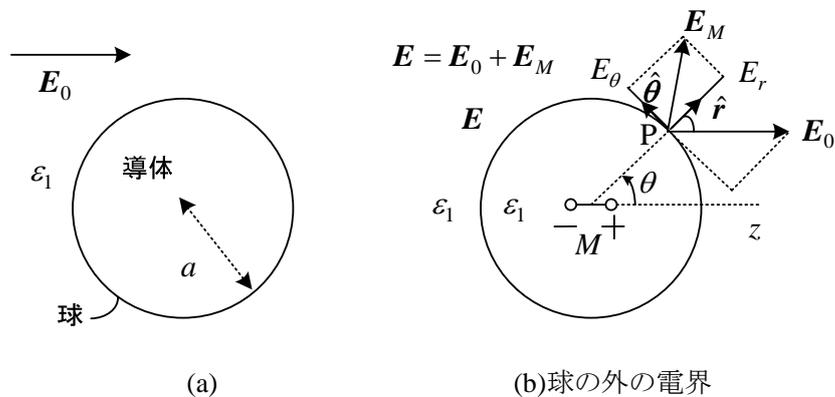
は**電気双極子モーメント**と呼ばれる。

電界は, 球座標系の(付 24)より

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{M}{2\pi\epsilon r^3} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{M}{4\pi\epsilon r^3} \sin \theta \\ \therefore E_r &= \frac{M}{2\pi\epsilon r^3} \cos \theta, E_\theta = \frac{M}{4\pi\epsilon r^3} \sin \theta \quad [\text{V/m}] \end{aligned} \quad (4-29)$$

例題 10 図(a)に示すように誘電率 ϵ_1 の平等電界 \mathbf{E}_0 の中に, 半径 a の導体球を置いた。球の外の電界 \mathbf{E} を求めよ。

(解) 球内の導体中の電界は 0 である。



球の外の電界を考える場合には, 平等電界 \mathbf{E}_0 と球の中心に双極子モーメント M の双極子を置き全体を誘電率 ϵ_1 とした場合の電界との和と考える。球の境界の点 P における境界条件を満足するように, M を決めることができればこの仮定は正しいと考えられる。

双極子が作る電界 \mathbf{E}_M は(4-29)より次式で与えられる。

$$E_r = \frac{M}{2\pi\epsilon_1 r^3} \cos\theta, \quad E_\theta = \frac{M}{4\pi\epsilon_1 r^3} \sin\theta \quad (1)$$

(2-64)より導体表面では電界の接線成分が0になることから次式が成立しなければならない。

$$-E_0 \sin\theta + \frac{M}{4\pi\epsilon_1 a^3} \sin\theta = 0 \quad \therefore M = 4\pi a^3 \epsilon_1 E_0 \quad (2)$$

よって、全電界は(1), (2)より

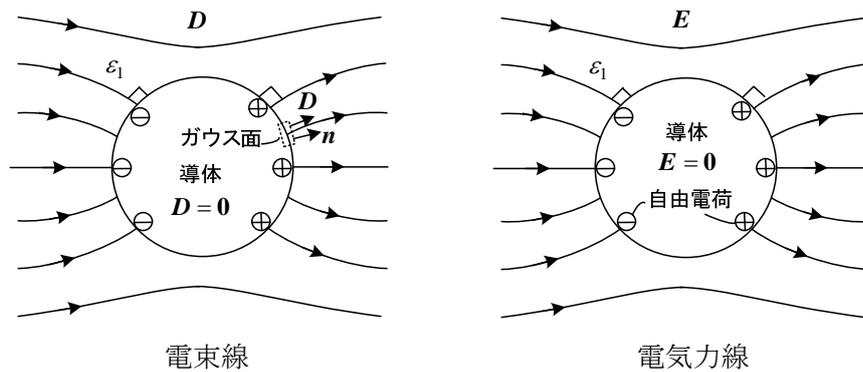
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_M = \hat{r}\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)E_0 \cos\theta + \hat{\theta}\left(-1 + \frac{a^3}{r^3}\right)E_0 \sin\theta, \quad \mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}$$

導体表面の自由電荷密度はガウスの法則より、図の様に小さい円柱のガウス面を考えて

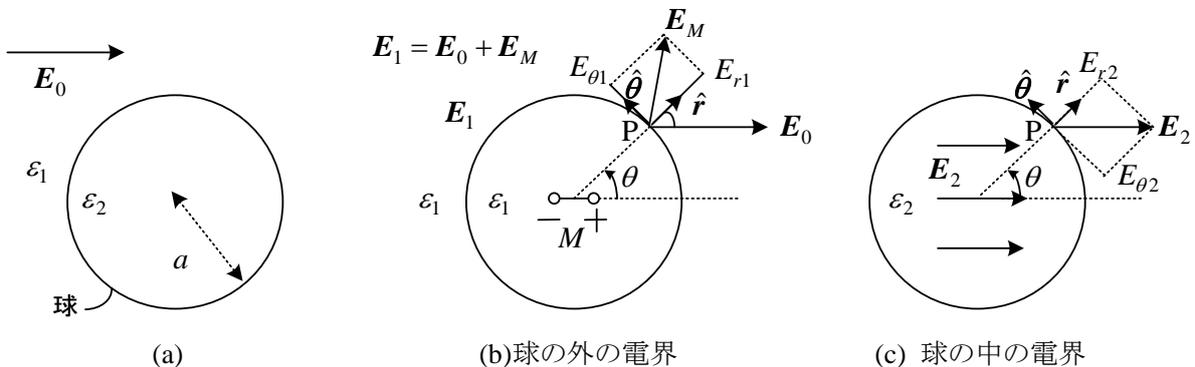
$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \mathbf{D} \cdot \hat{r} \Delta S = \Delta S \epsilon_1 \left(1 + \frac{2a^3}{a^3}\right) E_0 \cos\theta = \sigma \Delta S$$

だから、 $\sigma = 3\epsilon_1 E_0 \cos\theta$ である。

図は力線を示している。 $\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}$ より電束線と電気力線は大きさの違いだけである。



例題 11 図(a)に示すように誘電率 ϵ_1 の平等電界 \mathbf{E}_0 の中に、誘電率 ϵ_2 、半径 a の誘電体球を置いた。球の外の電界 \mathbf{E}_1 と球の中の電界 \mathbf{E}_2 を求めよ。



(解) 球の外の電界を考える場合には、平等電界 \mathbf{E}_0 と球の中心に双極子モーメント \mathbf{M} の双極子を置き全体を誘電率 ϵ_1 とした場合の電界との和と考え、誘電率 ϵ_2 の球の中は平等電界 \mathbf{E}_2 と仮定する。球の境界の点 P における境界条件を満足するように、 \mathbf{M} と \mathbf{E}_2 を決めればこの仮定は正しいと考えられる。

双極子が作る電界 E_M は(4-29)より次式で与えられる。

$$E_{r1} = \frac{M}{2\pi\epsilon_1 r^3} \cos \theta, \quad E_{\theta 1} = \frac{M}{4\pi\epsilon_1 r^3} \sin \theta$$

(2-62)より電界の接線成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

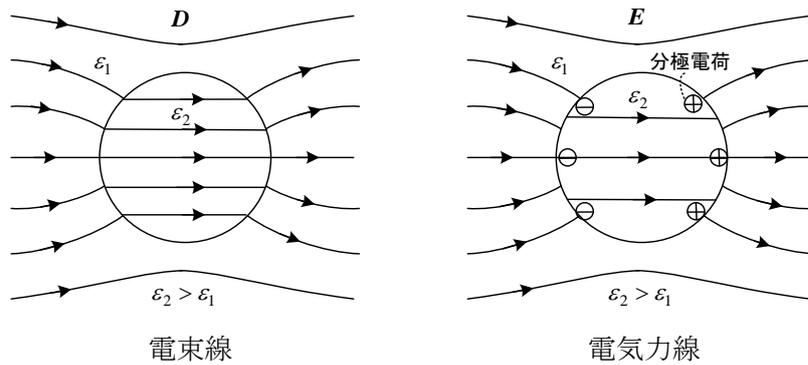
$$-E_0 \sin \theta + \frac{M}{4\pi\epsilon_1 a^3} \sin \theta = -E_2 \sin \theta \quad (1)$$

(2-63)より電束密度の垂直成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

$$\epsilon_1 E_0 \cos \theta + \frac{\epsilon_1 M}{2\pi\epsilon_1 a^3} \cos \theta = \epsilon_2 E_2 \cos \theta \quad (2)$$

(1), (2)を解いて, $M = \frac{4\pi a^3 \epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$, $E_2 = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$

図は力線を示している。電束線は連続であるが、電気力線は不連続である。球の表面に分極電荷が生じ球内の電界は小さくなる。また電束線は誘電率の大きいところ集まる傾向がある。図示は省略したが $\epsilon_2 < \epsilon_1$ の場合には、球外より球内の電束線の間隔が広がる。



○ コンデンサ

コンデンサは電子回路の部品から電力設備に至るまで、電圧を安定に（一定に）保つ用途、ノイズを吸収する用途など非常に良く使われている。原理的には、コンデンサは図 4-10 に示すように、2 枚の金属板 A、B を極板として平行においたもので、電荷を貯めることができる。

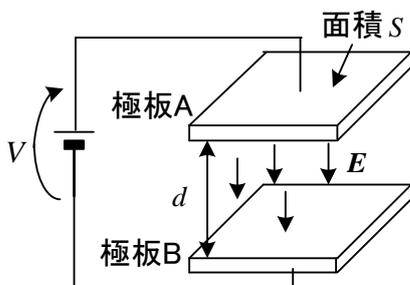


図 4-10 平行平板コンデンサ

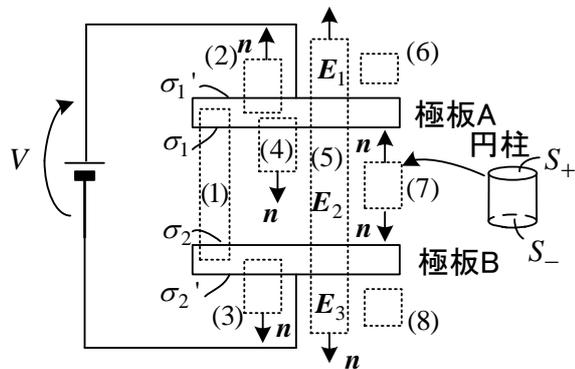


図 4-11 ガウス面

両極板の間は絶縁物(insulator)(これは誘電体とも呼ばれる)で、そこを電子が移動することはない。電荷がたまるということは、金属板の中にある自由電子が、多くなったり(マイナスに帯電)、少なくなったり(プラスに帯電)するためである。これらの電荷によって、コンデンサの中には、電界(電場)が生じる。図4-10の平行平板コンデンサについて、基本的な関係式を導こう。

コンデンサの極板は広く電界 \mathbf{E} および電束密度 \mathbf{D} は極板に垂直方向のみと考える。 極板間は誘電率 ϵ の絶縁物で満たされ、外は誘電率 ϵ_0 の空気中とする。円柱のガウス面を図4-11の様8通り考えよう。電束密度の面積分は、円柱の側面では $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$ になるから、上の面 S_+ と下の面 S_- だけを考えればよい(面積は同じ S_0 とする)。 $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'$ [C/m^2] は極板表面の面自由電荷密度で、これらも面に一様に分布しているとする。以下の電束密度と電界の添え字 n はガウス面の法線 \mathbf{n} 方向成分を表す。

(1)より、도체中の電界および電束は0であるから、 ①'より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 0 = \int_V \rho dV = (\sigma_1 + \sigma_2) S_0 \quad \therefore \sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

(2)より、도체中の電界および電束は0であるから、 $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = D_{1n}$ とおいて①'より

$$\int_{S_+} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} dS = D_{1n} S_0 = \int_V \rho dV = \sigma_1' S_0 \quad \therefore D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} = \sigma_1'$$

(3)より、도체中の電界および電束は0であるから、 $\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{n} = D_{3n}$ とおいて①'より

$$\int_{S_-} \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{n} dS = D_{3n} S_0 = \int_V \rho dV = \sigma_2' S_0 \quad \therefore D_{3n} = \epsilon_0 E_{3n} = \sigma_2'$$

(4)より、도체中の電界および電束は0であるから、 同様に $D_{2n} = \epsilon E_{2n} = \sigma_1$

(5)より、同様に $D_{1n} + D_{3n} = \epsilon_0 E_{1n} + \epsilon_0 E_{3n} = \sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'$

(6), (7), (8)より各領域の電界および電束がそれぞれの領域で至る所等しい。例えば(7)で

$$\int_{S_-} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_+} \mathbf{D}_2' \cdot \mathbf{n} dS = D_{2n} S_0 + D_{2n}' S_0 = 0 \quad \therefore D_{2n}' = -D_{2n} \quad \therefore \mathbf{D}_2' = \mathbf{D}_2$$

(5)で上下のガウス面を無限遠点としたとき、両極板の間隔は無視できるので、 $E_{1n} = E_{3n} = E_\infty$ と考えられよう⁽¹⁷⁾。(6), (8)より各領域の電界は等しいので、極板の外では、常に $E_{1n} = E_{3n}$ が成り立つ。電荷保存の法則より、コンデンサ全体の電荷の総量は0なので $\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2' = 0$ である。(5)で、 $E_{1n} + E_{3n} = 0$ だから、 $E_{1n} = E_{3n} = 0$ となる。よって(2), (3)の式より、 $\sigma_1' = \sigma_2' = 0$ となる。(1)より $\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad \therefore \sigma_2 = -\sigma_1$ であり、(4)より $E_{2n} = \sigma_1 / \epsilon$ である。 $\sigma_1 > 0$ であれば、 $E_{2n} > 0$ となり、 $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} = E_{2n}$ だから \mathbf{E}_2 は下向きであることを表す。

現実のコンデンサは無限に広くはなく図4-13に示すように端の部分で電界が乱れる。しかし、簡単のため、電荷は極板Aの上側表面と極板Bの下側表面には存在せず、電界は極板間に一様にできているとして取り扱う。 $\sigma_1 = \sigma$ と書き換えて

$$Q = \sigma S \tag{4-30}$$

である。従ってコンデンサの電界および電束は $D_{2n} = D$, $E_{2n} = E$ と書き換えて次式となる。

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S} \tag{4-31}$$

極板間の B から見た A の電圧 V_{AB} は電源電圧と等しく、 $V_{AB} = V$ とならなければならない。よって、電界は下向きになり

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = -\int_0^d |\mathbf{E}| |t| \cos \pi \, dl = \int_0^d E \, dl = Ed \quad (4-32)$$

となる。このとき、 $Q > 0, \sigma > 0, D > 0, E > 0$ である。

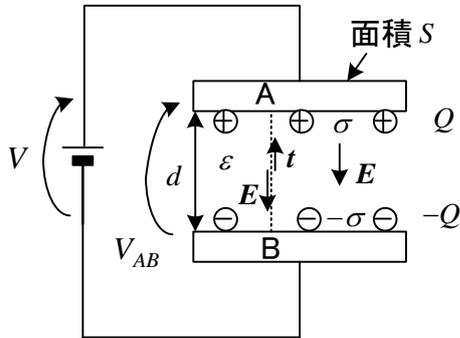


図 4-12 コンデンサの電界と電圧

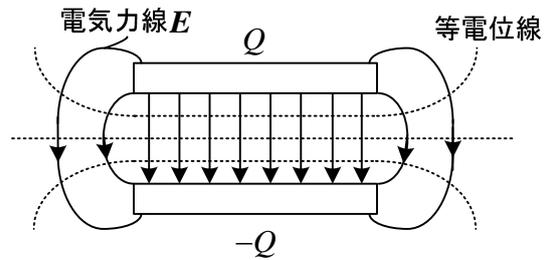


図 4-13 電気力線と等電位線

コンデンサの容量 C [F] は、次式で定義される。

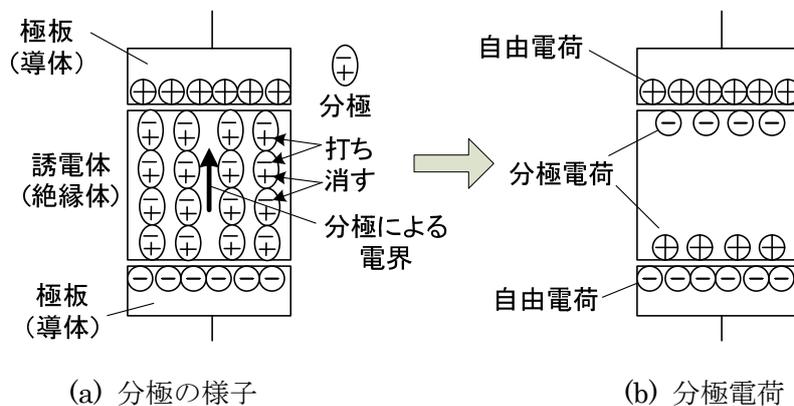
$$C = \frac{Q}{V_{AB}} \quad (4-33)$$

(4-31), (4-32) より、次式が得られる。

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (4-34)$$

コンデンサの極板間に絶縁体を入れると分極をおこし、電界を妨げる。分極について考え、電界 \mathbf{E} と電束密度 \mathbf{D} の違いを詳しく説明しよう。図 4-14 にコンデンサの分極のモデルを示している。誘電体（絶縁体）には、自由に動ける電子がないので伝導電流は流れないが、電界をかけると、電子が+極側に偏る現象が起きる。これを**分極**と言う。この結果、誘電体の上端には負、下端には正の分極電荷が生じる。この分極によって、極板表面の自由電荷（真電荷ともいう）が作る電界が弱められることになる。

極板の**面自由電荷密度** $\sigma = Q/S$ および誘電体の表面にある**面分極電荷密度** σ' を用いると電界の大きさ E は次式で与えられる。



(a) 分極の様子

(b) 分極電荷

図 4-14 コンデンサの分極

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} \quad (4-35)$$

分極電荷を考える場合には誘電体を真空と考えなくてはならない。**物質とは真空中に電荷が集まった状態である。** (4-35)で、 $\sigma \rightarrow D$ 、 $\sigma' \rightarrow P$ と置き換えて

$$E = \frac{D - P}{\epsilon_0} \quad \text{故に、} D = \epsilon_0 E + P \quad (4-36)$$

によって**誘電分極** P を定義する。図 4-15 はこのときの様子を示している。誘電分極 P は E に比例することが実験によりわかっている。そこで、

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad (4-37)$$

ここで、 χ_e : **電気感受率**、 ϵ_0 : 真空中の誘電率、 ϵ_r : **比誘電率**($\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$)、 ϵ : 誘電率と書くことができる。誘電分極 P は、分極のときに正電荷が移動した向きとなる(分極電荷の負電荷から正電荷に向けてとる)。図に書くときには P を逆向きに定義したくなるが、式の上では(4-36)のように定義した方が自然である。実用上は、誘電分極 P を考えることは少なく、誘電率 ϵ を用いて計算すればよいだろう。

重要なポイントとして、電束密度 D は(4-31)に示すように面自由電荷密度 σ や極板の電荷 Q によって決まる量であるが、電界 E は(4-35)に示すように σ と面分極電荷密度 σ' が関係する。ただし、(4-37)より電界は誘電率を使えば電束密度からすぐに求まる(分極電荷は忘れて良い)。そして電界 E は(4-32)に示したように電圧と直接関係する。①のガウスの法則の ρ には分極電荷は含まれていないことに注意しよう。

分極電荷密度 $\rho'(r,t)$ [C/m³]は分極 P と

$$\text{div} P(r,t) = -\rho'(r,t) \quad (4-38)$$

の関係がある。自由電荷密度 $\rho(r,t)$ [C/m³]を用いると①と(4-36)の div より次式が成り立つ。

$$\text{div} E(r,t) = \frac{\rho(r,t) + \rho'(r,t)}{\epsilon_0} \quad (4-39)$$

図で電荷や面電荷密度は $\pm Q, \pm \sigma$ と書かれることが多いが、 ρ, ρ' は(4-39)と整合性が必要である。

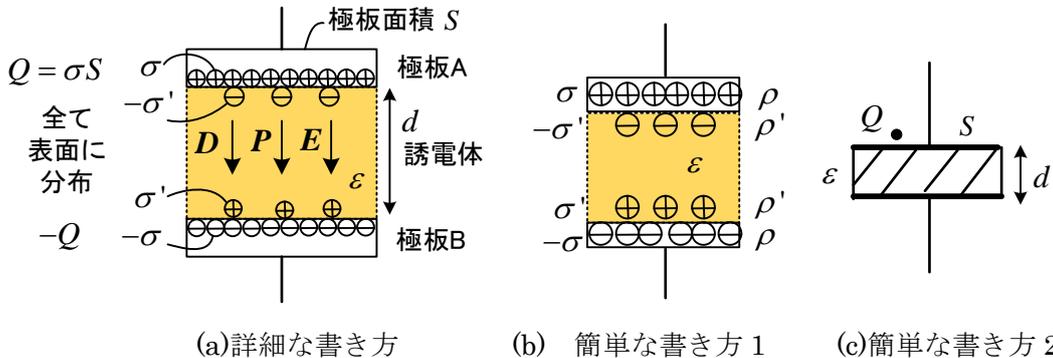
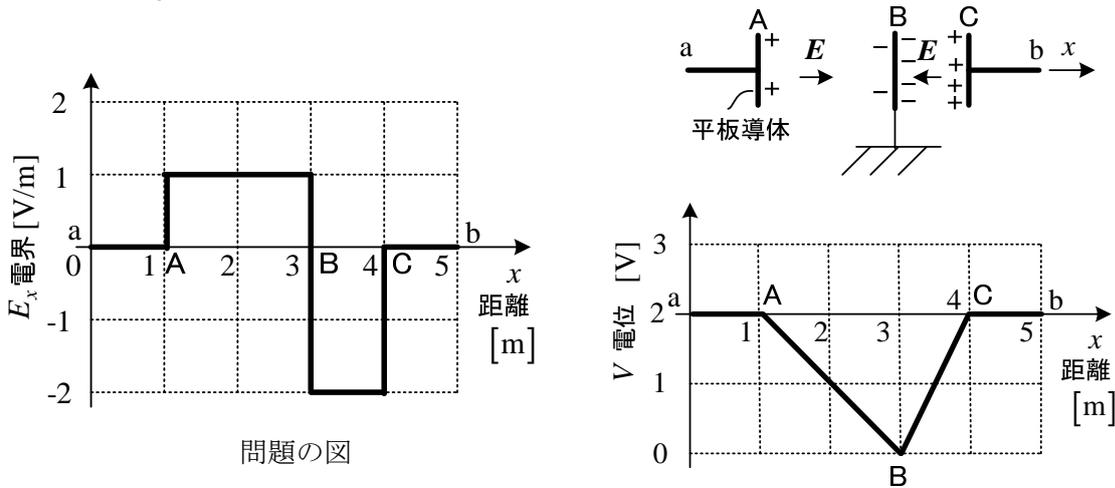


図 4-15 コンデンサのモデルと書き方

例題 12 x 軸方向に電界が存在し、2 点 ab 間の電界 E_x が図のようになっているとき、 ab 間の電位差はいくらか。



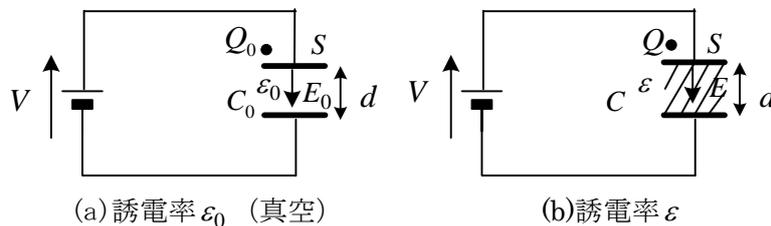
(解) 状況としては、正に帯電したコンデンサの極板のような導体 A, C があって、接地した平板導体 B には静電誘導により負の電荷が帯電している場合が考えられる。コンデンサのように AB, BC 間には一様な電界 E が図の向きに生じている。題意より電界の x 軸方向は図の向きになり、BC 間の電界 E_x は負になる。電位 V は x だけの関数と考えられるから、(4-18)より

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\text{故に } V = -\int E_x dx \quad (\text{AB の区間では, } V = -E_x x + V_0 = -x + V_0)$$

であり、電位 V の傾きが $-E_x$ になるように、 V が求められる。右図には接地点 B を 0 電位として電位を図示している。BC 間では、 $E_x = -2$ なので、C 点の電位が高い。a, b 間の電位は右図のようになり、a, b は同電位であるから、電位差は 0 である。

例題 13 図の回路で、コンデンサの極板間に誘電率 ϵ の絶縁体を挿入したとき、真空中に比べて静電容量、電荷、極板間の電界は何倍になるか。図の \bullet 印でどちらの極板の電荷が明確にする。



(解) 極板の断面積を S 、極板間の距離を d とすると、各場合について

$$(a) \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (b) \quad C = \frac{\epsilon S}{d}$$

よって、 $C = \epsilon_r C_0$ すなわち、静電容量は、比誘電率 $\epsilon_r (= \epsilon / \epsilon_0)$ 倍になる。コンデンサ電圧は同じだから、極板の電荷は、次式より比誘電率倍になる。

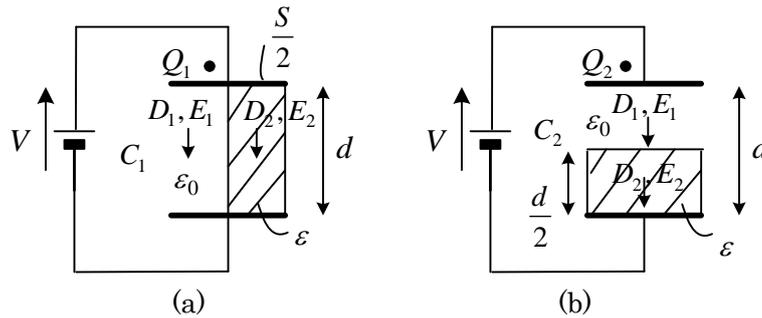
$$(a) \quad Q_0 = C_0 V \quad (b) \quad Q = C V$$

電界は、次式より、電圧が一定なので、変わらない。(4-31)でも確認しよう。

$$(a) \quad E_0 = \frac{V}{d} \quad (b) \quad E = \frac{V}{d}$$

図 4-14 より誘電体を入れると電界が弱まるが、電界が弱まるとコンデンサの電圧が低くなって、電源から電流が流れ、電荷が多く貯まるようになる。その結果電界が大きくなり、電源電圧とつりあうと電流が流れなくなる。もし、電源を外して、誘電体を入れた場合には、電荷は変わらず、電圧と電界は $1/\epsilon_r$ 倍に小さくなる。

例題 14 図の様にコンデンサの半分を誘電率 ϵ の誘電体で満たした時、静電容量を求めよ。



(解) (a)の場合 両誘電体にかかる電圧は等しいので、それらの電界は等しくなる。

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{d}, \quad D_1 = \epsilon_0 E_1, \quad D_2 = \epsilon E_2, \quad Q_1 = \frac{S}{2}(D_1 + D_2) = C_1 V \quad ((4-31)より)$$

$$\text{であるから, } Q_1 = \frac{SV}{2d}(\epsilon_0 + \epsilon) \therefore C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} + \frac{\epsilon S}{2d} \quad (\text{並列接続})$$

(b)の場合 電束密度は分極電荷に関係なく極板の自由電荷だけで決まるから両誘電体で等しい。

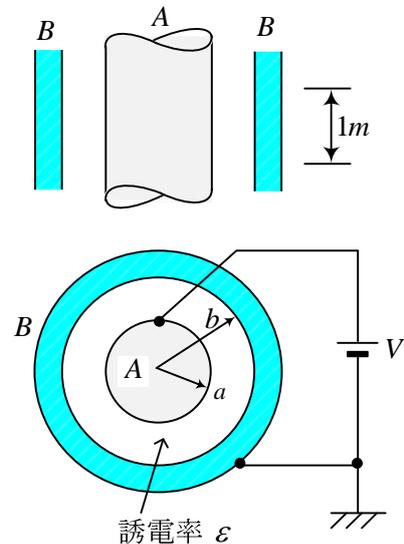
$$D_1 = D_2 = \frac{Q_2}{S}, \quad V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}, \quad D_1 = \epsilon_0 E_1, \quad D_2 = \epsilon E_2$$

$$\text{であるから, } V = \frac{Q_2}{\epsilon_0 S} \frac{d}{2} + \frac{Q_2}{\epsilon S} \frac{d}{2} \therefore \frac{1}{C_2} = \frac{d}{2\epsilon_0 S} + \frac{d}{2\epsilon S} \quad (\text{直列接続})$$

例題 15 半径 a [m] の内部導体 A と内半径 b [m] の外部導体 B からなる十分長い同軸ケーブルがある。導体 A, B 間には誘電率 ϵ の絶縁体がつめてある。

いま、A, B 間に直流電圧 V [V] を与えるとき、以下の問に答えよ。

- (1) ケーブル 1 m 当りに蓄えられる電荷 Q を求めよ。
- (2) ケーブル 1 m 当りの静電容量 C を求めよ。



(解) (1) A, Bを極板としたコンデンサと考えることができる。電界 E は図の矢印の様に軸に対して対称となる。いま、半径 r [m], 長さ 1 m の円柱の表面をガウス面としてガウスの法則を適用すると、閉曲面内の電荷は Q で、軸方向の電界は 0 であるから側面のみを考えて

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E_r \times \underbrace{2\pi r \times 1}_{\text{側面積}} = \frac{Q}{\epsilon}$$

(E と n は同方向で、 $E \cdot n = E_r$)

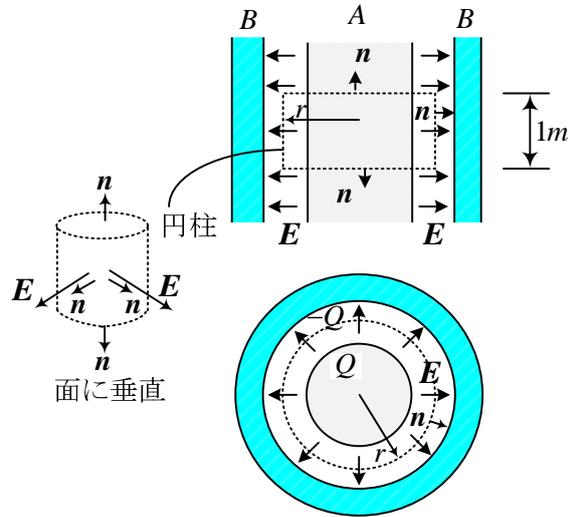
$$\therefore E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon r}$$

B から見た A の電圧 $V_{AB} = V$ は

$$V_{AB} = -\int_b^a E_r dr = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon r} dr$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon} [\log r]_b^a$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon} \log \frac{b}{a} \quad \therefore Q = \frac{2\pi\epsilon V}{\log \frac{b}{a}} \text{ [C/m]}$$



$$(2) C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon}{\log \frac{b}{a}} \text{ [F/m]} \tag{4-40}$$

同軸ケーブルは、テレビとアンテナの接続、計測器などに広く使われている。

○ コンデンサのエネルギーと力

物体に働く電氣的な力(電気力とよぶ)を求めるには 3 つの方法がある。(1)力の公式(2-46), (2)マクスウェルの応力(2-53), (3)エネルギーの原理による方法(7)(16)(23)である。

これまで説明していないエネルギーの原理による方法をコンデンサに関して説明しよう。コンデンサに電源が接続されているかどうかに関係なく利用できる。

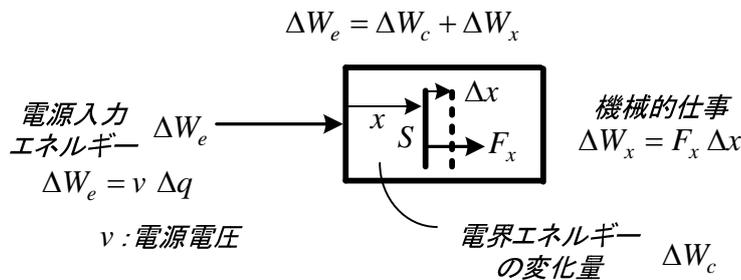


図 4-16 エネルギーの原理による方法

コンデンサの静電エネルギーを $W_c(x, v)$ とするとき、 x の位置にある面 S に働く電気力 F_x は x と電源電圧 v を独立変数と考えた場合：

$$F_x = \frac{\partial W_c(x, v)}{\partial x} \quad (4-41)$$

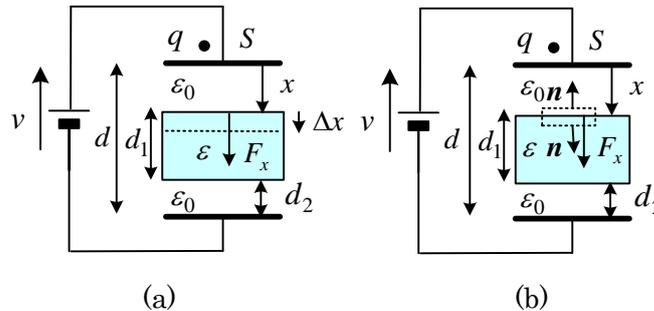
x と電荷 q を独立変数と考えた場合、コンデンサが線形の素子であるならば

$$F_x = -\frac{\partial W_c(x, q)}{\partial x} \quad (4-42)$$

である。この証明に関しては、後述の磁界中の力についての証明と同様に行える。なお、図 4-16 で Δx の変化については、仮想的に固体の誘電体が伸縮する場合も考えてよい。

例題を通して説明しよう。

例題 16 図の様に面積 S 、間隔 d の平行平板コンデンサの間に厚さ d_1 で等面積の誘電体を極板と平行に入れているとき、極板に働く電気力と誘電体表面及び全体に働く電気力を求めよ。



(解) 誘電体の上の面に働く力 F_x を求める。 d_1 が Δx 減ると考えて、コンデンサの静電容量を

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d - d_2 - x}{\epsilon S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} \quad (1)$$

と表す。蓄えられるエネルギーは $W_c = \frac{1}{2C} q^2$ [J] (例題 18 参照) だから、(4-42)より

$$F_x = -\frac{\partial W_c(x, q)}{\partial x} = \frac{1}{2S} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) q^2 \quad (2)$$

$F_x < 0$ だから、誘電体の上の面に働く力は x の増える向きと逆に上向きである。同様に誘電体の下の面に働く力は、下向きに $|F_x|$ の大きさである。この場合は、 C を次式で表し、 d_1 の変化で d_2 が減少すると考え、 d_1 で偏微分する。

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d_1}{\epsilon S} + \frac{d - x - d_1}{\epsilon_0 S} \quad (3)$$

よって誘電体全体に働く合力は 0 である (左右、前後は打ち消す)。あるいは誘電体全体に働く合力を求める場合 d_1 は変化せず、 x が Δx 増えると、 d_2 が減ると考え、(3)を x で偏微分する。

下の極板に働く電気力は、(3)の C を用い d で偏微分することで以下の様に求められる。

$$F_x' = -\frac{\partial W_c(d, q)}{\partial d} = -\frac{1}{2\epsilon_0 S} q^2 \quad (4)$$

負なので、実際には上向きである。同様に上の極板に働く力は下の極板に働く電気力と同じ大きさで向きは逆である。なお、エネルギーを電圧で表し、(4-41)を使っても同じ力が得られる。

誘電体に働く電気力を、(2-46)を用いて求めることもできる。

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu) dV$$

誘電体には、自由電荷はなく $\rho = 0$ である。また磁界はないので右辺の第 2, 4 項は 0 である。結局、右辺第 3 項のみである。誘電率が変化する誘電体の上面をまず考えると、電界 E と誘電率 ε は x のみの関数で、それを上の面近傍で体積分する。 $dV = S dx$ と考え、 D は一定だから

$$\begin{aligned} F &= - \int_V \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \varepsilon dV = - \frac{D^2}{2} \int_V \frac{1}{\varepsilon^2} \text{grad} \varepsilon dV = - \frac{SD^2}{2} \int \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dx} dx \hat{x} \\ &= - \frac{SD^2}{2} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \hat{x} = \frac{SD^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \hat{x} = F_x \hat{x} \end{aligned}$$

$q = SD$ だから(2)の結果と一致する。

同様に下の面では、下向きに $|\mathbf{F}|$ の力が働く。

マクスウェルの応力から求めることもできる。(2-54)で、磁界は 0 で、電界は x 成分のみだから、力も x 成分のみで

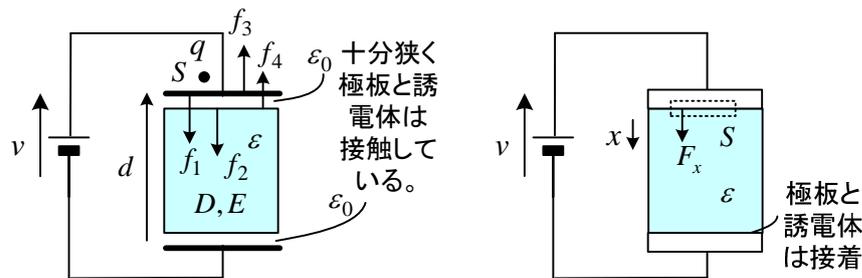
$$F_x = \int_S T_{xx} n_x dS = \frac{1}{2} \int_S (E_x D_x - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) n_x dS = \frac{1}{2} \int_S E_x D_x n_x dS$$

図(b)の様に誘電率が変化する誘電体の上面をはさんで、薄い直方体の表面を考える。 \mathbf{n} は外向き法線ベクトルでないといけないので、直方体の上側の面では $n_x = -1$ 、下側の面では $n_x = 1$ だから

$$F_x = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x^2}{\varepsilon} - \frac{D_x^2}{\varepsilon_0} \right) S$$

が得られ、 $D_x = D$ とおくと、(2)の結果と一致する。この場合 $T_{xx} > 0$ であり、 $T_{xx} > 0$ のときにはマクスウェルの応力は引っ張り力となる⁽²²⁾。この計算で、電源の極性は関係ない。また上向きに x 軸をとってもよい。誘電体中に薄い直方体を考えると $F_x = 0$ となる(打ち消す)が引っ張り応力は働いている。

例題 17 図の平行平板コンデンサで、極板と固体の誘電体が接触している(図では離し書いている)。極板に働く力と誘電体に働く力を求めよ。また完全に接着している場合はどうか。



(解) 極板と誘電体(固体)はミクロにみれば、わずかな隙間があり、その誘電率は ϵ_0 と考えられる。従って、上と下の極板に働く電気力は同じ大きさで、例題 16 より $f_1 = q^2 / (2\epsilon_0 S)$ である。両極板はお互い引き合うので、上の極板は接触している誘電体に $f_2 = q^2 / (2\epsilon_0 S)$ の力を及ぼす。この反作用として極板は $f_3 = q^2 / (2\epsilon_0 S)$ の力を誘電体から受ける。この結果、極板に働く合力は 0 となる。

一方、誘電体の上の面では誘電率の差があるので例題 16 と同様に $f_4 = \frac{SD^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$ の電気力が働く。よって誘電体の上の面には

$$f_2 - f_4 = \frac{SD^2}{2} \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{SD^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{SD^2}{2} \frac{1}{\epsilon}$$

の力が下向きに働く⁽¹⁹⁾。誘電体の下の面では、上向きに同じ大きさの力が働く。誘電体に働く力の合計は 0 である。

極板と誘電体が完全に接着している場合には、マクスウェルの応力から求める。(2-54)で、磁界は 0 で、電界は x 成分のみだから、力も x 成分のみで

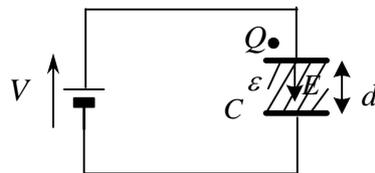
$$F_x = \int_S T_{xx} n_x dS = \frac{1}{2} \int_S E_x D_x n_x dS$$

接着している上の極板と誘電体との境界面に、薄い直方体の面 S_1 を考えると極板(導体)の中の電界は 0 だから

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{D_x^2}{\epsilon} S = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} S = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S$$

が得られる。この力で極板が引かれ、誘電体が押される。一般に導体表面には、面と垂直に単位面積当たり $F_x = \sigma^2 / (2\epsilon)$ の力が働く。この結果は、誘電体が液体や気体で満たされる場合に、(4-41)あるいは(4-42)を用いて得られる結果と同じである。結果的に、極板と誘電体の境界面に $f_1 - f_4$ の力が働いている。誘電体表面に作用している電気力が電極に圧力を加え、電極同士が引き合う力を減少させているとみることができる⁽²³⁾。下の極板と誘電体の境界には同じ大きさで反対向きの力が働く。

例題 18 図の様に面積 S 、間隔 d の平行平板コンデンサに蓄えられるエネルギーと極板に働く電気力を求めよ。極板と誘電率 ϵ の誘電体は接着しているとする。



(解) 電界のエネルギー密度 $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} ED$ [J/m³]

コンデンサのエネルギー

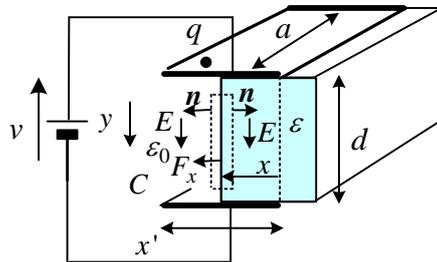
$$W_c = w_e Sd = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} Sd = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd = \frac{1}{2d} \epsilon V^2 S = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2C} Q^2$$
 [J]

極板に働く電気力は例題 17 の結果より次式となる。

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon} = \frac{D^2 S}{2\epsilon} = \frac{ED}{2} S = \frac{QE}{2} \text{ [N]}$$

ローレンツ力より、 $F = QE$ と考えたい。しかし、実際はこの半分である。電界 E は、 Q と $-Q$ により半分ずつ作られ、 $-Q$ が作る電界が Q に力を及ぼすとも解釈できる。自分が作った電界で自分自身に力は働かない。単位面積当たり極板に働く電気力は、電界のエネルギー密度に等しいことが分る。

例題 19 図の様に間隔 d の平行平板コンデンサ中に誘電体（誘電率 ϵ ）の一部があるとき、誘電体に働く電気力を求めよ。極板の奥行きを a とする。



(解) コンデンサの静電容量は $C = \frac{\epsilon_0(x'-x)a}{d} + \frac{\epsilon xa}{d}$

$W_c = \frac{1}{2} C v^2$ だから、(4-41)より

$$F_x = \frac{\partial W_c(x, v)}{\partial x} = \frac{a}{2d} (\epsilon - \epsilon_0) v^2 = \frac{d a}{2} (\epsilon - \epsilon_0) E^2$$

x の増加する向きに、極板内に誘電体が引き込まれるように電気力が働く。

マクスウェルの応力から求めることもできる。(2-54)で、電界は y 成分のみとすると

$$F_x = \int_S T_{xx} n_x dS = -\frac{1}{2} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} n_x dS$$

誘電率が変化する誘電体の左面をはさんで、薄い直方体の表面を考える。 \mathbf{n} は外向き法線ベクトルとして取らないといけなないので、直方体の左側の面では $n_x = 1$ 、右側の面では $n_x = -1$ だから

$$F_x = -\frac{1}{2} (E_y D_{y1} - E_y D_{y2}) d a = -\frac{E^2}{2} (\epsilon_0 - \epsilon) d a$$

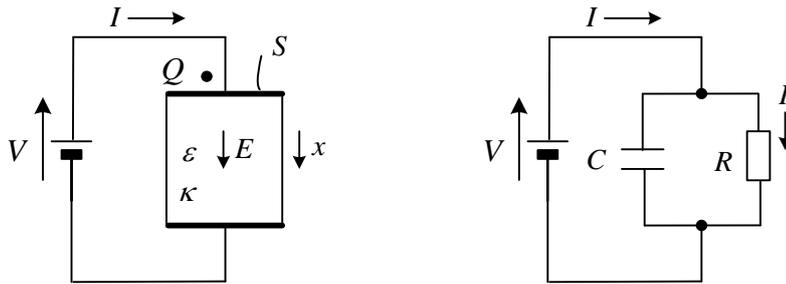
が得られる ($E_y = E$)。 x 成分は正で、先の結果と一致する。この場合 $T_{xx} < 0$ であり、 $T_{xx} < 0$ のときにはマクスウェルの応力は面 S から内側へ向く圧縮力（圧力）となる。

(考察) 電界を y 方向成分だけとすると、分極電荷にこの電界が作用して解答のような x 方向成分のクーロン力が出るのはおかしい⁽²⁰⁾。この問題を厳密に考えるなら、電界が y 方向成分だけであるという仮定を取り除かなければいけない。特に、誘電体の左端付近やコンデンサの右端付近では電界が乱れるであろう。これらの乱れた電界が x 方向成分の力を生むと考えられる⁽²²⁾。しかしながら、誘電体全体に働く力は、結果的に上記の値になるであろう。

○ 漏れ電流があるコンデンサ

媒質の誘電率 ϵ , 極板の面積 S の平行平板コンデンサに図の様に直流電源を接続したところ絶縁が完全ではなく漏れ電流 I が流れた。媒質の導電率を κ として以下の問いを考える。

- (1) 電流 I と電界 E の関係式を書け。極板の電荷 Q と電界 E の関係式を書け。
- (2) (1)の結果より, コンデンサの静電容量 C と抵抗 R の関係式を求めよ。
- (3) このコンデンサの等価回路を書け。



- (1) 媒質中の電流密度は $i = \kappa E$ なので, $I = \kappa ES$
 極板の面電荷密度は電束密度に等しく $D = \epsilon E$ なので, $Q = \epsilon ES$
 i, E, D は x 軸成分を表す。

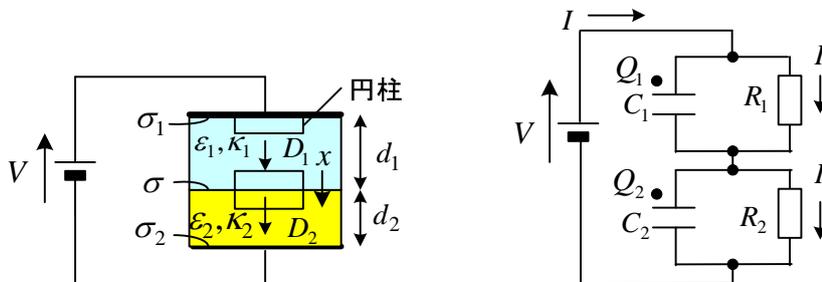
- (2) (1)の結果より

$$C = \frac{Q}{V}, R = \frac{V}{I} \therefore CR = \frac{Q}{I} = \frac{\epsilon}{\kappa} \quad (4-43)$$

- (3) (2)の関係式を満たす等価回路は, 右図に示す C, R の並列回路と考えられる。

第3章で述べた抵抗の等価回路も C, R の並列回路と考えられる。ただし, 抵抗の場合は κ が大きく, C が小さいので電源を流れる電流と R を流れる電流はほとんど同じである。電源が交流の場合, 電源を流れる電流とコンデンサの漏れ電流 (等価回路の R に流れる電流) は異なる。

例題 20 図の様に誘電率 ϵ_1 , 導電率 κ_1 の誘電体 1 と誘電率 ϵ_2 , 導電率 κ_2 の誘電体 2 を平行平板電極ではさみ, 直流電圧 V の電源に接続している。時間が十分経過したとき電流密度, 電束密度, 面自由電荷密度を求めよ。



- (解) 誘電体 1 の電流密度を i_1 , 電束密度を D_1 , 電界を E_1
 誘電体 2 の電流密度を i_2 , 電束密度を D_2 , 電界を E_2

極板の面自由電荷密度を σ_1, σ_2 、誘電体 1 と 2 の境界の面自由電荷密度を σ とする。 i_1, D_1, E_1 等は x 軸成分を表す。以下の式が成立つ。

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad (1)$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, D_2 = \varepsilon_2 E_2 \quad (2)$$

$$i_1 = \kappa_1 E_1, i_2 = \kappa_2 E_2, i_1 = i_2 = i \quad (3)$$

(1),(3)より

$$V = \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)i \quad \therefore i = V / \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)$$

よって、 $E_1 = \frac{V}{\kappa_1 \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)}, E_2 = \frac{V}{\kappa_2 \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)}$, (2)より $D_1 = \frac{\varepsilon_1 V}{\kappa_1 \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)}, D_2 = \frac{\varepsilon_2 V}{\kappa_2 \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right)}$

よって、 $D_1 \neq D_2$ である。円柱のガウス面をとり、ガウスの法則を適用すると、誘電体の境界では $(D_2 - D_1)S = \sigma S$ より σ が存在する。

$$\sigma = D_2 - D_1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1}\right) \frac{V}{\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1}\right)i, \quad \sigma_1 = D_1, \quad \sigma_2 = -D_2$$

よって、誘電体の境界にあるのは分極電荷ではなく自由電荷である。

等価回路は右図のようになる。極板の断面積を S とすると、以下のような関係があり、上の式と一致する。等価回路では、抵抗だけを電流が流れる。

$$I = iS, R_1 = \frac{d_1}{\kappa_1 S}, R_2 = \frac{d_2}{\kappa_2 S}, Q_1 = \sigma_1 S, Q_2 = -\sigma_2 S, Q_2 - Q_1 = \sigma S$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2} \text{ を用い、}$$

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}, Q_1 = C_1 V_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1} \frac{R_1 V}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \frac{V}{\frac{d_1}{\kappa_1 S} + \frac{d_2}{\kappa_2 S}} = S D_1$$

○ 交流電源につながれたコンデンサ

最後にコンデンサに交流電源を接続した図 4-17 の場合について述べる。交流の場合でも、極板に一樣に電荷が分布し、コンデンサ内の電束線や電気力線は x 軸成分のみと仮定する。このとき、たとえ時間的に変化してもガウスの法則①' は成立するので電界 $\mathbf{E}(t)$ や電束密度 $\mathbf{D}(t)$ もコンデンサ内では同じ値になり次式が成り立つ。

$$D(t) = \sigma(t) = \frac{Q(t)}{S}, \quad E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon} \quad (4-44)$$

ここで、 $D(t), E(t)$ は x 軸成分、 $\sigma(t)$ は面自由電荷密度、 $Q(t)$ は極板の全電荷であり、すべて時間と共に変化する。このとき、

$$\text{rot}\mathbf{E}(t) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-45)$$

となり、 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_c(t)$ のクーロン電界である。ここで、 $\mathbf{E}(t)$ が y, z の関数であればクーロン電界ではないことに注意しよう。すなわち極板に電荷が一様に分布していないなら、たとえ電界が x 軸成分だけであっても、厳密にはクーロン電界ではない。電荷が一様に分布しないケースは第 7 章の図 7-11 平行平板導波路で述べる。

(4-45)より、クーロン電界だからコンデンサ電圧は

$$v_{AB}(t) = -\int_B^A \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = E(t)d \quad (4-46)$$

となる。 $v_{AB}(t)$ は B 点から見た A 点の電圧である。なお静電界は時間的に変化しないから、(4-46)は得られない。

連続の式より自由電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ には各点で次式が成り立つ。

$$\text{div}\mathbf{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{\text{O}}$$

①を図(b)の閉曲面 S_1 で囲まれた領域 V_1 で体積分すると次式が得られる。

$$\int_{V_1} \text{div}\mathbf{i} dV + \int_{V_1} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$$

ガウスの定理を用いて

$$\int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho dV = 0 \quad (4-47)$$

左辺第 1 項は、閉曲面 S_1 より流れ出す電流で、電気回路の $-i(t)$ と一致する。左辺第 2 項は、上の極板の全電荷 $Q(t)$ の微分である。従って、良く知られた

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4-48)$$

が得られる。

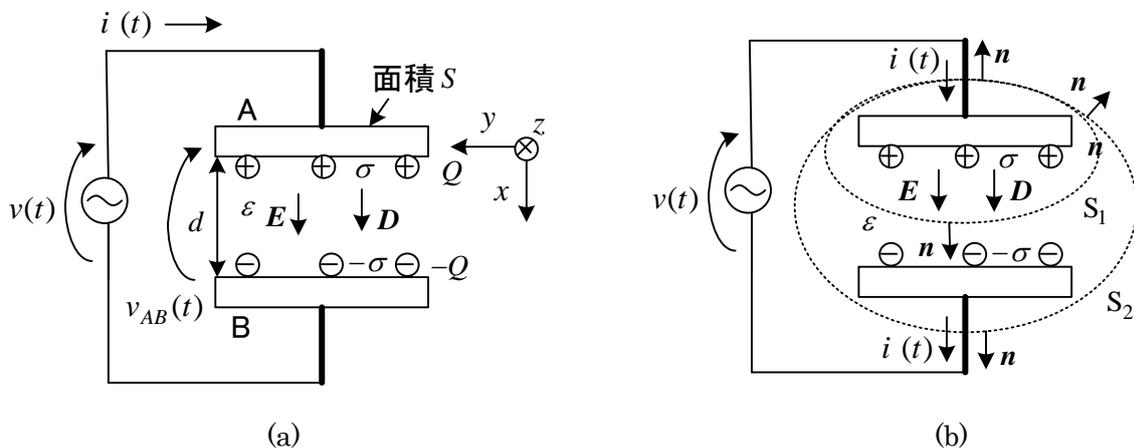


図 4-17 交流電源につないだコンデンサ

閉曲面 S_2 で囲まれた領域 V_2 で体積分すると、 V_2 内の全電荷は 0 だから、(4-47)と同様にして次式が得られる。

$$\int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4-49)$$

これは、極板 A に入る電流と極板 B から出る電流が等しいことを表している。

電源電圧が $v(t) = V_m \sin \omega t$ のとき、 $v(t) = v_{AB}(t)$ だから

$$E(t) = \frac{v_{AB}(t)}{d} = \frac{V_m \sin \omega t}{d}$$

である。よって、

$$D(t) = \varepsilon E(t) = \frac{\varepsilon}{d} V_m \sin \omega t, \quad Q(t) = S \sigma(t) = S D(t) = \frac{\varepsilon S}{d} V_m \sin \omega t$$

静電容量は $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ 、 $Q(t) = C v_{AB}(t)$ が成り立つ。回路に流れる電流は(4-48)より

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t$$

ところで、磁界は③により発生する。コンデンサでは、磁界のエネルギーは小さいと見て、これを無視するが、電束密度 $\mathbf{D}(t)$ が時間変化するので、磁界は存在している。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \textcircled{3}$$

コンデンサ内では、伝導電流 $\mathbf{i}(t)$ は 0 であるが、変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ が流れる。これを求めると

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{d} V_m \sin \omega t \right) = \frac{\varepsilon \omega}{d} V_m \cos \omega t$$

である。すなわち、

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{i}(t)}{S} \quad (4-50)$$

が成り立っている。つまり、単位面積当たりの伝導電流 $\mathbf{i}(t)$ と同じ変位電流がコンデンサ内に流れる。回路を結ぶ導線のまわりに磁界が発生するが、それと同じ大きさの磁界がコンデンサの周りにもできている。導線の周りの磁界は普通無視して考えないのと同じように、コンデンサでは変位電流が作る磁界を無視することができる。もちろん変位電流は電子がコンデンサの中を動いてできるものではないが、磁界を作るので電流の仲間に入れている。マクスウェルによって発見されたものである。変位電流というと難しく聞こえるが、電束密度の時間変化と考えるだけでも特に問題はなからう。

磁界の影響は、一般に高周波で無視できなくなる。回路的にはインダクタンスの成分が導線やコンデンサの電極などに生じることになる。従って高周波領域では、実際のコンデンサの等価回路は RC の並列回路に直列にインダクタンスをつないだ回路が利用される。もちろん回路は電磁現象を近似的に表すものである。