



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10069/38873">http://hdl.handle.net/10069/38873</a>
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-19T13:00:47Z

# 第5章 コイル I

この章では、まず電流が作る磁界を計算する方法として周回積分の法則とビオーサバールの法則を述べる。次に、磁束が通り易い磁性体と磁気回路について述べる。さらに磁界のエネルギーと力の計算法を説明する。最後に磁気双極子と微小電流ループがつくる磁界を求め、これらの等価な条件を示す。本章の解析においては変位電流を無視し、緩慢に変化する現象を解析する。

## ○ 電流が作る磁界

導線に交流電流を流す場合を考えよう。電流  $I$  と磁界  $H$  の間には図 5-1 に示すように右ねじの法則が成り立つ。すなわち実際に電流の流れる向きにねじを進めると、ねじの回る向きに磁界ができる。交流の場合には電流は正負に変化するから磁界もそれによって向きや大きさが変化する。図は  $I > 0$  の場合の磁界  $H$  を示している。

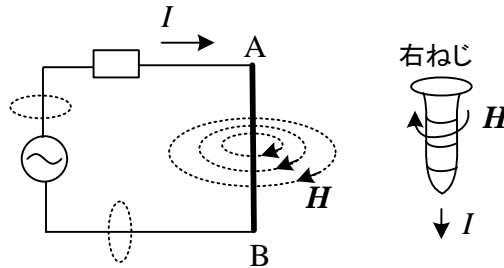


図 5-1 右ねじの法則

図 5-1 の回路が空気中にあるとしよう。導線 AB は十分長く、そのまわりの磁界を考える。電流と磁界に関しては、以下の式が考えられる。

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \textcircled{3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad \textcircled{7}$$

ここで、 $\mu$  は物質の透磁率である。なお、空気の透磁率は真空の透磁率  $\mu_0$  とほぼ同じであるが、一般的な式を導出する目的で  $\mu$  を用いて計算する。真空中では  $\mu$  を  $\mu_0$  に置き換えるだけでよい。

③式において

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{i}| \quad (5-1)$$

と仮定すると、次式となる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (5-2)$$

(5-1)の仮定に関しては、伝導電流  $\mathbf{i}$  に比べて変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  が作る磁界は小さいと考えることを意味する。例えば、導体中（導電率  $\kappa$ 、誘電率  $\varepsilon$ ）において、1次元で考えて

$$i = I_0 \sin \omega t$$

とおくと、変位電流は

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\omega \varepsilon}{\kappa} I_0 \cos \omega t$$

となる。よって、次式がなりたてば、導体中の変位電流は無視できることになる。

$$\frac{\omega \varepsilon}{\kappa} \ll 1 \tag{5-3}$$

第3章で述べたように銅では  $\varepsilon/\kappa = 1.54 \times 10^{-19}$  となるが、前提となるオームの法則  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  が成立するのに  $10^{-14}$ s よりも十分大きい時間が必要とされている<sup>(12)</sup>。よって、周波数で  $f = 1\text{MHz} = 10^6\text{Hz}$  程度以下であれば、良い近似になると考えられる。導線の外の空気中では、伝導電流は0で変位電流のみ存在することになる。変位電流を作るもとになるものは、導体表面の電荷の時間変化や第6章で述べる誘導電界が考えられる。第7章に示すように、比較的low周波で、導体とその周辺の電磁界を考える場合には、伝導電流が作る磁界がほぼ全てで、(5-2)が成り立つと考えられる。電磁気学では、この場合を**準定常電磁界**とよんでいるが、定常という言葉を用いて回路の定義で使うので本テキストでは**緩慢に変化する現象**<sup>(9)</sup>とよぶ。

②を閉曲面について積分すると、次式が得られる。

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \tag{2'}$$

これは、磁束の保存則を示している。(5-2)を開曲面について面積分し、ストークスの定理を用いると次式が得られる(③' 参照)。

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{5-4}$$

(5-4)は**アンペアの周回積分の法則**(Ampere's circuital law)と呼ばれる。

アンペアの周回積分の法則を用いて、図5-2に示すように丸い棒状の導線に電流  $I$  (交流でもよい)が流れるときの磁界  $\mathbf{H}$  を求めよう。電流が垂直に交わる平面  $S$  と半径  $r$  の円の積分路  $C$  をとると、対称性より磁界  $\mathbf{H}$  の大きさは  $C$  上で等しく、向きは接線方向と仮定する。(5-4)より

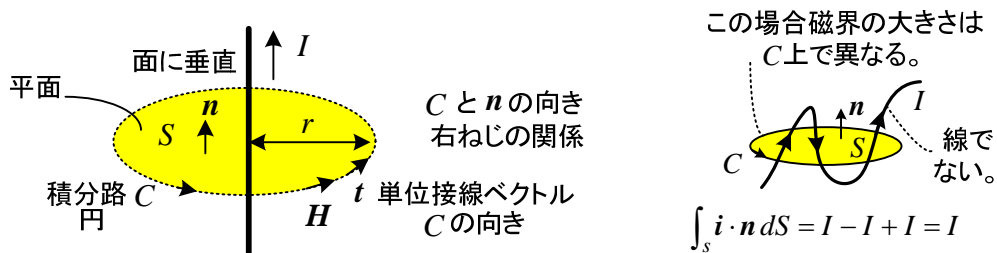


図5-2 棒状の導線に流れる電流による磁界と電流の鎖交

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_C H_\varphi \, dl = 2\pi r H_\varphi = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = I$$

電流は導線(断面あり)にしか流れないが、これを集めると  $I$  である。よって、

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \tag{5-5}$$

電流からの距離に反比例して磁界は弱くなる。磁束密度  $B_\phi$  は、⑦より次式となる。

$$B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (5-6)$$

なお(5-6)は、(付 20)より  $B_\phi$  が  $\phi$  の関数でないから②の  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  を満足する。従って、結果的に②、③を満足し、解は1つなので最初の仮定が正しいと言える。②' より図 5-3 に示すように、どんな閉曲面  $S$  をとっても、磁束密度  $\mathbf{B}$  の力線は  $S$  に入った分が出る。この場合は  $\mathbf{H}$  についても、 $\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$  が成り立つ。水が入っただけ出てくるイメージである。

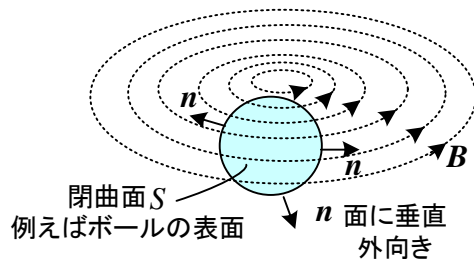


図 5-3 磁束線

(2-11)で磁束  $\phi$  を次式で定義した。

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5-7)$$

ここで、 $S$  は開曲面、 $\mathbf{n}$  は面に垂直な単位法線ベクトルである。 $\mathbf{n}$  の矢印を磁束  $\phi$  の測定の向き（正の向き）という。 $\phi$  は  $\mathbf{n}$  方向に通過する磁束を表す。 $S$  の周辺が同じであれば、どのような面でも  $\phi$  は等しい。これを証明しよう。図 5-4 に示すように閉曲面を周辺が等しい2つの開曲面  $S_1$  と  $S_2$  に分割する。②' より、次式が成り立つ。

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1' \, dS + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = 0$$

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_1'$  とすると、

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 \, dS = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \quad (5-8)$$

よって、(5-7)の磁束  $\phi$  は周辺(面の端)が同じなら面によらない。

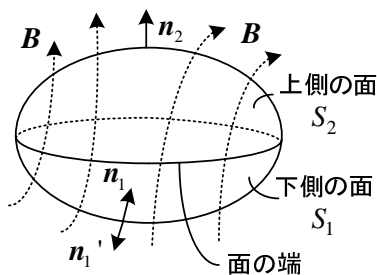


図 5-4 磁束

次に、アンペアの周回積分の法則をソレノイドに適用して磁界を求めてみよう。ソレノイドとは巻線を密に一様に巻いたコイルである。

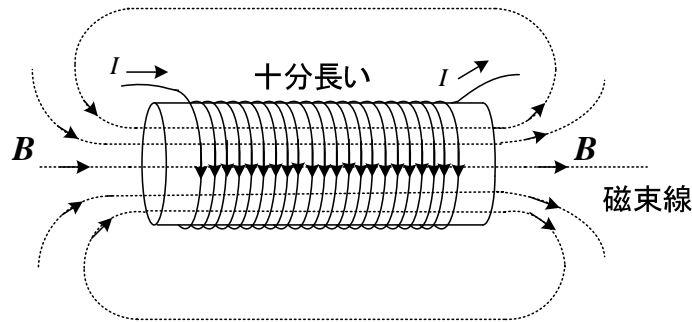


図 5-5 ソレノイドの磁束線

図 5-5 に示すように半径に比べて長さが十分長いソレノイドが空気中にある。このとき、磁束線は図の様になり、コイル内では軸方向のみで、コイルの外の磁束密度  $B$  はほぼ 0 とみなせる。磁束線は連続だから、コイルから出た本数が反対側から戻らないといけないが、帰りは空間全体に広がるためである。⑦が全空間で成立するので、磁界  $H$  の磁力線も同様と考えてよい。

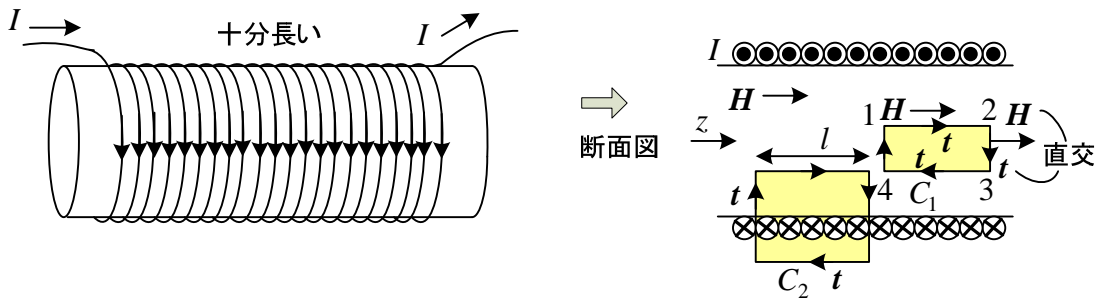


図 5-6 ソレノイドの積分路

流す電流を  $I[A]$  とし、コイルの 1m 当りの巻数を  $n$  とする。図 5-6 のように長方形の積分路を考え、アンペアの周回積分の法則を適用して磁界を求める。積分路  $C_1$  については、面を通る（鎖交する）電流はないので(図 5-2 参照)

$$\int_{C_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{12} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{23} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{34} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{41} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

23, 41 では、 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{t} = 0$  であり、 $H_{12}, H_{34}$  を  $\mathbf{H}$  の  $z$  成分とすると、34 では  $\mathbf{H}, \mathbf{t}$  は逆向きなので

$$H_{12}l - H_{34}l = 0 \quad \therefore H_{12} = H_{34} \quad (5-9)$$

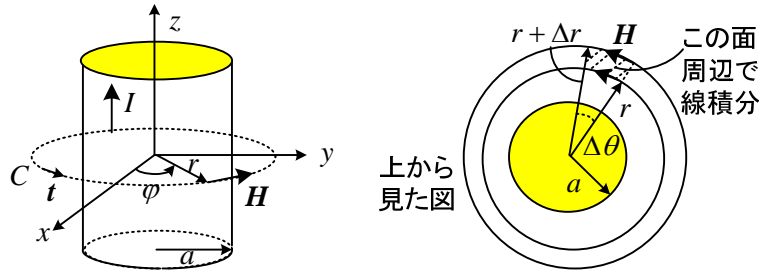
積分路  $C_2$  については、コイルの外では  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  として、鎖交する電流は  $nlI$  だから

$$\int_{C_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = H_z l = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = nlI \quad \therefore H_z = nI \quad (5-10)$$

(5-9)より、コイルの中では磁界はどこでも等しいことが言え、それが(5-10)となることがわかった。磁束密度は、次式となる。

$$B_z = \mu nI \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{B} = \mu nI \hat{z} \quad (5-11)$$

例題 1 半径  $a$  の円柱状の十分長い導体に一樣に電流が流れているとき、導体内と導体外の磁界を求めよ。(得られた結果は  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$  を満足しないといけない)



(解) 対称性より磁界  $\mathbf{H}$  の大きさは  $C$  上で等しく、向きは接線方向と仮定する。アンペアの周回積分の法則より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_C H_\varphi \, dl = 2\pi r H_\varphi = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} I r^2 / a^2 & : r \leq a \\ I & : r > a \end{cases}$$

よって、

$$H_\varphi = \frac{rI}{2\pi a^2} \quad r \leq a, \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad r > a$$

円柱座標系の(付 21)より、独立変数が  $r, \varphi, z$  で、 $H_r = H_z = 0$ 、 $H_\varphi$  が  $r$  だけの関数だから

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{i} & : r \leq a \\ \mathbf{0} & : r > a \end{cases} \end{aligned}$$

よって  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$  を満足し、仮定は正しいと考えられる。うずが巻いたような磁力線ができるが、導線の外では  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$  であることに注意しよう。電流が流れていないから当然なのであるが、右図の斜線部分  $S$  の周辺  $C$  で磁界  $\mathbf{H}$  を周回積分すると  $H_r = 0$  だから Stokes の定理より

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \frac{I}{2\pi(r+\Delta r)} (r+\Delta r) \Delta\theta - \frac{I}{2\pi r} r \Delta\theta = 0$$

となり、確かに斜線部分にうずはないのである。  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$  の領域でも  $\mathbf{H}$  は  $\mathbf{0}$  でないことにも注意。

## ○ ビオ - サバルの法則

アンペアの周回積分の法則と並んで、②, (5-2) から得られる **ビオ-サバルの法則** (Biot-Savart 別人) がある。証明はベクトルポテンシャルの節で述べる。この法則によると、電流  $I$  (交流でもよい) の流れる微小長さ  $dl$  の部分が  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$  離れた  $\mathbf{P}$  点に作る磁界  $d\mathbf{H}$  は、次式で与えられる。

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (5-12)$$

$t$  は電流の向きを向いた単位接線ベクトルである。 $dH$  の向きは  $t$  と  $r$  の作る平面に垂直になり、大きさは次式で計算できる。 $|t \times r| = |t||r| \sin \theta = r \sin \theta$  だから

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (5-13)$$

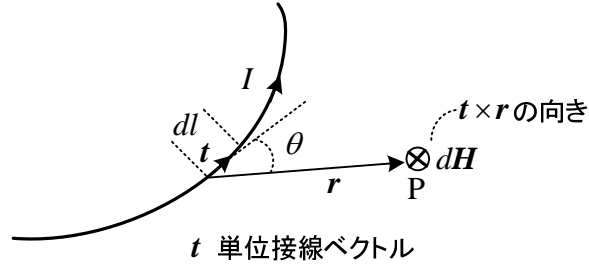


図 5-7 ビオ - サバルの法則

図の様に、無限に長い直線導体に電流が流れているとき、導体から  $a$  だけ離れた  $P$  点の磁界の大きさをビオ - サバルの法則で求めてみよう。 $l$  (常に正) はある点からの距離を表すので、無限の場合には扱いにくい。ここでは、正負に変化する  $x$  を用いる。

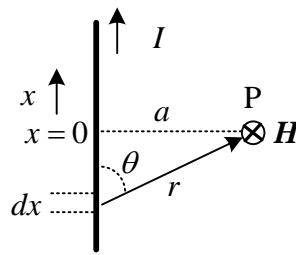


図 5-8 無限に長い直線電流が作る磁界

$P$  点の磁界の向きが、各  $dx$  について同方向なので、(5-13)より、

$$H = \int dH = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dx$$

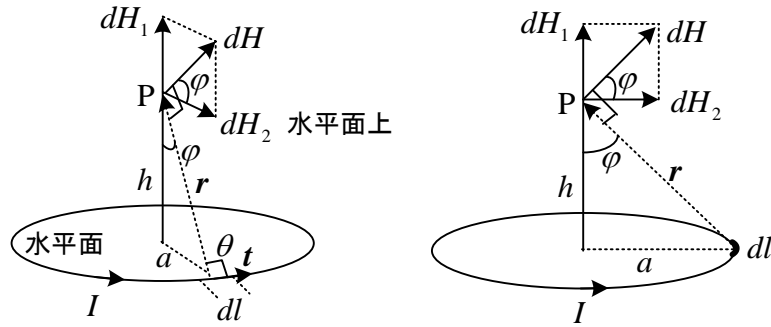
図より、 $x = -r \cos \theta$ ,  $r \sin \theta = a \quad \therefore r = \frac{a}{\sin \theta}$ ,  $x = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} a$

$$\therefore \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{a^2}, \quad dx = -\frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} a d\theta = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\text{よって } H = \frac{I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{I}{4\pi a} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{I}{2\pi a}$$

(5-5)と一致している。

**例題 2** 図の様に半径  $a$  の円形コイルに電流  $I$  が流れている。円の中心軸上の磁界を求めよ。



(解) 導体上の  $dl$  の部分が P 点に作る磁界  $dH$  はビオ - サバルの法則より,  $\theta = \pi/2$  だから

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{I}{4\pi r^2} dl$$

$dH$  の向きは  $\mathbf{t} \times \mathbf{r}$  だから,  $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{r}$  の作る平面に垂直であるから, 水平面と  $\varphi$  の角度をなす。よって,  $dH$  を軸方向と水平方向に分解すると次式が得られる。

$$dH_1 = dH \sin \varphi = \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} dl \quad (\sin \varphi = \frac{a}{r})$$

$$dH_2 = dH \cos \varphi = \frac{I}{4\pi} \frac{h}{r^3} dl \quad (\cos \varphi = \frac{h}{r})$$

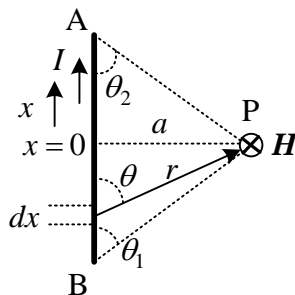
$dH_1$  の向きは  $dl$  の位置にかかわらず常に一定であるが,  $dH_2$  は向きが変化し, コイルの全円周の分を加えると 0 となる。したがって, コイルの中心軸上では, 磁界は鉛直方向を向き, その大きさは次式で与えられる。  $r, a$  は  $dl$  とは無関係な定数で, 円周上で集める線積分は単に円周をかければよい。

$$H = \int_0^{2\pi a} \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} dl = 2\pi a \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} = \frac{I a^2}{2 r^3}$$

円の中心では,  $r = a$  だから

$$H = \frac{I}{2a} \tag{5-14}$$

**例題 3** 図の様に有限の長さの導体 A, B に電流が流れているとしたとき, 磁界の大きさを  $\theta_1, \theta_2, a$  で表せ。

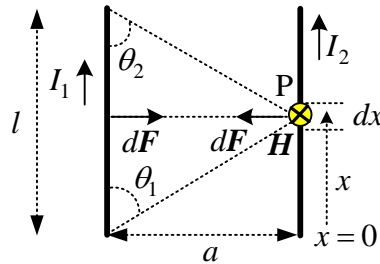


(解) 図 5-8 の場合と同様に考えて

$$H = \frac{I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{I}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$



例題 4 図の様に  $a$  離れた長さ  $l$  の 2 本の細い平行導線に電流  $I_1, I_2$  が流れているとしたとき、導線に働く力の大きさを求めよ。空気の透磁率は  $\mu$  とする。



(解) 例題 3 より,  $I_1$  が P 点に作る磁界の大きさは

$$H = \frac{I_1}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

である。この磁界により図の  $dx$  部分に働く力の大きさは, (2-21) で  $l = dx$  とおいて

$$dF = B I_2 dx = \mu H I_2 dx = \mu \frac{I_1 I_2}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dx$$

従って, 導線全体ではこれを集めて

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_0^l \mu \frac{I_1 I_2}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dx \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi a} \int_0^l \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + a^2}} \right) dx \end{aligned}$$

ここで,  $\sqrt{x^2 + a^2} = z$  とおくと,  $x^2 + a^2 = z^2$  より,  $x dx = z dz$  だから

$$\int_0^l \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int_a^{\sqrt{l^2 + a^2}} \frac{z}{z} dz = \sqrt{l^2 + a^2} - a$$

となる。2 項目の積分も  $l-x = x'$  とおくと, 1 項目と等しいことが判る。よって,

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a} (\sqrt{l^2 + a^2} - a)$$

フレミングの左手の法則より, 図の向きの力となる。両電流が同方向なら引力, 逆方向なら斥力となる。

## ○ 磁性体

コイル, 変圧器, 電磁石, 電動機などは大きい透磁率  $\mu$  の強磁性体 (主に鉄) を利用している。強磁性体を使うと, 流す電流が同じでも**磁化**により高い磁束密度が得られる。鉄でできている釘にエナメル線を巻いて, 電磁石を作った経験があるだろう。銅棒や木材では, 電磁石はできない。そして釘の場合, 一度電流を流すと, 電流を切っても磁石になっていることも体験しただろう。一体鉄の中で何が起きているのだろうか? 簡単に説明しよう。鉄の中の電子は何もしない状態でも回転(スピン)して, 小さな電流ループを作り, その結果磁界ができているが, 向きがバラバラで全体として磁石にはならない。しかし, 電流を流して外部から磁界をかけると, 電流ループ

プが作る磁界の向きがそろってくるので、外から加えた磁界よりはるかに大きい磁界を鉄が生み出すのである。これが**磁化**である。小さな電流ループは小さな電磁石と考えてもよい（後述の「ループ電流が作る磁界」参照）。

図 5-9 のように鉄心にコイルを巻いて電流を流す。鉄心中の磁界  $H$ （電流  $I$  に比例）と磁束密度  $B$ （鉄心材料に依存）の関係は図 5-10(a) のようになる。磁化されていない強磁性体を磁化すると、 $OP_1$  のように変化し、 $H$  を増やしても  $B$  が増えない飽和領域に達する。これは鉄心内の電流ループが向きを変えてしまった状態と考えられ、**飽和特性**と呼ばれる。 $H$  を十分大きくしてから減少させ、反対方向に電流を流すと  $P_1P_2P_3P_4$  と変化していく。そして、 $H$  を十分減少させ、そのあと正の向きに電流を流すと  $P_4P_5P_6P_1$  と変化していく。これを**ヒステリシス特性**という。ヒステリシスが無視できる場合には、図(b)の特性となり、飽和領域を除いて  $B$  と  $H$  はほぼ比例関係にある。(a)のヒステリシス特性を利用したものが永久磁石、(b)を利用したものが発電機、電動機、変圧器、電磁石の鉄心である。図 5-10 の特性で、 $B$  は鉄心に別の測定用の巻線を巻いて、その電圧を積分して測定する（電磁誘導の法則の利用）。このとき電源は交流とする。

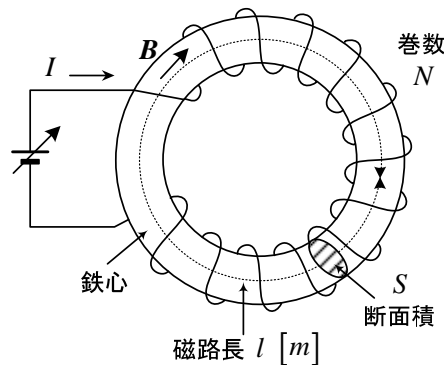
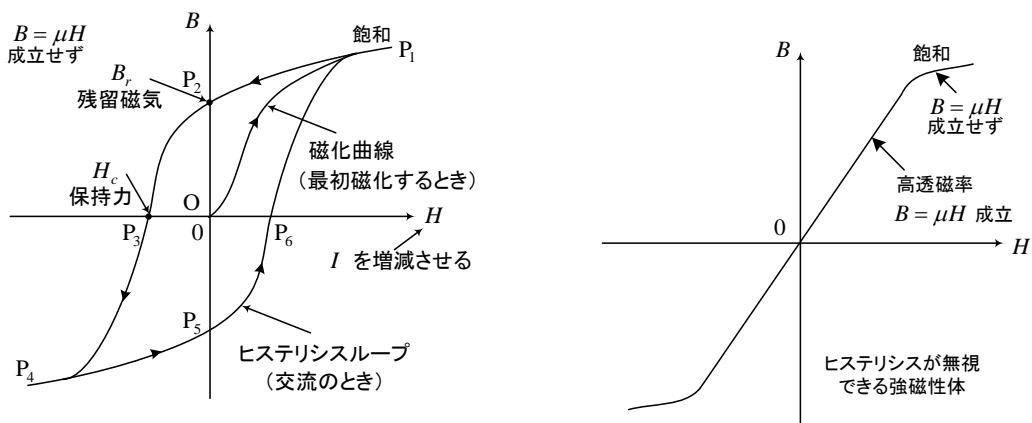


図 5-9 鉄心に巻いたコイル



(a) ヒステリシスがある場合

(b) ヒステリシスが無視できる場合

図 5-10 強磁性体の  $BH$  特性

ヒステリシスループを 1 週するとき、このループの面積だけのエネルギーが失われる。これを**ヒステリシス損**という。

物質中の磁束密度  $B$  は磁界  $H$  と以下の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \quad [\text{T}] \text{または} [\text{Wb/m}^2] \quad (5-15)$$

ここで、 $\mathbf{P}_m$  は**磁気分極**と呼ばれ、**磁化**(magnetization)とよばれる  $\mathbf{M}$  [A/m] と比例関係にある。

$$\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M} \quad (5-16)$$

教科書によっては  $\mu_0 \mathbf{M}$  を  $\mathbf{M}$  と書いて、磁気分極のことを磁化ということもあるので注意しよう。一般に磁化は磁界  $\mathbf{H}$  [A/m] に比例し

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (5-17)$$

と書ける。 $\chi$  は**磁化率**と呼ばれる。(5-17)を(5-15)に代入して、 $\mu = \mu_0(1 + \chi)$  とおくと

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \textcircled{7}$$

と書ける。 $\mu$  [H/m] は**透磁率**(permeability)とよばれている。真空中の透磁率  $\mu_0$  [H/m] との比

$$\mu_s \equiv \mu / \mu_0 \quad (5-18)$$

は**比透磁率**とよばれている。鉄では  $\mu_s$  が大きいもので 1000 以上になることもある。⑦の関係さえ使えば、磁化のことは知らなくても、多くの問題を解くことができるであろう。

誘電体の分極と同様に、**磁荷密度**  $\rho_m$  [Wb/m<sup>3</sup>] を次式で定義する<sup>(20)</sup>。これを**磁荷モデル**(magnetic charge model) という。

$$\text{div} \mathbf{P}_m = -\rho_m \quad (5-19)$$

(5-15)の div をとると 0 だから

$$\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = -\text{div}(\mu_0 \mathbf{M}) = \rho_m \quad (5-20)$$

となる。磁荷は実在しないが、磁気現象を説明するモデルとして有用である。磁石には N, S 極 (磁極) があるが、磁石を小さく切ってもやはり磁石で N 極や S 極を取り出すことはできない。

一般に磁界を以下のように表すことができる。

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_m \quad (5-21)$$

ここで、

$$\text{rot} \mathbf{H}_i = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{H}_i = 0 \quad (5-22)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_m = \mathbf{0}, \quad \text{div} \mathbf{H}_m = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (5-23)$$

このようにおいても、 $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ,  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  を満足する。

(5-23)より磁荷密度  $\rho_m$  による磁界  $\mathbf{H}_m$  は電荷と電界に対応しているので判り易い。そして、 $\mathbf{H}_i$  は媒質が異なっても連続となるので(5-22)も考え易くなる。磁荷密度  $\rho_m$  [Wb/m<sup>3</sup>] は、(4-38)の分極電荷密度  $\rho'$  に対応する。面分極電荷密度  $\sigma'$  が面磁荷密度  $\sigma_m$  [Wb/m<sup>2</sup>] に対応する。

別の考え方として**電流モデル**(current model)がある。(5-15)の rot をとると

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \text{rot} \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{M} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}_m \quad (5-24)$$

$\text{rot} \mathbf{H}$  は、③にあるように、伝導電流と変位電流の和である。これに対し

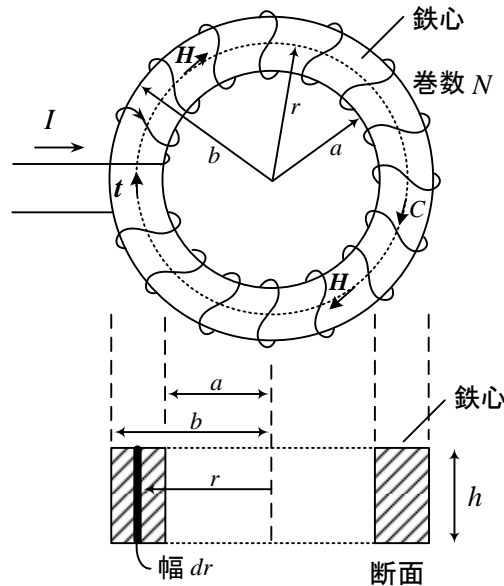
$$\text{rot} \mathbf{M} = \mathbf{i}_m \quad (5-25)$$

は**磁化電流**(magnetization current)と呼ばれている。

$H$  の力線である磁力線を考えるときは磁荷密度  $\rho_m$  に基づく磁極モデルが判り易く、 $B$  の力線である磁束線を考えるときは電流モデルが判り易いであろう。

**例題 5** 図のような断面長方形のドーナツ型の鉄心(透磁率  $\mu$ )に導線を  $N$  回巻いたコイルがある。

- (1) コイルに電流  $I$  を流したとき、半径  $r$  の点での磁束密度の大きさ  $B$  を求めよ。
- (2) 鉄心を通る磁束  $\phi$  を求めよ。



(解) (1) 鉄心内に半径  $r$  の円  $C$  を考える。対称性より、磁界  $H$  は  $C$  の接線方向で、 $C$  上のどの点でも大きさが等しいと考えられる。周回積分の法則より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_0^{2\pi r} H \, dl$$

$$= 2\pi r H = NI \quad (C \text{ に鎖交する電流の和 : 右ねじの関係なら +)}$$

$$\therefore H = \frac{NI}{2\pi r} \quad [\text{A/m}]$$

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{2\pi r} \quad [\text{T}]$$

(2) 図の微小幅部分  $dr$  (面積  $h \, dr$ ) を通過する磁束を  $d\phi$  とすると、

$$d\phi = B h dr$$

$$\therefore \phi = \int d\phi = \int_a^b \frac{\mu NI}{2\pi r} h \, dr = \frac{\mu NI h}{2\pi} [\log r]_a^b = \frac{\mu N I h}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{Wb}]$$

### 起磁力と磁気抵抗

磁束を  $\phi = F / R_m$  より求めることがある。 $F = NI$  は起磁力と呼ばれ、磁束を作るものとなる。(2)の結果より、磁気抵抗  $R_m$  は、次式のように求まる。

$$R_m = 2\pi / (\mu h \log \frac{b}{a}) \quad (5-26)$$

磁気抵抗を次式で近似することが、良く行われる。

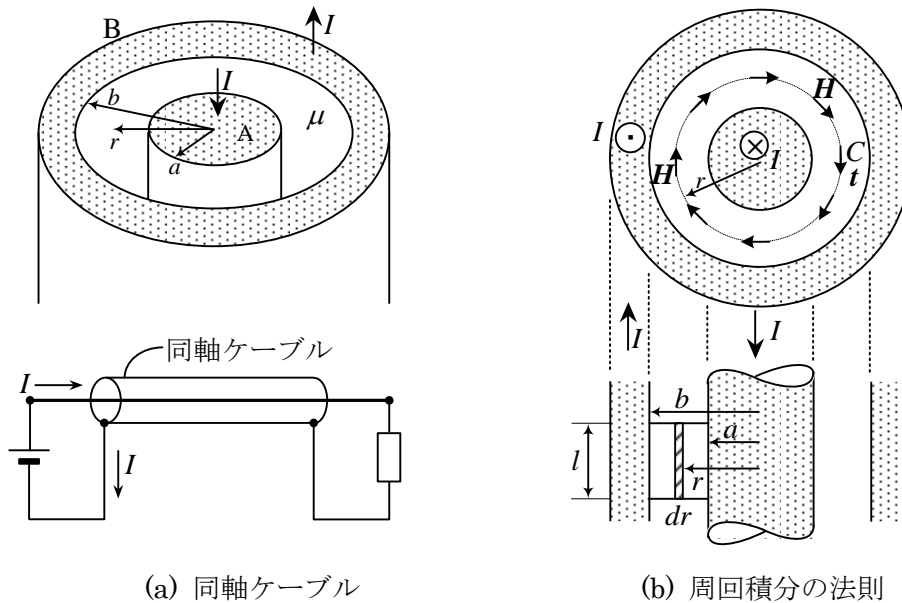
$l$  : 磁路長(磁束が通る平均の長さ)  $l = \pi(a+b)$  ,  $S$  : 鉄心の断面積  $S = (b-a)h$

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{\pi(a+b)}{\mu h(b-a)} \quad (5-27)$$

(5-26)と(5-27) は、 $b-a \ll a$  のときほぼ等しい。

**例題 6** 図に示すように半径  $a$  の円柱状導体 **A** と内半径  $b$  の円筒状導体 **B** からなる十分長い同軸ケーブルがある。A,B間には絶縁体があり、透磁率を  $\mu$  とする。

いま、**A** に電流  $I$  を流し、**B** によって戻る往復回路ができているとする。 $a < r < b$  のとき、半径  $r$  の点の磁束密度の大きさ  $B$  を求めよ。また、ケーブルの長さ  $l$ 、半径  $r = a$  から  $r = b$  で囲まれた長方形の断面を通る磁束  $\phi$  を求めよ。



(解) 対称性より、半径  $r$  の同心円  $C$  の接線方向に同じ大きさの磁界  $H$  ができると考えられる。  
 $C$  で囲まれた全電流は  $I$  だから、アンペアの周回積分の法則より、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = 2\pi r H = I$$

よって、磁界の大きさ  $H$  は、 $H = \frac{I}{2\pi r}$

磁束密度の大きさ  $B$  は

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

図(b)の長方形(ケーブル長  $l$ 、絶縁物半径  $(b-a)$ ) について  $B$  を集めると磁束  $\phi$  が求まる。 $dr$  部分の磁束は  $Bldr$  であり、これを  $a$  から  $b$  まで積分して、

$$\phi = \int_a^b Bldr = \int_a^b \frac{\mu I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu I l}{2\pi} [\log r]_a^b = \frac{\mu I l}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (5-28)$$

導体 **B** の外側には磁界はできない。**B** の外側に同心円の積分路  $C$  を考えると、仮に磁界が存在す

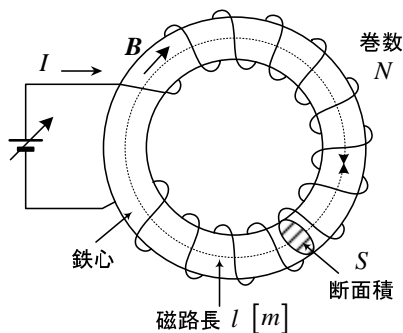
るとしても軸対称と考えられ、その中の電流の和だから0となる。よって、磁界は0となる。一般に、同軸ケーブルの自己インダクタンス（1m当り）を $L$ としては、 $\phi$ を $II$ で割って、

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (5-29)$$

が用いられている（付録参照）。AやB自体にもインダクタンスがあるが一般に小さい。

## ○ 磁気回路

磁界や磁束密度はベクトルであり、場所によって向きや大きさが違うが、鉄心中の磁界や磁束密度が一様と仮定すると例題5より以下の関係が成り立つ。



$$\text{起磁力} \quad F = NI \quad [\text{A}] \quad (5-30)$$

$$\text{磁気抵抗} \quad R_m = \frac{l}{\mu S} \quad [\text{A/Wb}] \quad (5-31)$$

$$\text{磁束} \quad \phi = \frac{F}{R_m} = \frac{\mu SNI}{l} \quad [\text{Wb}] \quad (5-32)$$

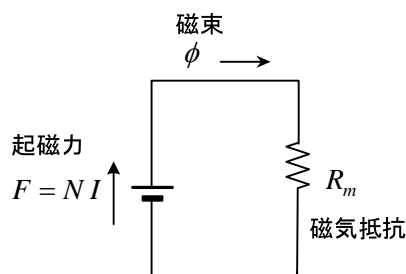
$$\text{磁束密度} \quad B = \frac{\phi}{S} = \frac{\mu NI}{l} \quad [\text{T}] \quad (5-33)$$

$$\text{磁界} \quad H = \frac{NI}{l} \quad [\text{A/m}] \quad (H = \frac{B}{\mu}) \quad (5-34)$$

$$\text{磁気分極} \quad P_m = B - \mu_0 H = (\mu - \mu_0)H \quad [\text{T}] \quad (5-35)$$

$$\text{磁化} \quad M = \frac{P_m}{\mu_0} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)H \quad [\text{A/m}] \quad (5-36)$$

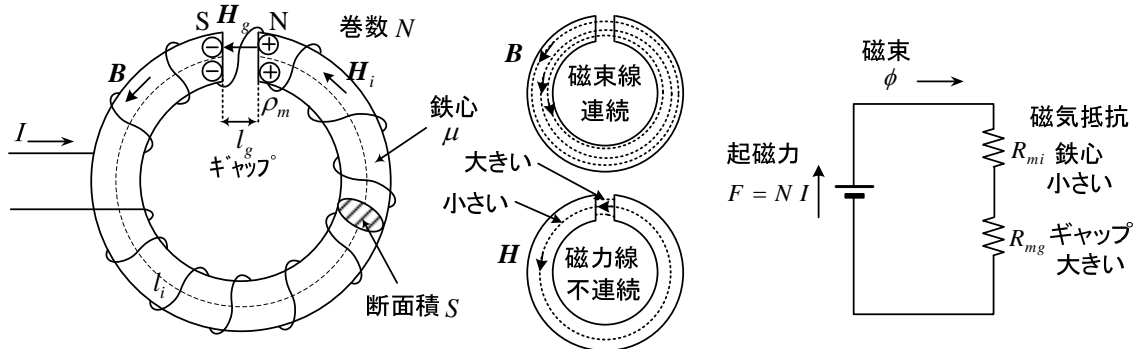
以上のことから、電気回路に対応させて磁束を計算する**磁気回路**(magnetic circuit)が考えられた。電気回路の各量は磁気回路の各量と表のように対応する。



電気回路	磁気回路
起電力 $V_e$	起磁力 $NI$
電気抵抗 $R$	磁気抵抗 $R_m$
電流 $I$	磁束 $\phi$
電流密度 $i$	磁束密度 $B$
電界 $E$	磁界 $H$
導電率 $\kappa$	透磁率 $\mu$
電圧 $RI (= EI)$	磁位差 $R_m \phi (= Hl)$

図 5-11 磁気回路

例題7 図に示すようにソレノイドの作る磁束密度  $B$ ，磁束  $\phi$ ，磁界  $H$  を求めよ。ただし，鉄心やギャップ中で，磁束密度  $B$ ，磁界  $H$  は一様と仮定する。また鉄心やギャップ部分での漏れ磁束は無視できるものとする。



(解) (5-4)のアンペアの周回積分の法則より次式が得られる。 $l_i$ は磁路長とよばれ，磁束が通る有効長さである。また  $l_g$ はギャップ長である。

$$l_i H_i + l_g H_g = NI \quad (1)$$

磁束密度  $B$  は連続で，鉄心中，ギャップ中の透磁率をそれぞれ  $\mu, \mu_0$  とすると(1)より

$$l_i \frac{B}{\mu} + l_g \frac{B}{\mu_0} = NI \quad \therefore B = \frac{NI}{(l_i / \mu) + (l_g / \mu_0)} \quad (2)$$

従って，磁束  $\phi$  は次式より計算できる。

$$\phi = SB = \frac{NI}{R_{mi} + R_{mg}} \quad \text{ただし,} \quad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu S}, \quad R_{mg} = \frac{l_g}{\mu_0 S} \quad (3)$$

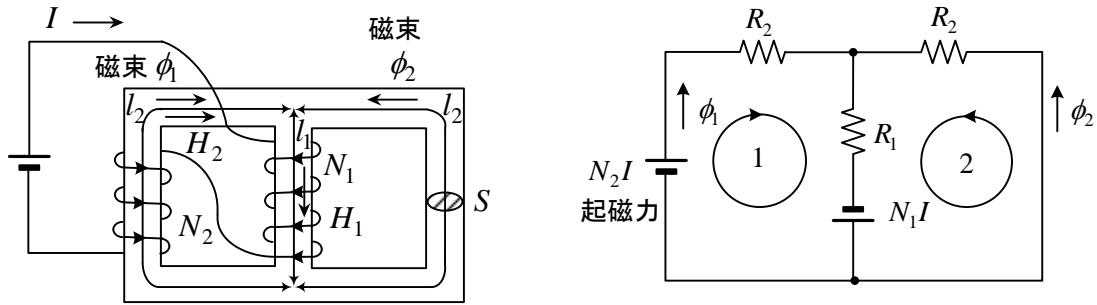
$R_{mi}$ は鉄心の部分の磁気抵抗， $R_{mg}$ はギャップの磁気抵抗を表す。この結果，図に示す磁気回路で磁束を求めて良いことがわかる。今後は，(3)で直接磁束を求めてよい。

磁界は次のようになる。

$$\text{鉄心中:} \quad H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{NI}{l_i + \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)l_g} \quad \text{ギャップ中:} \quad H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{NI}{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)l_i + l_g}$$

鉄心中では  $\mu / \mu_0 = 1000$  ぐらいなので， $H_i$  は  $H_g$  に比べて非常に小さくなる。これは鉄心の磁化によって，鉄心の両端に(5-19)の磁荷密度  $\rho_m$  が生じて，鉄心中では磁界を打ち消すためと考えると分かりやすい。静電誘導の場合には，導体の両端に電荷が生じて電界を完全に打ち消すが，磁性体の場合にはそこまでいかない。電流によって決めるのは，起磁力であり，個々の  $H$  ではない。それに対し，磁束密度  $B$  は法線ベクトル成分が連続であり，漏れがなければどこも同じである。ただし，同じ起磁力ならギャップ長が短い方が磁気抵抗が小さくなり，全体の磁束密度は大きい。回路の電圧に相当する  $R_{mi}\phi$  は  $H_i l_i$  になる。電界  $E$  に長さを掛けて電圧だから磁界  $H$  は電界  $E$  に対応するとみることができる。また， $B = \mu H$  が  $i = \kappa E$  (オームの法則) に対応する。鉄心中は  $\mu$  が大きく， $H$  はほぼ 0 である。導線の中では  $\kappa$  が大きく  $E$  は 0 である。このように， $E$  と  $H$  を対応させると判り易いことが多い。

例題 8 図のように断面積  $S$ 、透磁率  $\mu$  の一様な三脚鉄心がある。巻数  $N_1, N_2$  のコイルに電流  $I$  が流れているとき、磁路長  $l_1$  を通る磁束はいくらか。



(解) 磁気回路で表すと右図のように書ける。鉄心外に漏れる磁束がない場合、磁束についてはキルヒホッフの第 1 法則が成立つ。また周回積分の法則より任意の開路で、キルヒホッフの第 2 法則が成立つ。よって、右図の磁気回路に適用して

$$N_1 I + N_2 I = R_2 \phi_1 + R_1 (\phi_1 + \phi_2) \quad (1)$$

$$N_1 I = R_2 \phi_2 + R_1 (\phi_1 + \phi_2) \quad (2)$$

ここで、磁気抵抗は次式で与えられる。  $R_1 = \frac{l_1}{\mu S}$  ,  $R_2 = \frac{l_2}{\mu S}$

(1), (2)より,

$$\therefore \phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} N_1 + N_2 & R_1 \\ N_1 & R_1 + R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_2 \end{vmatrix}} I = \frac{(R_1 + R_2) N_2 + R_2 N_1}{2R_1 R_2 + R_2^2} I$$

同様に

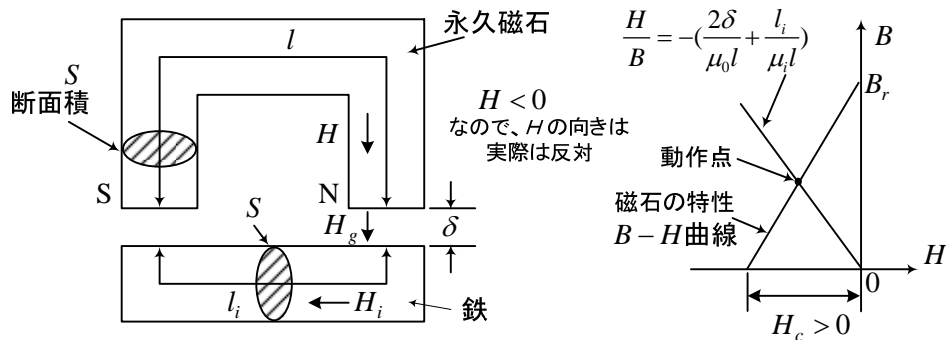
$$\phi_2 = \frac{R_2 N_1 - R_1 N_2}{2R_1 R_2 + R_2^2} I$$

従って、 $l_1$  を通る磁束  $\phi$  は  $\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{2N_1 + N_2}{2R_1 + R_2} I$

$$(注) (1)は  $N_1 I + N_2 I = H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{B_1 l_1}{\mu} + \frac{B_2 l_2}{\mu} = \frac{(\phi_1 + \phi_2) l_1}{\mu S} + \frac{\phi_2 l_2}{\mu S}$  に対応している。$$

例題 9 図のようなヒステリシス特性 (第 2 象限) を持った永久磁石がある。永久磁石と鉄の間に  $\delta$  の隙間があるとき磁束密度を求めよ。ただし、鉄の透磁率  $\mu_i$  は一定とする。また、ギャップにおける磁束の広がりを考えないものとする。





(解) アンペアの周回積分の法則で、電流はどこにも流れていないので

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = 0$$

$$\therefore 0 = Hl + 2H_g \delta + H_i l_i \quad (1)$$

ここで、 $H, H_g, H_i$  は  $\mathbf{H}$  の  $\mathbf{t}$  方向成分を表す。

外に漏れる磁束がないとすると、磁束  $\phi$  は一定だから、断面積で割った磁束密度  $B$  も一定となる。透磁率は一定だから、

$$B = \mu_0 H_g \quad : \text{ギャップ} \quad (2)$$

$$B = \mu_i H_i \quad : \text{鉄} \quad (3)$$

永久磁石については、ヒステリシス特性があり、その第 2 象限 ( $H < 0$ ) が使われることになる。図は簡単のため直線としており、次式で表される。

$$B = \frac{B_r}{H_c} H + B_r \quad (4)$$

(2), (3), (4) の  $H_g, H_i, H$  を (1) に代入して

$$B = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r}{H_c l} \left( \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_i}{\mu_i} \right)}$$

\* 永久磁石の  $BH$  特性が曲線で与えられていたら、図的に求める。このとき、(1), (2), (3) より

$$\frac{H}{B} = - \left( \frac{2\delta}{\mu_0 l} + \frac{l_i}{\mu_i l} \right)$$

となる。この直線とヒステリシスループ (磁石の特性) の交点 (動作点) を求める。すなわち、磁石が持つ特性と磁石が使われている磁気回路の両方を満たす点で  $B$  や  $H$  の値が決る。

永久磁石に関していくつか注意点を述べておく。例えば、永久磁石をモータに利用する場合、モータの巻線に流れる電流が磁界を作るので、永久磁石の動作点が変わる。例えば図 5-12 の A 点で最初動作していたものが、 $H$  が増えた場合に元の  $BH$  曲線の上を通り Q 点に戻ることはなく、

$BH$  曲線の内側に入るマイナーループ上を動く。永久磁石の場合、ループは十分に細いため直線で近似し、**リコイル線**と呼ばれる。またこのリコイル線に対応した比透磁率はリコイル比透磁率と呼ばれる。通常は  $\mu_r$  で表し、 $BH$  曲線上の動作点 A から  $H=0$  の点 B までのマイナーループを直線で近似して  $\mu_r = \Delta B / (\mu_0 \Delta H)$  とする。理想的な場合、 $\mu_r = 1$  である。最も強い磁石であるネオジウム磁石の場合  $\mu_r = 1.05$  程度で、空気中と同じように考えて良いことを意味する。つまり、電流が作った起磁力に対して永久磁石は空気みたいに作用して、永久磁石は磁束密度  $B$  をほぼ一定に保つということである。 $\mu_r = 1$  でも傾きは 0 ではないから  $B$  が完全に一定と言う訳ではない。

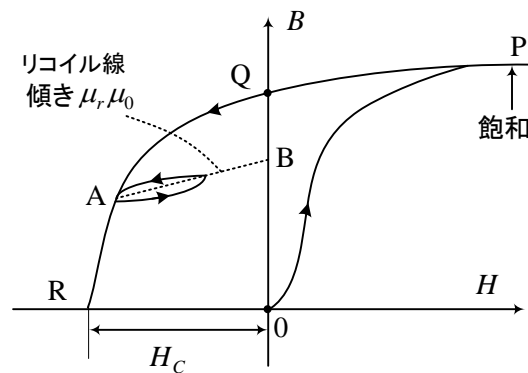


図 5-12 リコイル線

次に、図 5-13 に示すように永久磁石の中では、磁束密度  $B$  と磁界  $H$  の向きは逆である。また、 $B$  の磁束線は連続であるが、 $H$  の磁力線は連続ではない。磁石の外は  $B = \mu_0 H$  なので両者の力線は同じようになる（大きさは異なる）。当然、永久磁石の中では  $B = \mu H$  は成立せず、例題 9 にあるように、ヒステリシスの第 2 象限を考えないといけない。2 象限では、 $B > 0, H < 0$  である。よって図(a)のように  $B$  と  $H$  が逆向きとなる。磁荷モデルで考えて、磁極 NS に正負の磁荷が生じていて、それが作る磁界が  $H$  となると考えると直感的に分りやすい。(5-20)を参照せよ。また、磁束線は側面にうずを生じている。(5-24)を参照せよ。

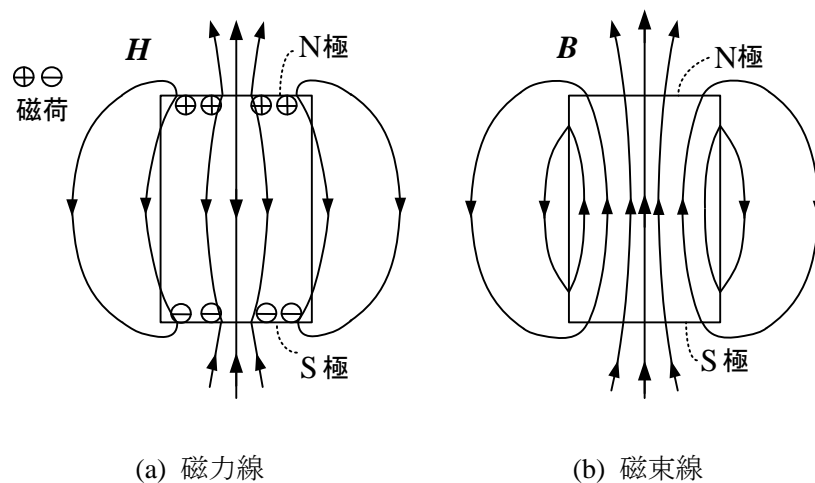


図 5-13 永久磁石

## ○ エネルギーと力

磁界に関する力を求める方法として、**仮想変位の原理**と類似の方法で、コイルに電源が接続されているかどうかに関係なく利用できるエネルギーの原理による方法を説明する(7)(16)。

コイルを含んだ電気機械で時間  $\Delta t$  の間に面  $S$  が  $x$  の方向に  $\Delta x$  変化したとすると、この間に電源から供給されるエネルギーを  $\Delta W_e$ 、この間に変化した電磁エネルギーを  $\Delta W_m$  (変化の後の電磁エネルギー - 変化前の電磁エネルギー)、この間になされた機械的な仕事を  $\Delta W_x$  とするとき、エネルギーは保存されるから

$$\Delta W_e = \Delta W_m + \Delta W_x \quad (5-37)$$

が成立つ。

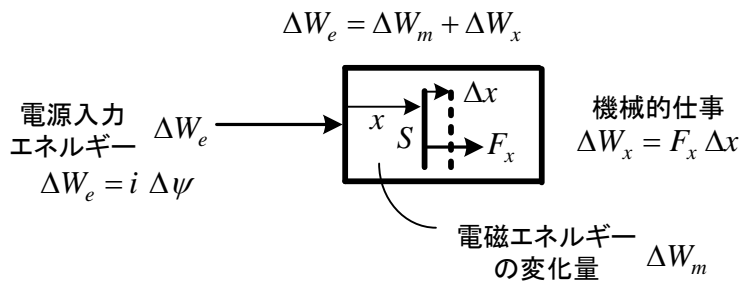


図 5-14 エネルギー保存

鎖交磁束  $\psi$  については(6-11), (6-12)で詳しく述べるが,  $\Delta W_e, \Delta W_x$  は次式で表される。

$$\Delta W_e = i v dt = i \frac{d\psi}{dt} dt = i \Delta \psi \quad (5-38)$$

$$\Delta W_x = F_x \Delta x \quad (5-39)$$

(5-38), (5-39)を(5-37)に代入して次式が得られる。

$$\Delta W_m = -F_x \Delta x + i \Delta \psi \quad (5-40)$$

図 5-15 のように線形の磁気回路を仮定して

$$\psi = L(x) i \quad (5-41)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} L(x) i^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L(x)} \quad (5-42)$$

で与えられる場合を考える。

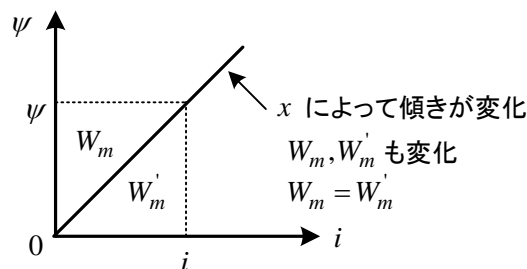


図 5-15 線形磁気回路

(1)  $x$  と  $\psi$  を独立変数と考えた場合 :

$W_m = W_m(x, \psi)$  として, テイラーの定理より

$$\Delta W_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W_m}{\partial \psi} \Delta \psi \quad (5-43)$$

である。ここで,  $W_m = \int_0^\psi i d\psi$  より

$$\frac{\partial W_m}{\partial \psi} = i \quad (5-44)$$

となる。 $W_m$  は  $x$  の関数でもあるから偏微分でないといけない。

$$\left( \text{一般に } g(x, t) = \int_a^t f(x, y) dy \text{ のとき, } \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = f(x, t) \right)$$

(5-44)を(5-43)に代入し, (5-40)と比べて, 次式が得られる。

$$F_x = -\frac{\partial W_m(x, \psi)}{\partial x} \quad (5-45)$$

(2)  $x$  と  $i$  を独立変数と考えた場合 :

図 5-15 より次式が成立つ。

$$W_m + W_m' = i\psi \quad (5-46)$$

よって, 微小変化を考えると(5-40)より

$$\Delta W_m + \Delta W_m' = i \Delta \psi + \psi \Delta i \quad \therefore \Delta W_m - i \Delta \psi = \psi \Delta i - \Delta W_m' = -F_x \Delta x$$

従って,

$$\Delta W_m' = F_x \Delta x + \psi \Delta i \quad (5-47)$$

一方, テイラーの定理より  $x$  と  $i$  を独立変数と考えた場合

$$\Delta W_m' = \frac{\partial W_m'}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W_m'}{\partial i} \Delta i \quad (5-48)$$

ここで,  $W_m' = \int_0^i \psi di$  より

$$\frac{\partial W_m'}{\partial i} = \psi \quad (5-49)$$

だから, (5-47), (5-48)を比べて

$$F_x = \frac{\partial W_m'(x, i)}{\partial x} \quad (5-50)$$

が得られる。線形磁気回路では, 図 5-15 より

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} \psi i$$

だから, (5-50)より

$$F_x = \frac{\partial W_m(x, i)}{\partial x} \quad (5-51)$$

が得られる。なお、(5-45)、(5-50)は非線形磁気回路（飽和がある場合）でも成立つ。

電動機のように回転する場合には、力をトルク  $T$  [Nm] に、位置を角度  $\theta$  [rad] 変えることで同様に成立する。すなわち、線形磁気回路の場合

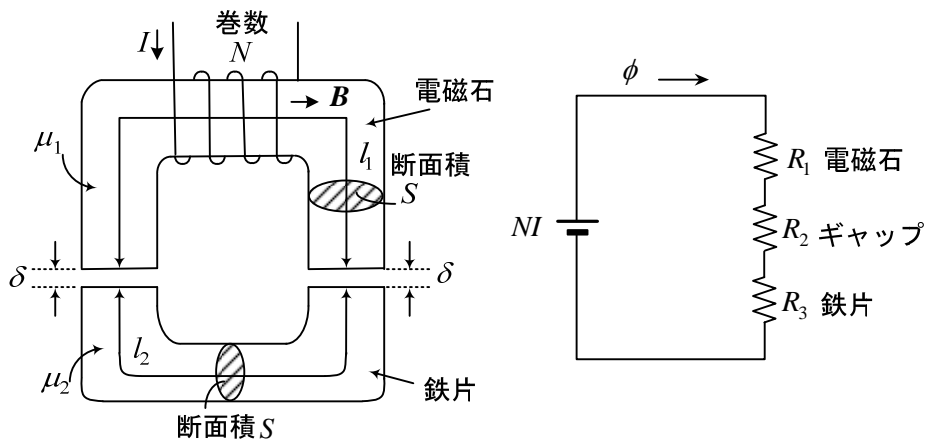
(1)  $\theta$  と  $\psi$  を独立変数と考えた場合：

$$T = -\frac{\partial W_m(\theta, \psi)}{\partial \theta} \quad (5-52)$$

(2)  $\theta$  と  $i$  を独立変数と考えた場合：

$$T = \frac{\partial W_m(\theta, i)}{\partial i} \quad (5-53)$$

**例題 10** 図のように透磁率  $\mu_1$  の電磁石が透磁率  $\mu_2$  の鉄片を吸引している。流れる電流が  $I$  で両方のギャップ長が  $\delta$  のとき、吸引する力を求めよ。ただし、漏れ磁束は無視する。



(解) 磁気抵抗は、

$$R_m = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{l_1}{\mu_1 S} + 2 \frac{\delta}{\mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S}$$

よって、磁束  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{NI}{R_m}$$

であり、電磁石、ギャップ、鉄片の磁束密度  $B$  は、

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2}}$$

蓄えられるエネルギー  $W_m$  は、エネルギー密度  $\times$  体積より、ギャップは2箇所あるから

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} V = \frac{B^2}{2\mu_0} S \delta + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_1} S l_1 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_2} S l_2$$

よって、 $\delta$ の増加する方向に働く力 $F$ は、鎖交磁束 $\psi = N\phi$ （よって磁束密度）と $\delta$ を独立変数と考え(5-45)より次式で計算できる。第2,3項の偏微分は0となる。

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial \delta} = -\frac{B^2}{\mu_0} S = -\frac{N^2 I^2 S}{\mu_0 \left( \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2} \right)^2} \quad (5-54)$$

-がつくから、実際は $\delta$ の減少する向きに働く。つまり吸引力である。

計算は複雑だが(5-51)より求めることもできる。

まず、 $W_m$ に $B$ を代入して

$$W_m(\delta, I) = \left( \frac{S\delta}{\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{Sl_1}{\mu_1} + \frac{1}{2} \frac{Sl_2}{\mu_2} \right) \frac{(NI)^2}{\left( \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2} \right)^2}$$

これより、

$$F_x = \frac{\partial W_m(\delta, I)}{\partial \delta}$$

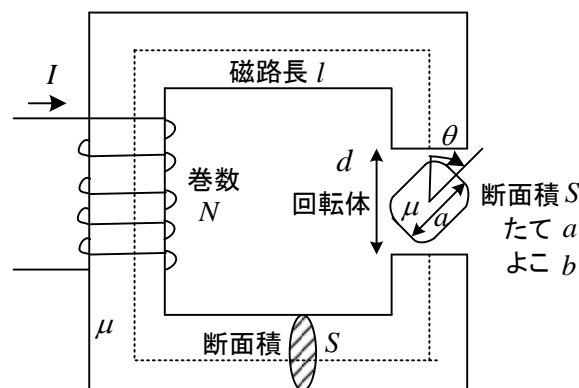
を計算すると(5-54)の結果と同じになる。

鉄片の上の面に働く力を誘電体の場合と同じようにマクスウェルの応力から求めた値は

$$F = 2 \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{B^2}{2} S = \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right) B^2 S$$

となり、(5-54)の結果と異なる。(5-54)が正しく、鉄片全体にかかる力は鉄片全体にマクスウェルの応力を適用しなければならないと考えられる<sup>(18)(23)</sup>。

**例題 11** 図のように透磁率 $\mu$ の回転体が角度 $\theta$ の方向を向いているとき、この回転体に働くトルクを求めよ。



(解)  $\theta = 0$ のとき、磁気抵抗は最小となり

$$R_{\min} = \frac{l+a}{\mu S} + \frac{d-a}{\mu_0 S}$$

$\theta = \pi/2$ のとき、磁気抵抗は最大となり

$$R_{\max} = \frac{l+b}{\mu S} + \frac{d-b}{\mu_0 S}$$

角度  $\theta$  のときの磁気抵抗  $R_m$  は、これらの間で変化するが、その逆数  $P_m$  が次式と仮定する。

$$P_m = 1/R_m = P_m \cos 2\theta + P_0$$

$$\text{ただし, } P_0 + P_m = \frac{1}{R_{\min}}, P_0 - P_m = \frac{1}{R_{\max}}$$

よって、コイルの磁束  $\phi = P_m NI$  より鎖交磁束は

$$\psi = N\phi = (P_m \cos 2\theta + P_0)N^2 I = LI$$

電磁エネルギー  $W_m$  は

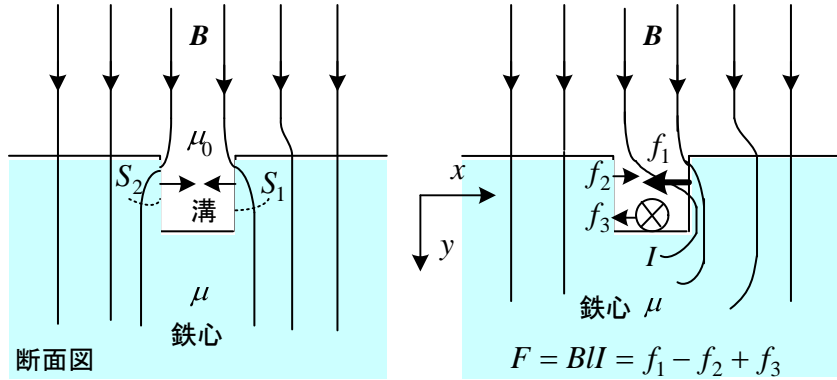
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(P_m \cos 2\theta + P_0)N^2 I^2$$

トルク  $W_m$  は(5-53)より

$$T = \frac{\partial W_m}{\partial \theta} = -P_m N^2 I^2 \sin 2\theta$$

$\theta$  が増える向きのトルクが負なので、もとに戻そうとするトルクが働く。電流を交流にし、さらにその位相を  $\theta$  に対して調整することで平均トルクが得られる。これはリラクタンスマータとして利用されている。

**例題 12** 図のように磁束密度  $B$  の磁界中で鉄心の中に埋め込んでいる長さ  $l$  の導線に電流  $I$  が流れているとき、導線に働く力は  $F = BII$  ではない。この理由を説明せよ。



(a) 導線がないとき

(b) 電流  $I$  が流れているとき

(解) (a)の導線がない場合（あるいは電流が0の場合）、鉄心の透磁率  $\mu$  は空気中の透磁率  $\mu_0$  に比べてかなり大きいので、磁束線は図のようになって溝の  $y$  軸方向の磁束密度は小さい値となる。(b)のように電流を流すと、電流による磁束線が加わるので、溝の右側の鉄心の壁面  $S_1$  には  $x$  軸方向の磁束密度  $B_x$  が大きくなり、逆に左側の壁面  $S_2$  では小さくなる。導線を通る  $y$  軸方向の磁束密度  $B_y$  は小さいので  $f_3 = B_y l I$  は小さい値になる。

鉄心表面  $S_1$  に働く  $x$  軸方向の力は、マクスウェルの応力より第4章例題16を参照して

$$f_1 = \frac{B_x^2}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) S$$

と近似できよう。 $S$ は $S_1$ の面積である。鉄心表面 $S_2$ に働く $x$ 軸方向の力 $f_2$ も同様に計算できるが、磁束密度が小さいので小さくなる。詳しい計算によると、導体に働く力と鉄心に働く力を加えると、図中に示すようになんと $BlI$ となる(7)(23)。モータが回る力は主に鉄心に働いており、これを**鉄心トルク**という。ただ、力の計算はフレミングの左手の法則で求めてよいのである。(a)の場合も鉄心に力は働いているが、 $f_1 = f_2$ で打ち消す。

## ○ 磁気双極子が作る磁界

電気双極子の場合、空間が誘電率 $\epsilon$ の空間で満たされているときの電位は(4-28)より

$$V = \frac{M}{4\pi\epsilon r^2} \cos\theta$$

であった。また電界は(4-29)より次式で表された。

$$E = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} = \hat{r}\frac{M}{2\pi\epsilon r^3}\cos\theta + \hat{\theta}\frac{M}{4\pi\epsilon r^3}\sin\theta$$

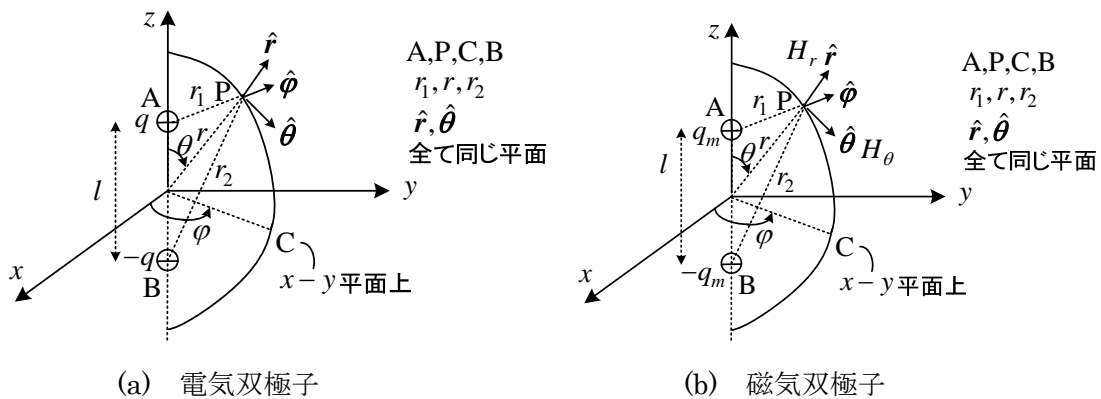


図 5-16 双極子

これに対して、細長い棒磁石にはN極とS極があり、両先端に磁荷があると考えることができる。N極とS極にはそれぞれ正と負の磁荷があるとする。ただし、磁荷は必ず対で現れ、電荷のように単独で取り出すことはできない。点磁荷 $q_m, -q_m$ からなる磁気双極子を考えよう。磁荷を取り巻く空間の透磁率を $\mu$  (一定) とする。

図 5-16(b)のように、 $l$ 離れた $z$ 軸上の2点A,Bにそれぞれ $q_m, -q_m$  ( $q_m > 0$ )の点磁荷がある。 $l$ が $r$ に比べて十分小さいとき、原点から $r$ の距離にあり、角度 $\theta$ の点Pの磁位は、電気双極子との対応関係から、次式で与えられる。

$$\phi_m = \frac{M}{4\pi\mu r^2} \cos\theta \tag{5-55}$$

ここで、**磁気双極子モーメント**は次式で与えられる。

$$M = q_m l \tag{5-56}$$

磁界は

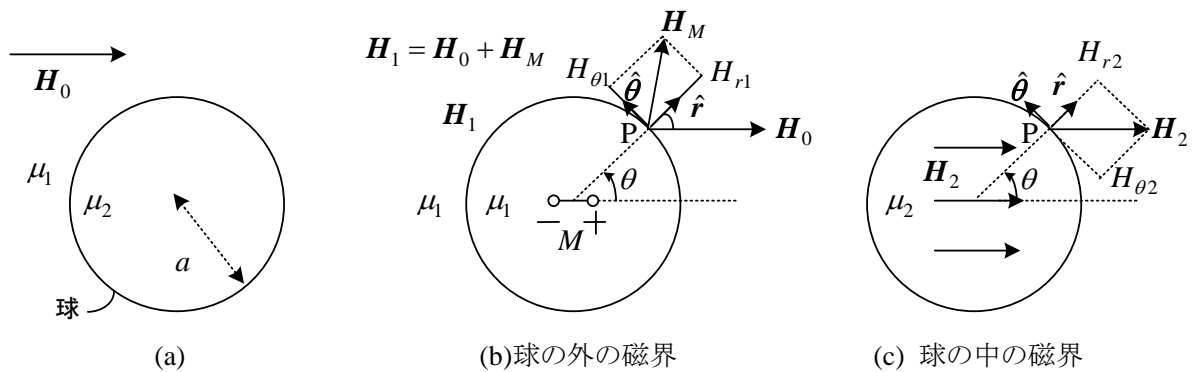


$$H_r = -\frac{\partial \phi_m}{\partial r} = \frac{M}{2\pi\mu r^3} \cos \theta \quad (5-57)$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = \frac{M}{4\pi\mu r^3} \sin \theta \quad (5-58)$$

となる。

**例題 13** 図(a)に示すように透磁率  $\mu_1$  の平等磁界  $\mathbf{H}_0$  の中に、透磁率  $\mu_2$ 、半径  $a$  の磁性体球を置いた。球の外の磁界  $\mathbf{H}_1$  と球の中の磁界  $\mathbf{H}_2$  を求めよ。



(解) 球の外の磁界を考える場合には、平等磁界  $\mathbf{H}_0$  と球の中心に磁気双極子モーメント  $\mathbf{M}$  の双極子を置いて全体を透磁率  $\mu_1$  とした場合の磁界との和と考え、球の中は透磁率  $\mu_2$  の平等磁界  $\mathbf{H}_2$  と仮定する。球の境界の点  $P$  における境界条件を満足するように、 $\mathbf{M}$  と  $\mathbf{H}_2$  を決めることができれば最初の仮定は正しいと考えられる。

(5-57)、(5-58)の双極子が作る磁界より

$$H_{r1} = \frac{M}{2\pi\mu_1 r^3} \cos \theta, \quad H_{\theta1} = \frac{M}{4\pi\mu_1 r^3} \sin \theta$$

(2-58)で磁界の接線成分が等しいことから次式が成立しなければならない(面電流なし)。

$$-H_0 \sin \theta + \frac{M}{4\pi\mu_1 a^3} \sin \theta = -H_2 \sin \theta \quad (1)$$

(2-59)で磁束密度の垂直成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

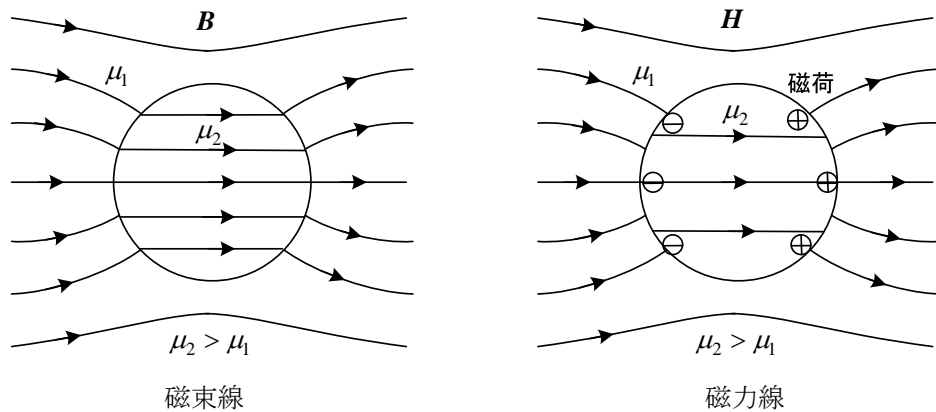
$$\mu_1 H_0 \cos \theta + \frac{\mu_1 M}{2\pi\mu_1 a^3} \cos \theta = \mu_2 H_2 \cos \theta \quad (2)$$

ただし、 $H_0 = |\mathbf{H}_0|, H_2 = |\mathbf{H}_2|$ 。(1),(2)を解いて

$$M = \frac{4\pi a^3 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2} H_0, \quad H_2 = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} H_0$$

$\mu_2 > \mu_1$  のとき、 $H_2 < H_0$  となる。このときの磁束線と磁力線は次のようになる。透磁率  $\mu_2$  の磁性

体表面の磁荷によって球内の磁界が弱くなると解釈できる。



### ○ ループ電流が作る磁界（ベクトルポテンシャルの応用）

(2-34)で、変位電流を無視すると、電流  $\mathbf{i}$  に対するベクトルポテンシャルの関係が次式のように得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (5-59)$$

先に述べたように緩慢な変化であれば(5-2)は成立つので、電流の時間変化があっても(5-59)も成立つ。(5-59)を成分ごとに書くと

$$\nabla^2 A_x = -\mu i_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu i_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu i_z \quad (5-60)$$

となり、ポアソンの方程式である。従って、

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_x}{r} dV, \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_y}{r} dV, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_z}{r} dV \quad (5-61)$$

これらをまとめて、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}}{r} dV \quad (5-62)$$

と書く。電流は空間に分布しており、それぞれが P 点にベクトルポテンシャルを作り、全体の合計が  $\mathbf{A}$  である。 $r = |\mathbf{r}|$  は、 $dV$  から P 点までのベクトルであり、 $dV$  点が変われば当然変化する。

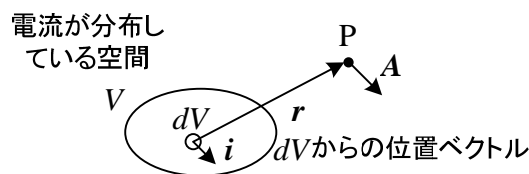


図 5-17 ベクトルポテンシャル

断面積  $S$  の細い導線に電流  $I$  が流れている場合では、図 5-18 より  $\mathbf{i} dV = i t S dl = I t dl$  だから

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{t}}{r} dl \quad (5-63)$$

$I \mathbf{t} dl$  が作るベクトルポテンシャル  $d\mathbf{A}$  は、次式で表せる。

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu I \mathbf{t} dl}{4\pi r} \quad (5-64)$$

ベクトルポテンシャルは微小部分の電流の向きを向いていることがわかる。

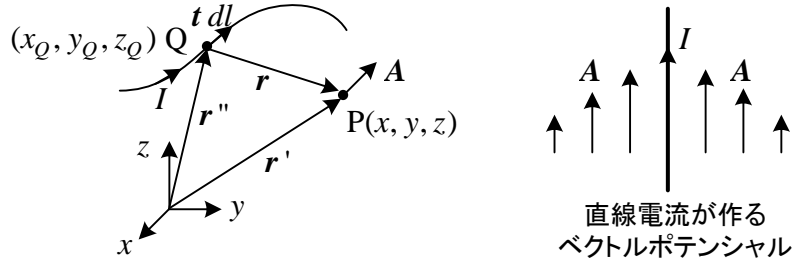


図 5-18 導線の電流が作る磁界

ベクトルポテンシャルを使って、ビオ - サバールの法則を導こう。図 5-18 の場合を考えよう。(5-63)より、rot の演算は、P 点の座標 (すなわち  $\mathbf{r}'$ ) について行うので積分の中にいれて先に演算してもよいから、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \left( \int_C \frac{\mathbf{t}}{r} dl \right) = \frac{I}{4\pi} \int_C \text{rot} \left( \frac{\mathbf{t}}{r} \right) dl$$

(付 6) より  $\text{rot}(f \mathbf{A}) = (\text{grad } f) \times \mathbf{A} + f(\text{rot} \mathbf{A})$  を用いて、

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{t}}{r} \right) = \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{t} + \frac{1}{r} (\text{rot } \mathbf{t}) = \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{t}$$

$\mathbf{t}$  は電流路で決まり、P 点の座標 (すなわち  $\mathbf{r}'$ ) の関数ではないので、 $\text{rot } \mathbf{t} = \mathbf{0}$  である。図より、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'' = (x - x_Q) \hat{\mathbf{x}} + (y - y_Q) \hat{\mathbf{y}} + (z - z_Q) \hat{\mathbf{z}}$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}$$

だから、

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{1}{2r^3} \{ 2(x - x_Q) \hat{\mathbf{x}} + 2(y - y_Q) \hat{\mathbf{y}} + 2(z - z_Q) \hat{\mathbf{z}} \} \\ &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (5-65)$$

従って、

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{t} dl = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (5-66)$$

となる。微小電流要素  $I \mathbf{t} dl$  によって P 点に生じる磁界は

$$d\mathbf{H} = \frac{I \mathbf{t} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} dl \quad (5-67)$$

であり、これは(5-12)に示したビオ - サバールの法則である。

図 5-19 に示すように  $x$ - $y$  平面上にある長方形（中心は原点）の微小ループに電流  $I$  が流れているとき、中心から  $r$  離れた透磁率  $\mu$  の空間にできるベクトルポテンシャルと磁界を求めよう。

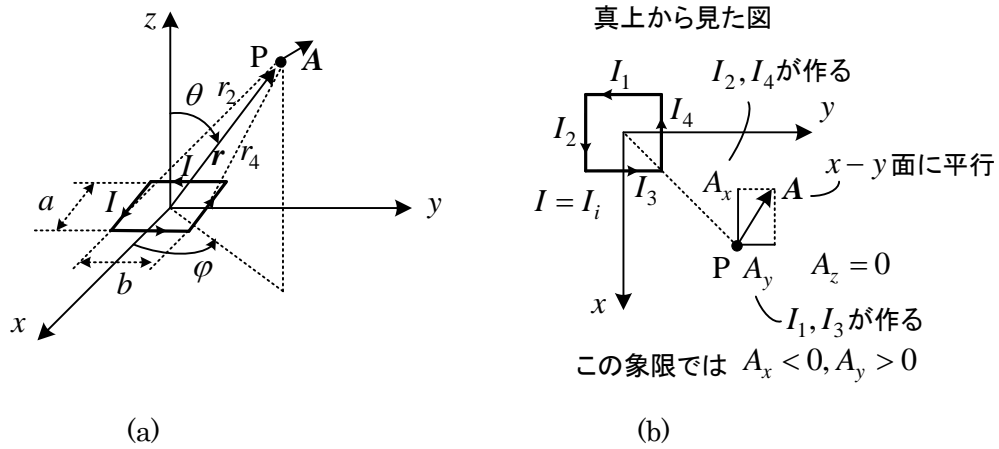


図 5-19 微小ループの電流が作るベクトルポテンシャル

電流  $I$  を辺ごとに  $I_1, I_2, I_3, I_4$  (全て  $I$  に等しい) と区別して考える。(5-64)よりベクトルポテンシャルは微小部分の電流の向きを向いていることがわかるので、 $P$  点  $(x, y, z)$  のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の  $x$  成分  $A_x$  は  $I_2, I_4$  によって、 $y$  成分  $A_y$  は  $I_1, I_3$  によって作られると考えられる。 $a, b$  は(5-64)の微小長さ  $dl$  に対応し、 $I_2$  が作る  $A_x$  は正、 $I_4$  が作る  $A_x$  は負だから

$$A_x = \frac{\mu I a}{4\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \frac{\mu I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + z^2}} - \frac{\mu I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \frac{b}{2})^2 + z^2}}$$

ここで、 $r_2, r_4$  はそれぞれ  $I_2, I_4$  の辺の中心から  $P$  点までの距離である。

この近似を行うにあたり、まず  $b^2$  の項を無視する。次に、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  より

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + by}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{by}{r^2}}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{by}{2r^2} \right)$$

を用いて

$$A_x \approx -\frac{\mu I a b y}{4\pi r^3}$$

となる。同様に、 $y$  成分  $A_y$  は

$$A_y \approx \frac{\mu I a b x}{4\pi r^3}$$

$z$  成分  $A_z$  は、電流の  $z$  成分がないので

$$A_z = 0$$

ここで、電流ループの磁気モーメントを次式で定義する。

$$m = I a b = IS \tag{5-68}$$

ベクトルポテンシャルはベクトル表示すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\mu m}{4\pi r^3} (-y \hat{x} + x \hat{y}) \\
 &= \frac{\mu m}{4\pi r^3} (-r \sin \theta \sin \varphi \hat{x} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{y}) \\
 &= \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2} (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \\
 &= \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}
 \end{aligned} \tag{5-69}$$

従って、P 点の磁界は、球面座標の rot 計算の公式(付 26)を用いて、次式で表される。

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \tag{5-70}$$

すなわち、

$$B_r = \frac{\mu m}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{\mu m}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad B_\varphi = 0 \tag{5-71}$$

(5-71)の導出については、 $A_r = 0, A_\theta = 0, A_\varphi = \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2}$  より、例えば、

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}$$

ここで、 $\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu m}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \right) = \frac{2\mu m}{4\pi r^2} \sin \theta \cos \theta$ ,  $\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = 0$  よりもとまる。

(注)  $\partial/\partial\theta$  のとき  $r$  は定数とみなす。 $r, \theta, \varphi$  がこの場合独立変数。

磁界は⑦より次式で求められる。

$$H_r = \frac{m}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{m}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad H_\varphi = 0 \tag{5-72}$$

(5-57)と(5-72)を比較すると、次式の場合、**磁荷モデル**と**電流モデル**が等価であることが分かる。

$$M = q_m l = \mu m = \mu I S \tag{5-73}$$

簡単のため図 5-19 の場合を考えたが、図 5-20 の場合も磁気モーメント  $m = IS$  を使うと(5-72)と同じ結果が得られる。

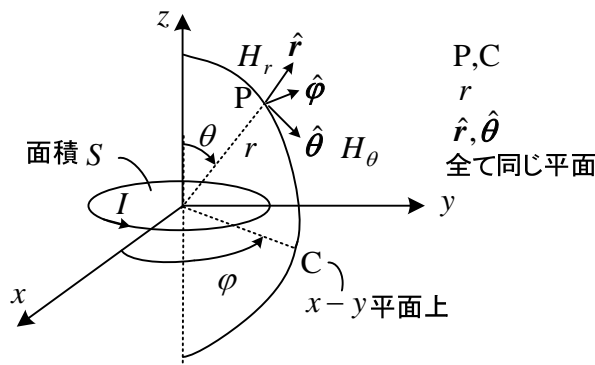


図 5-20 微小ループの円電流が作る磁界