



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/38873
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-19T02:50:30Z

第6章 コイルII

この章では、磁界の時間変化により電界が生じる電磁誘導の法則を中心に述べる。まず、自己誘導と相互誘導について述べる。次に導線が磁界中を動く場合に生じる起電力に関して解説する。また抵抗、コンデンサ、コイルに関するキルヒホッフの法則を電磁気学の立場で明確にする。最後に表皮効果を解析する。本章でも第5章と同じように緩慢に変化する現象のみを扱う。

○ 電磁誘導の法則 (law of electromagnetic induction)

“電気を発生させてください”と言われたら、“そんなことは自分にはできない”と言う人がほとんどだろう。しかし、実は以外に簡単に電気を作れる。磁石と電線を準備し、電線をぐるぐる巻いてコイルを作り、そのコイルに磁石を素早く近づけるだけでよい。立派にコイルに電気(起電力)が発生する。

図6-1に示すように、磁石を近づけたり遠ざけたりすると磁束密度 B がコイルの中で変化し、コイルに誘導起電力 (electromotive force 略 emf) を発生する。これは、ファラデーにより発見され、**電磁誘導の法則**と呼ばれる。なお、コイルの中の B が変化しないといけないので、磁石を静止させた状態では誘導起電力を生じない。誘導起電力 e [V] は、磁石がコイルを貫く磁束 ϕ [Wb] の時間変化すなわち微分に比例し、コイルの巻数 N にも比例する。誘導起電力を

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \tag{6-1}$$

で表わすことが多い。ただ、(6-1)だけでは曖昧である。(6-1)は、誘導起電力 e の矢印(測定の向き、**正の向き**)を磁束 ϕ の矢印(測定の向き、法線ベクトル n の向き)と**右ねじの関係**に選んだときの式である。すなわち ϕ の矢印に対し、右ねじの回る向きにコイルの導線に e の矢印をとる (e の測定の向きを逆に選べば $-$ は不要)。図6-1のように開放した端子の場合、(6-1)の e は、コイル端子での電圧 v (磁束 ϕ の向きに進むねじの回る向きにコイルをなぞり、その出口に矢を向ける) と等しくなる ($e = v$ 、後で詳述する)。 v' の様に v と逆向きに電圧の矢印を定義すると $v' = -v$ で $v' = Nd\phi/dt$ となる。図6-1では、(a)の場合磁束が増えるので $d\phi/dt > 0 \therefore e = v < 0$ 、(b)の場合磁束が減るので $d\phi/dt < 0 \therefore e = v > 0$ となる。電圧の矢印(測定の向き、正の向き)は、矢の先端の電位から矢の根の電位を引いた値であることは3章で述べた。(筒は巻き方が判るように書いた。)

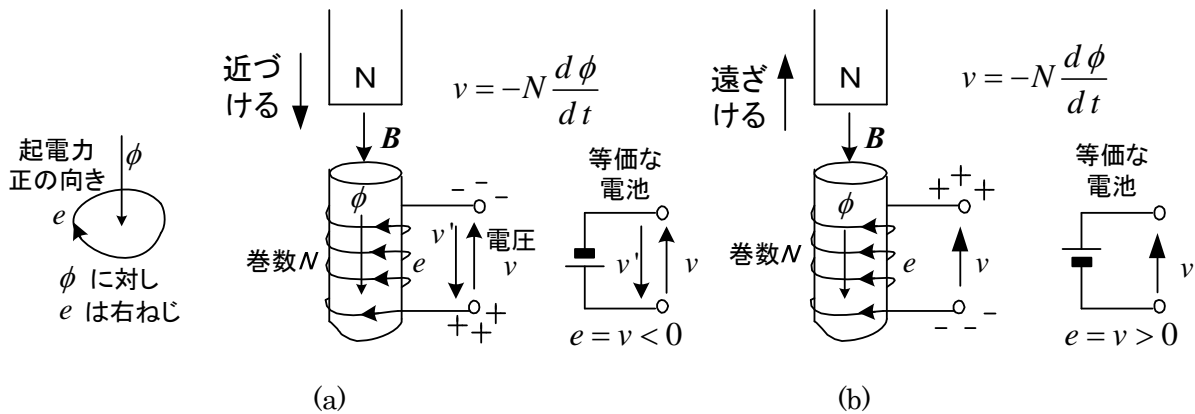


図 6-1 電磁誘導の法則

起電力は等価な電池として図 6-1 のように考えるとわかり易い。等価な電池の負極から正極に向けた向きを実際の誘導起電力の向きということがある。これは流そうとする電流の向きだが、都合良く正となる電池の電圧の矢印の向きと一致する。実際のをつけないで単に“起電力の向き”ということもあり，“起電力 e の正の向き”と混同しやすい。起電力 e の正の向きは e の矢印の向きである。(a)の場合 e と反対向きが、(b)の場合は e の向きが実際の起電力の向きである。

矢印の注意：ベクトル場 \mathbf{B} などを表す場合の矢印は実際の向きで測定の向きという考え方はない。これに対し、 e, v, ϕ, v' の矢印は、測定の向きを表す。 e, v, ϕ, v' は線積分や面積分で定義され、そのときの接線ベクトル \mathbf{t} や法線ベクトル \mathbf{n} の向きが測定の向きである。

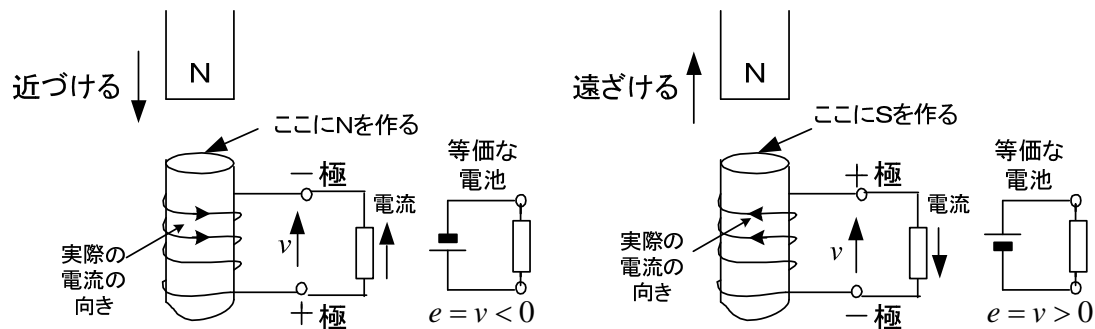


図 6-2 電磁誘導の法則 (誘導電流 i) ($e = v$ はコイルの内部抵抗無視の場合)

図 6-2 に示すように、コイルの端子に抵抗をつなぎ磁石を近づけたり遠ざけたりすると、電流 (誘導電流) が流れる。誘導電流の向きは、誘導電流による磁界が、磁石による磁界の変化を妨げる向きである。これをレンツの法則という。図 6-1 で説明したように電流が流れなくても誘導起電力や電圧は生じているが、その極性をレンツの法則から求めることも可能である。このときも、コイルを図 6-2 に示すように電池に対応させるとわかり易い。コイルには、一極から+極に電流が流れていることに注意しよう。抵抗をつないだ場合にも(6-1)は成り立つが、磁束 ϕ としては、磁石が作る磁束の他に、流れる電流による磁束 (後述の自己誘導参照) も加えたものでなくてはならない。大学受験問題では問題が難しくなるので無視されることもあるが、電流が急変するときには、この項の影響は大きい。

電流が流れると(6-1)の誘導起電力と図 6-2 の端子電圧 v は一般に一致しない。これはコイルを作る電線の抵抗 (内部抵抗と呼ぶ) があるためで、第 3 章で説明した電池の場合と同じである。しかし、コイルの内部抵抗を 0 とすると $e = v$ である。すなわち、コイルの内部抵抗が無視できるなら、たとえ電流が流れていても誘導起電力 e と端子電圧 v の値は等しくなる。このため電圧 v を厳密には正しい言い方ではないが起電力とよぶこともある。電気回路では起電力という言葉は使わずに、電源電圧とかコイルの電圧ということが多い。

以上、概要を述べたが、これから詳しく説明しよう。まず磁束を述べよう。磁束 ϕ は、開曲面 S をとり、その面に垂直な法線ベクトル \mathbf{n} を自分で決め、磁束密度 \mathbf{B} の \mathbf{n} 方向成分 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B \cos \theta$ を S 上で集めた面積分

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (6-2)$$

により定義された。磁束 ϕ は \mathbf{B} と違ってスカラであり、面 S や \mathbf{n} を決めないと決らない。 \mathbf{n} のとり方 (2 通りある) で符号が違ってくる。ただ面 S や \mathbf{n} を詳しく定義するのは、回路的に考える

場合には煩雑である。そこで面 S はコイルの断面とし、 \mathbf{n} の矢印の代わりに ϕ に矢印を付けて表わすこともある。 \mathbf{n} の向きが ϕ の測定の向きである。また図中に \mathbf{B} のベクトルまたは磁束線が書かれていたら、その向き側に法線ベクトル \mathbf{n} が選ばれていると考えよう。 \mathbf{B} の磁束線を描いて、 ϕ とだけ書いている本も多い。(6-1) で求める誘導起電力 e の測定の向きは、 \mathbf{n} の矢印 (磁束 ϕ の測定の向き) に対して右ねじを回す向きに選んだ場合である (\mathbf{n} の向きは自由に選んでよい)。

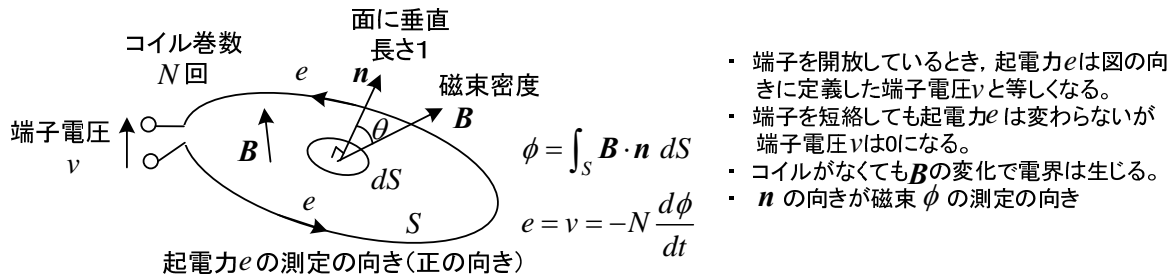


図 6-3 磁束 ϕ ，誘導起電力 e ，端子電圧 v の関係 (端子開放の場合)

起電力と電圧については、第 3 章の電池のところでも述べたが、起電力は非クーロン電界に対して定義された量で、電圧はクーロン電界について定義された量である。図 6-4 で磁石を近づけると、磁界が変化して④により誘導電界 \mathbf{E}_b が生じる。これは非クーロン電界の 1 つである。 \mathbf{E}_b により、コイル中の電子がローレンツ力を受けて移動し、a の端子に貯まる。B の端子はその分電子が少なくなるので正に帯電する。レンツの法則で電流を a から b へ (コイル中) 流そうとして正電荷が b に貯まると考えればよい。端子 a, b 付近には電荷が貯まるので、この結果クーロン電界 \mathbf{E}_c が生じる。なお電荷の再配置は瞬時に完了する。コイルに流れる電流 \mathbf{i}_c は、オームの法則

$$\mathbf{i}_c = \kappa(\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \quad (6-3)$$

を満たす。端子は開放されているから、当然 $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$ である。よって、コイルの導線の中では

$$\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = \mathbf{0} \quad (6-4)$$

でなくてはならない。すなわち、誘導電界とクーロン電界が打ち消して導線中の電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c$ は $\mathbf{0}$ になる。ローレンツ力 $q\mathbf{E}$ も $\mathbf{0}$ となり、必要以上の電荷の移動は生じない。b 点から見た a 点の電圧は⑩よりクーロン電界を用いて次式で与えられる。

$$v = -\int_b^a \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \quad (6-5)$$

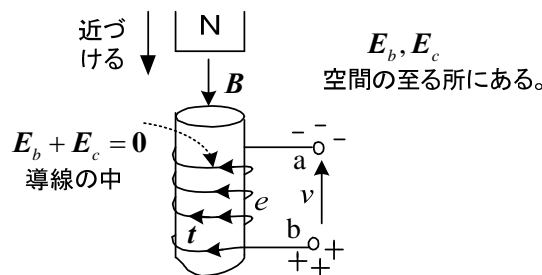


図 6-4 電界と起電力及び電圧の関係 (端子開放の場合)

クーロン電界の線積分は道によらないのでコイルの導線の中を通っても構わない。電圧を測る矢印は、途中の道に関係なく、b点からa点に向けて書く。一方、コイルの導線の中を通って

$$e = \int_b^a \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl \quad (6-6)$$

とする。起電力 e は線積分する道に依存する。測る向きは \mathbf{t} の向きで、それを e の矢印として図中に書いている。(6-4)~(6-6)より、同じ導体内の積分路で

$$\int_b^a (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad \therefore \int_b^a \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = - \int_b^a \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \quad \therefore e = v \quad (6-7)$$

起電力の定義では閉ループで線積分すべきだが、端子 ab 間の空気中の \mathbf{E}_b の寄与分はコイルの中で \mathbf{E}_b を十分集めた(6-6)に比べ十分小さいと考えられるから、 e は誘導起電力と言える。一方、端子 ab 間の空気中のクーロン電界を線積分した値の方は導線中と同じ v である (道によらない)。

次に、端子に抵抗をつないで、電流が流れる場合を考える。コイルの内部抵抗を考えると、コイルの導線ではオームの法則より次式が成り立つ。

$$\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa} \quad (6-8)$$

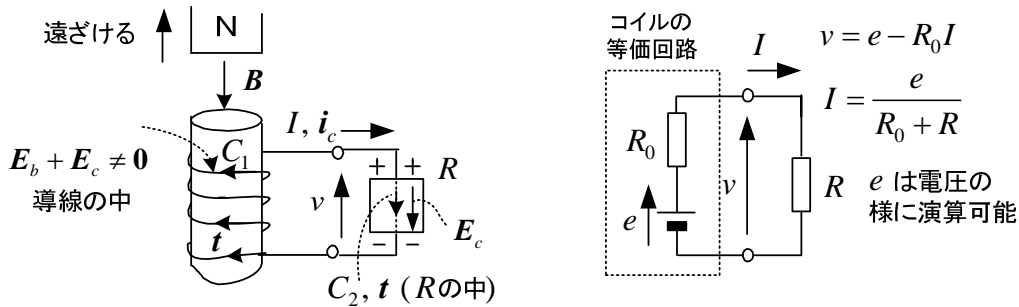


図 6-5 電界と起電力及び電圧の関係 (抵抗 R を接続)

電流が流れる回路(積分路 $C = C_1 + C_2$, $C_1: R$ 以外)に沿って、電界の線積分を考える。クーロン電界 \mathbf{E}_c を一周線積分した値は 0 であるから \mathbf{t} の向きに測った起電力 e は次式となる。

$$\begin{aligned} e &= \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \approx \int_{C_1} (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \\ &\quad \text{コイル} \quad \text{抵抗 } R \\ &= \int_{C_1} \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl \quad (\mathbf{i}_c, \mathbf{t} \text{ 同じ向き}) \\ &= R_0 I + R I \end{aligned} \quad (6-9)$$

抵抗 R の中はクーロン電界のみとして近似している。理由は \mathbf{E}_b の線積分についてはコイルの部分がほとんどであり、また R の中では \mathbf{E}_b が小さいと考えられるからである。抵抗の両端に電荷が分布し、これが抵抗の中にクーロン電界を作って電流を流す。電荷は导体表面や抵抗の両端にあり、导体中や抵抗の中にはない。電荷の分布は正確に判らなくても構わないが、クーロン電界を作っている。抵抗の電圧は

$$v = \int_{C_2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = RI \quad (6-10)$$

である (⑩とは \mathbf{t} の向きが逆なのでマイナス不要)。 (6-9), (6-10) より

$$e = R_0 I + v$$

が得られる。この式から図 6-5 のコイルに抵抗を接続した場合の等価回路が得られる。コイルに内部抵抗がなければ例え電流が流れていても $e = v$ となる。図 6-5 ではコイルを等価的に表すため電池を考えているが、これは判りやすくするためであって、起電力 e は (6-1) で計算しないといけない。一般に e は時間的に変化する。磁石を近づけるときは (6-9) は変わらず $e < 0, I < 0$ である。

○ コイルに成り立つ式 (自己誘導 self-induction)

図 6-6 に示すように鉄心に巻かれたコイルに電源 (普通は交流) を接続し、電流 i を流す。この電流により鉄心には \mathbf{B} の磁束線ができる。電源電圧を変えると、電流、 \mathbf{B} 及びコイルの磁束 ϕ が変化し、電磁誘導の法則によりコイルに誘導起電力が発生する。コイルが作った磁束によって、コイル自身に起電力が発生するので、この現象は**自己誘導**とよばれる。図 6-6 の (a), (b) ではコイルの巻き方が異なる。自分で決める電流 i の矢印 (測定の向き) に対し、右ねじの進む向きに \mathbf{n} の矢印 (ϕ の測定の向き) を取ると (6-11) が成立する。これは自己インダクタンスの定義式である。

$$\psi = N\phi = Li \quad (6-11)$$

L : 自己インダクタンス (self-inductance) [H] (ヘンリー) (常に正)

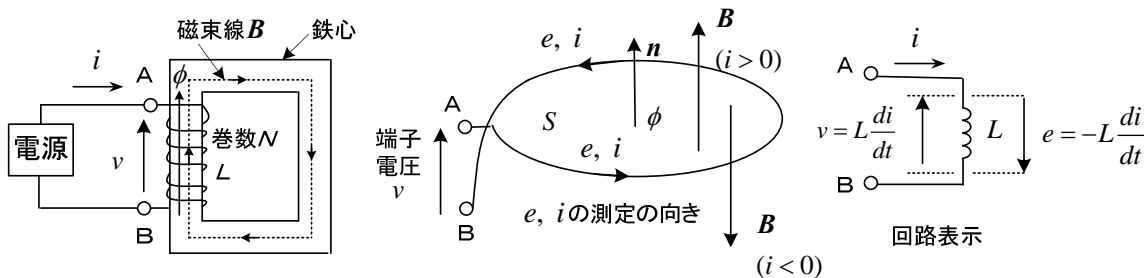
ψ : 鎖交磁束 (linkage flux), N : コイルの巻数 (常に正)

図 6-6 (a), (b) いずれの場合も電流 i が磁束 ϕ を作るが、 $i > 0$ なら右ねじの法則より \mathbf{B} と \mathbf{n} の向きが一致するので $\phi > 0$ ($i < 0$ なら \mathbf{B} が逆向きになるから $\phi < 0$) となる。

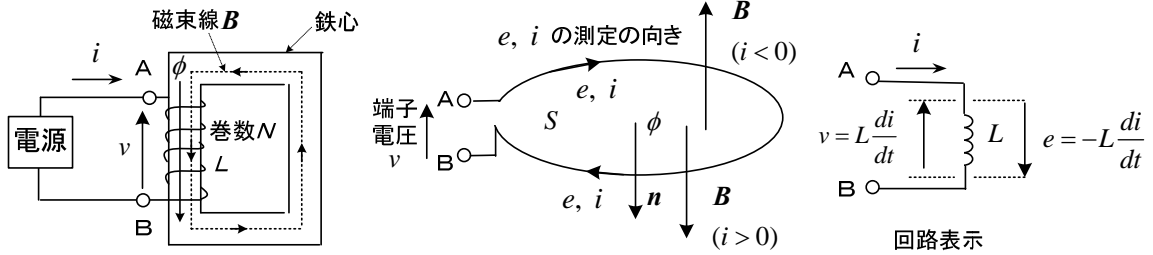
端子電圧 v の測定の向き (矢印) を図 6-6 のようにとると (図 6-1, 6-2, 6-3 とは逆に選んでいることに注意), (a), (b) いずれの場合でも $v = -e$ だから (6-1) より

$$v = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (6-12)$$

となる。これは磁束 ϕ の測定の向き (矢印) に右ねじを進めるとき、ねじの回る方向にコイルをなぞり、その出口に電圧 v の矢印の根をとっていることから判る。 (6-11), (6-12) より、



(a)コイルの巻き方 I



(b)コイルの巻き方Ⅱ

図 6-6 コイルの電流，磁束，起電力

$$v = L \frac{di}{dt} \tag{6-13}$$

が得られる。この式は，コイルの基本式として大変重要である。注意点として， v と i の矢印を逆向きを選んだ場合の式である。誘導起電力 e は，図の測定の向きの場合には $e = -v$ で，

$$e = -L \frac{di}{dt} \tag{6-14}$$

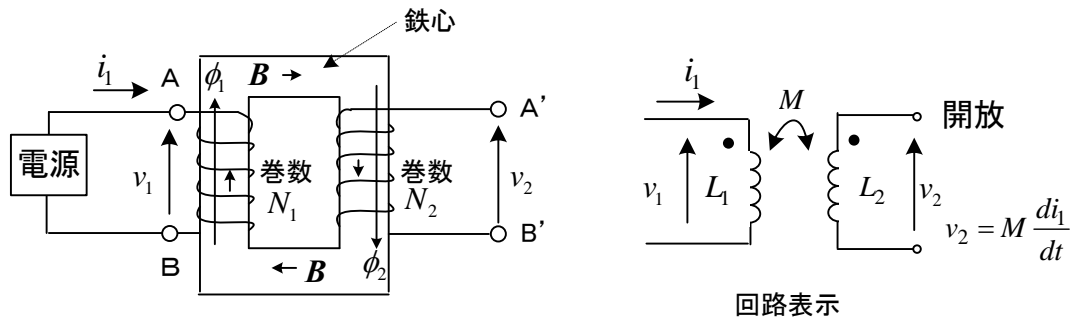
となる。コイルの巻き方に関係なく (6-13), (6-14) は成立することが判る。結局，回路で考える場合には(6-13)を測定の向きも含めて覚えておけばよい。

○ コイルに成り立つ式（相互誘導 mutual-induction）

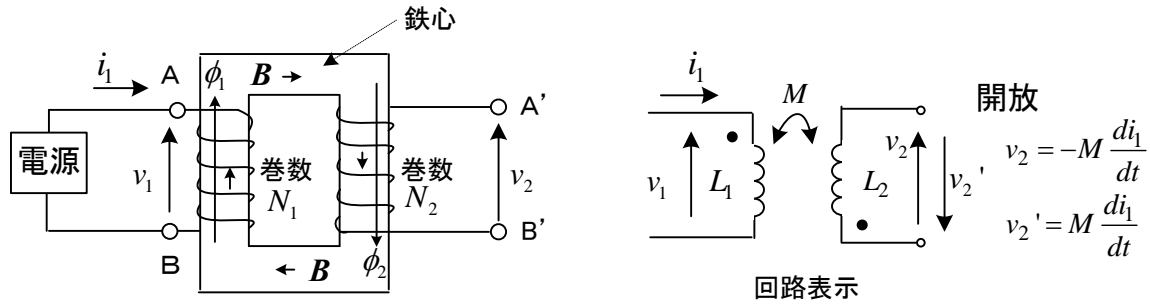
図 6-7 の様に，^{てっしん}鉄心に 2 つのコイルを巻いた場合を考える。これが変圧器である。電流 i_1 が流れると，巻数 N_1 のコイル 1（一次巻線）に i_1 によって磁束密度 B ができる。 B は，鉄心を通して，巻数 N_2 のコイル 2（二次巻線）の中も通る。電源電圧を変化させて電流 i_1 を変化させると B が変化し，電磁誘導の法則によって二次巻線にも誘導起電力が生じる。これは，**相互誘導**(mutual induction)と呼ばれる。相互誘導による図(a)の場合の電圧 v_2 は，次式で与えられる。

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \tag{6-15}$$

ここで， M を**相互インダクタンス**(mutual inductance)[H]と呼ぶ。一次巻線に対する二次巻線の巻き方が，(b)の場合には， v_2 の極性が逆になる。



(a) コイルの巻き方 I ($M > 0$)



(b) コイルの巻き方Ⅱ ($M > 0$)

図 6-7 変圧器とその回路表示 (二次側開放の場合)

回路表示で図中の \bullet 印は、巻線の巻き方の情報を示すものである。 \bullet 印は相互インダクタンス M についての式を立てる場合に関係し、自己インダクタンス L_1, L_2 には関係しない。 \bullet 印からコイルに入る向きに電流 i の矢印を選ぶと、相互誘導によって相手方のコイルの \bullet 印に電圧の矢印の矢がある向きに $M(di/dt)$ が生じるものと定義する。一般に自己インダクタンスは常に正であるが、相互インダクタンスは正とは限らない。ただし、図 6-7 の場合には、図の様に \bullet 印をつけることで相互インダクタンスは正にできる。

(6-15)が成り立つのは、二次巻線に何もつないでいない場合(開放)で、図 6-8 のように抵抗などをつなぐと電流 i_2 が流れ、二次巻線に自己誘導による電圧が発生すると同時に一次巻線に二次巻線の電流 i_2 による相互誘導の電圧が発生する。鉄心中の磁束密度 B は電流 i_1 と電流 i_2 で作られる。この場合が一般的なので、磁気回路の考え方をを使ってやや詳しく述べよう。仮定として、鉄心の外では B は 0 とする。すなわち、鉄心の外 (空気中) に漏れる磁束 (漏れ磁束) はないものとする。この結果、一次巻線にできる磁束 ϕ_1 と二次巻線にできる磁束 ϕ_2 は等しく、これを ϕ で表す。すなわち、 $\phi = \phi_1 = \phi_2$ である。

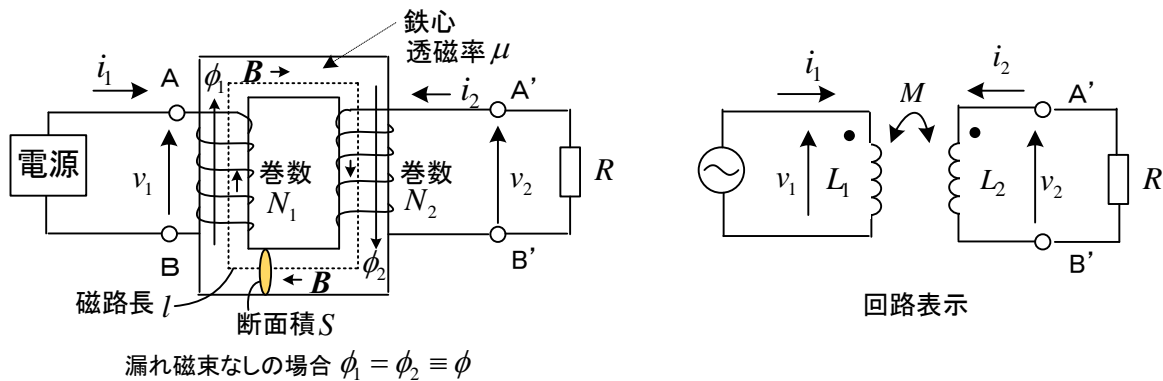


図 6-8 変圧器とその回路表示 (二次側に負荷抵抗を接続の場合)

磁束 ϕ は、電流 i_1 だけでなく、電流 i_2 によっても作られる。電流 i_1, i_2 の矢印を図の向きにとると、これらの電流が正のとき同方向の B を作るから、磁気回路の考え方をを使って

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = \frac{\text{起磁力}}{\text{磁気抵抗}} = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m} \quad (6-16)$$

磁気抵抗は次式で与えられる。鉄心の断面積はどこも同じと仮定する。

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (6-17)$$

ここで、 l ：鉄心の磁路長[m]、 μ ：鉄心の透磁率[H/m]、 S ：鉄心の断面積[m²]
 一次巻線の鎖交磁束は(6-16)より

$$N_1 \phi_1 = \frac{N_1^2}{R_m} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_m} i_2 \equiv L_1 i_1 + M i_2 \quad (6-18)$$

同様に二次巻線の鎖交磁束は

$$N_2 \phi_2 = \frac{N_1 N_2}{R_m} i_1 + \frac{N_2^2}{R_m} i_2 \equiv M i_1 + L_2 i_2 \quad (6-19)$$

となる。上式は、自己インダクタンス L_1, L_2 、相互インダクタンス M の定義で

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m}, L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}, M = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (6-20)$$

となることが判る。この場合 $M > 0$ である。このとき、

$$L_1 L_2 = M^2 \quad (6-21)$$

が成立する。これは漏れ磁束がない場合に成り立ち、**密結合条件**と呼ばれている。

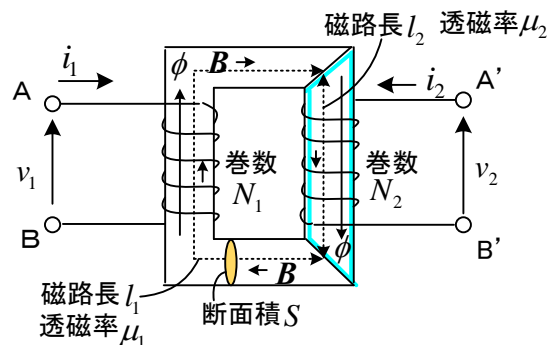
変圧器に生じる電圧は、(6-12)より次のように計算できる。これは磁束の測定の向き（図の矢印）に右ねじを進めるとき、ねじの回る向きにコイルをなぞり、その最終端に電圧 v_1, v_2 の矢印の根をとっていることから－がつかない。

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6-22)$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (6-23)$$

漏れ磁束を考慮する場合には、漏れ磁束を作る巻線の漏れインダクタンス l_1, l_2 をそれぞれ L_1, L_2 に加え、改めて $L_1 + l_1 \rightarrow L_1, L_2 + l_2 \rightarrow L_2$ と置き換えることで、(6-22),(6-23)として表す。この場合には、 $L_1 L_2 > M^2$ となる。電気回路では以上の様に変圧器のモデル化を行う。

例題 1 図の様に2つの部分からなる鉄心にコイルが巻かれている。鉄心の断面積はどこでも S であるとする。自己インダクタンスと相互インダクタンスを求めて、電気回路で表せ。ただし、鉄心の外への漏れ磁束はないものとする。



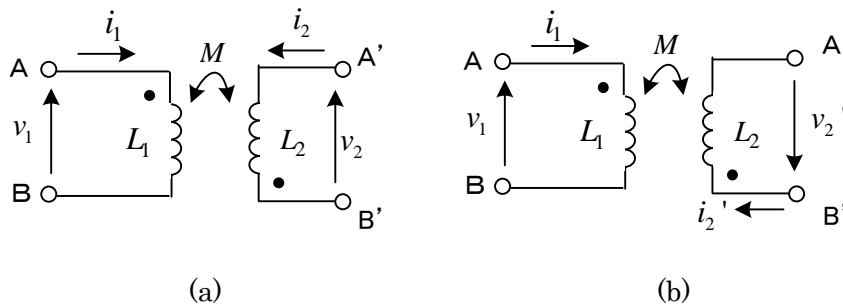
(解) 漏れ磁束がないので、鉄心の磁束 ϕ はどの断面 S でも同じである。磁気回路の考え方を利用する。巻線の巻き方に対し、電流 i_1, i_2 の正負と ϕ の正負を考えて

$$\phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_m}, \quad \text{磁気抵抗 } R_m = \frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S}$$

となる。電圧は次式となり、電気回路は(a)で表される。

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad v_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

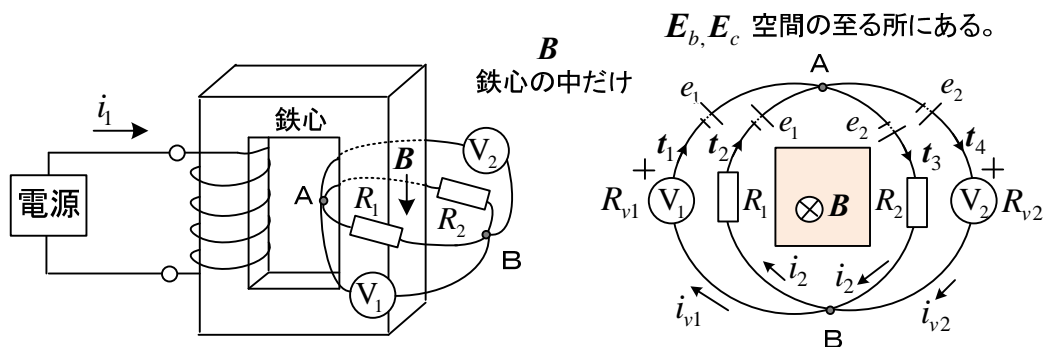
ただし、自己インダクタンス： $L_1 = \frac{N_1^2}{R_m}$, $L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}$, 相互インダクタンス $M = \frac{N_1 N_2}{R_m}$



(b)図のように、 $i_2' = -i_2, v_2' = -v_2$ を用いると、-はつかない。

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2'}{dt}, \quad v_2' = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2'}{dt}$$

例題 2 図の変圧器の2次側に1回巻きのコイルがあり、抵抗 R_1, R_2 を接続している。またコイルの点A,Bに電圧計 V_1, V_2 を接続している。抵抗 R_1, R_2 に流れる電流が i_2 のとき電圧計の読みを求めよ。 i_2 が作る磁界は無視し、磁界は鉄心中のみとする。



(解) 電圧計の内部抵抗 R_v は大きいので、そこに流れる電流 i_{v1}, i_{v2} は無視できる。電圧計は R_v と+端子から流れ込む電流を掛けた値を表示するもの考える($V_1 = -R_{v1} i_{v1}, V_2 = R_{v2} i_{v2}$)。すなわち電圧計は大きな抵抗で、その中に生じるクーロン電界による電圧を表示する(誘導電界は無視できよう)。一般に④の電磁誘導の法則よりクーロン電界 E_c と誘導電界 E_b を用いて

$$\int_C (E_c + E_b) \cdot t dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

である。 $t_1, -t_2$ の閉路については鎖交する磁束は0だから③を用いて

$$\int_{BA} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_1 dl + \int_{AB} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot (-\mathbf{t}_2) dl = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \int_{BA} \frac{i_{v1}}{\kappa_{v1}} \cdot \mathbf{t}_1 dl - \int_{BA} \frac{i_2}{\kappa_{R1}} \cdot \mathbf{t}_2 dl = 0 \quad \therefore R_{v1} i_{v1} = R_1 i_2 \quad \therefore V_1 = -R_1 i_2$$

同様に $\mathbf{t}_3, -\mathbf{t}_4$ の閉路について $\int_{AB} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_3 dl + \int_{BA} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot (-\mathbf{t}_4) dl = 0 \quad (2)$

$$\therefore \int_{AB} \frac{i_2}{\kappa_{R2}} \cdot \mathbf{t}_3 dl - \int_{AB} \frac{i_{v2}}{\kappa_{v2}} \cdot \mathbf{t}_4 dl = 0 \quad \therefore R_2 i_2 = R_{v2} i_{v2} \quad \therefore V_2 = R_2 i_2$$

このように同じ端子につないでも、電圧計の読みが異なるということが起こる⁽³⁾。

$\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ の閉路については、閉路の中で磁束が変化するため

$$\int_{BA} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_2 dl + \int_{AB} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_3 dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\therefore R_1 i_2 + R_2 i_2 = -\frac{d\phi}{dt}$$

が得られる。(1)でクーロン電界 \mathbf{E}_c の1周の線積分は0だから、その分を除き

$$\int_{BA} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_1 dl = \int_{BA} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_2 dl \equiv e_1$$

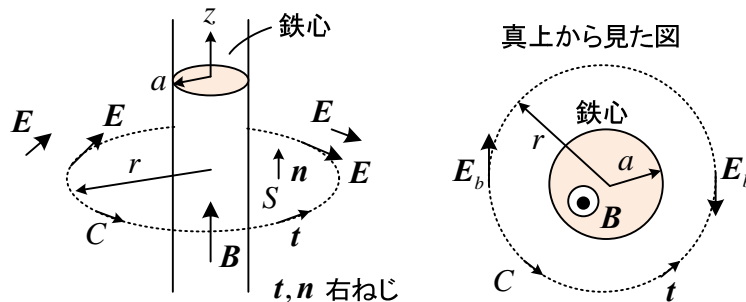
とおける。同様に e_2 を定義し、電池に置き換えて右図に示すように考えると、電気回路の問題として容易に解ける。同じ端子であっても、電圧計のリード線に起電力が隠れているのである。

R_2 の抵抗を取り除いた場合を考えると、電圧計の抵抗は大きいから電流は無視できて $V_1 = 0, V_2 = -d\phi/dt = e_1 + e_2$ となる。やはり電圧計の読みは異なる。

注意点として、一般に $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ であるが、鉄心の外では $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ だから $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ である。しかし、鉄心の外でも $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ にはならない。

例題 3 図のように z 軸方向（鉛直方向）に十分長い半径 a の円柱状の鉄心に一様に磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0 t)$ があり、時間と共に変化している (B_0 一定)。鉄心以外に磁界はないとする。

(1) 水平面で半径 r の円周上の点の電界を求めよ。



(解) 半径 r の円周上を周回する積分路を C とすると、④' のファラデーの電磁誘導の法則より

$$V_e = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

が成り立つ。電界の大きさは円周上では同じで、図に示す円の接線方向と考えられる。磁界は鉄心の中だけで、 E_t を \mathbf{E} の t 方向成分として、磁束 $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \pi a^2 B_0 t$ より

$$V_e = 2\pi r E_t = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \pi a^2 \quad \therefore E_t = -\frac{B_0 a^2}{2r}$$

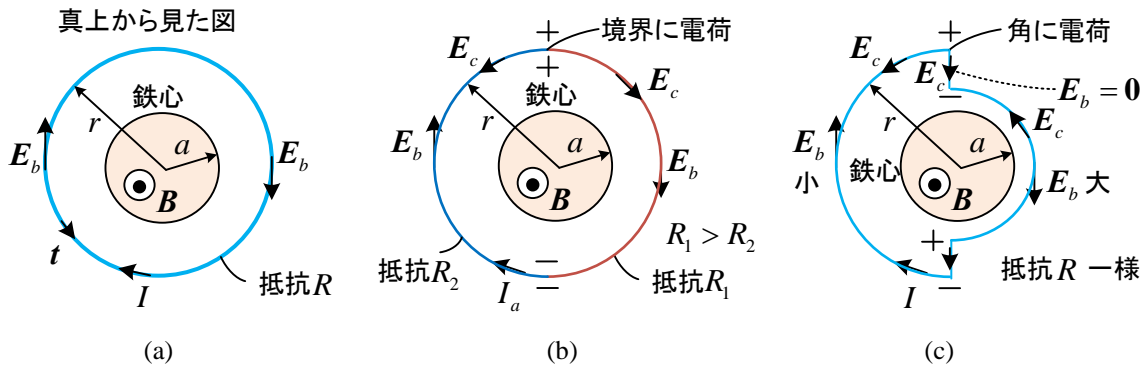
t と逆方向に誘導電界 \mathbf{E}_b が生じる。 V_e は t の向きに測った起電力である。④'を使うとき、 t と磁束を求める n は右ねじの関係に選ぶ必要がある。この場合クーロン電界はない。

(2) 図の各場合について、流れる電流を求めよ。なお流れる電流が作る磁界は無視する。また、(b),(c)の場合、流れる電流がどこでも等しくなる理由を説明せよ。

(a) 半径 r の円周上に一様な抵抗 R の導線を置いた場合。

(b) 半径 r の円周上に一様な抵抗 R_1 と一様な抵抗 R_2 をつないだ導線を置いた場合。

(c) 半径 r の円周上に一様な抵抗 R の導線を図のように置いた場合。



(解) (a) (1)の起電力を用い、流れる電流の大きさは $I = \frac{B_0 \pi a^2}{R}$

向きは誘導電界 \mathbf{E}_b と同じ向き。 \mathbf{B} の変化を打ち消すような電流が流れる。

この場合電荷は生じないので、クーロン電界はなく、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b$

(b) 回路の磁束は(1)と同じだから、起電力の大きさは変わらないので、電流の大きさは R_1, R_2 い

ずれも $I_a = \frac{B_0 \pi a^2}{R_1 + R_2}$ である。抵抗 R_1, R_2 に生じる誘導電界は等しい。オームの法則は⑧より

$\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b)$ であり、この場合には R_1, R_2 の境界に電荷が生じてクーロン電界ができる。電流が同じになるように、 R_1 では電界を強め、 R_2 では電界を弱める。

(c) 回路の磁束は(1)と同じだから、起電力の大きさは変わらないので電流の大きさは $I = B_0 \pi a^2 / R$ で(a)の場合と同じである。この場合には、誘導電界 \mathbf{E}_b が小さい箇所、大きい箇所、導線方向成分が0の箇所に分かれる。流れる電流はどこでも同じで、導線が折れ曲がる場所に電荷が生じてクーロン電界 \mathbf{E}_c ができて、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b$ の大きさを一定に保っている。

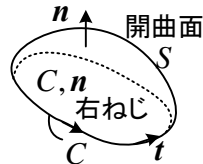
オームの法則は電界と電流の関係を定め、 \mathbf{i}, ρ をつなぐ電荷保存の法則⑩と ρ, \mathbf{E} をつなぐガウスの法則①を用いずとも解が得られている。なお、境界や角の電荷が時間的に変化している場合、キルヒホッフの電流則は厳密には成立しないが、周波数が高くないならその影響は無視できる。

○ 動く導体

第2章で、起電力は次式により計算できることを示した。

$$V_e = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\phi}{dt} \quad (4')$$

変圧器起電力 速度起電力



これまで、変圧器起電力を詳しく取り上げてきたが、本節では速度起電力についても考える。速度起電力に関するフレミングの右手の法則をここで再掲しておく。

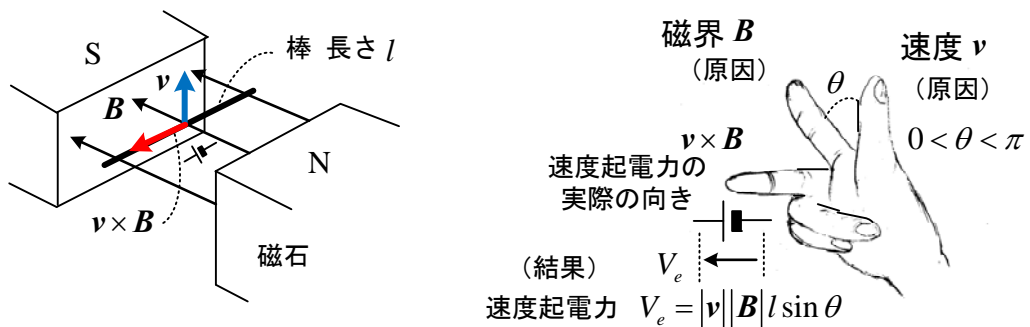


図 6-9 フレミングの右手の法則

(4)' の速度起電力は積分路 C の向きに測った値であるから負になることがある。しかし、図 6-9 に示す速度起電力 V_e はフレミングの右手の法則で実際の向きを求めているので正である。電気回路では、 V_e を図の向きの電圧として取り扱う。

一方、電流に働く力は

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} l \quad (6-24)$$

で与えられ、フレミングの左手の法則として知られている。図をもう一度示しておこう。

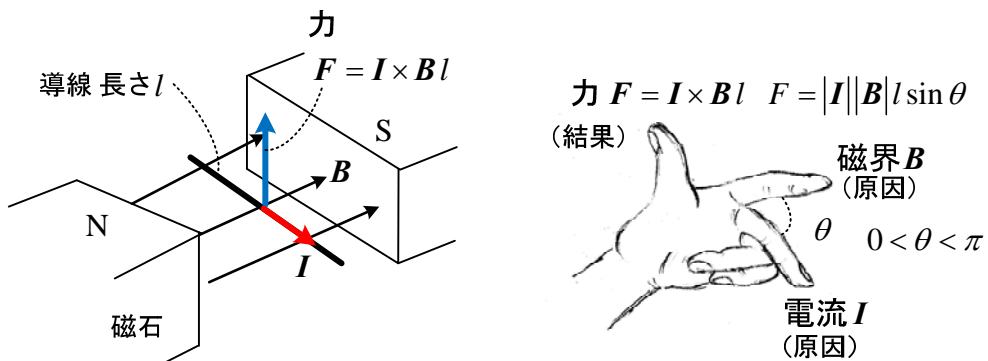
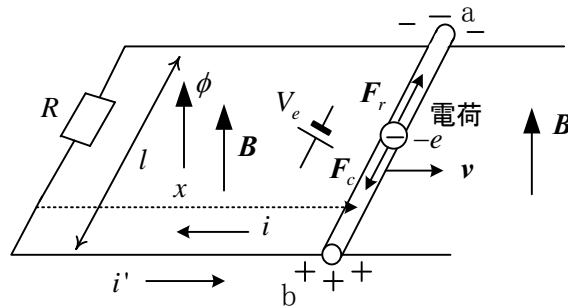


図 6-10 フレミングの左手の法則

例題 4 図の様に水平面の平行導体上に垂直に導体棒 ab がのせられ、接触しながら速度 v [m/s] で動いている。平行導体の間隔は l [m] とし、鉛直方向に一様に磁束密度 B [T] が加えられている。導体棒 ab の抵抗が R_0 [Ω] のとき流れる電流を求めよ。なお、導線に流れる電流による磁界は無視できるものとする。



(解) 導体棒 ab に生じる速度起電力はフレミングの右手の法則より、 $V_e = vBl$ である。ただし、 $v = |\mathbf{v}|, B = |\mathbf{B}|$ 。a 点より b 点の電位が高く、電流 i は図の向きに流れ

$$i = \frac{vBl}{R + R_0}$$

となる。

別解として、閉路に生じる起電力 V_e' を電磁誘導の法則から求めることもできる。(6-1)より

$$V_e' = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

となる。 V_e' を測る向きは、 ϕ を測る向き (\mathbf{B} の向き) に対して右ねじの回る向きなので、図に示す電流 i' を流そうとする向きである。よって、 $i' = V_e' / (R + R_0) = -vBl / (R + R_0) = -i$ となる。

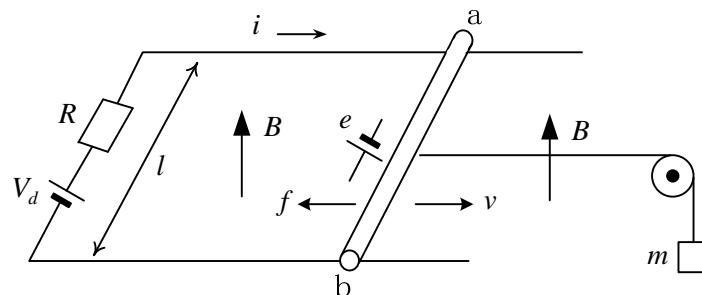
この問題は高校生でも容易に答えを出すであろう。また、以下のことも高校の教科書に書いてある。

導体棒 ab の中にある電子の電荷を $-e$ とする。これに $\mathbf{F}_r = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ のローレンツ力が働き、端子 a 付近に電子が多くなる。このために、端子 b 付近は $+$ に帯電する。これらの電荷の再配置によってクーロン電界 \mathbf{E}_c が b から a の向きにでき、このため電子に $\mathbf{F}_c = -e\mathbf{E}_c$ の力が働くことになる。内部抵抗 $R_0 = 0$ のとき、これらの力は釣り合う。すなわち、 $\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$ (力 0 で電子は等速運動する) で、 $\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ が成り立つ。何故なら、導体棒についてオームの法則より、 $\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ が成り立つが、内部抵抗を 0 としているので $\kappa = \infty$ だからである。 $\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ を線積分することで、電圧 V_{ba} が起電力 V_e と等しくなることが証明できる。電池やコイルでも同様のことを行ってきたので参照して欲しい。起電力を作る非クーロン電界が電池の場合は \mathbf{E}_e 、コイルの場合は \mathbf{E}_b 、動く導体の場合には $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ に変わっただけである。内部抵抗がある場合についても、電池やコイルを参照して欲しい。この場合 $\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c \neq \mathbf{0}$ である。

もし、上記の導体棒が絶縁した鉄棒の中にあつたら (線路と接触する部分は導体棒として)、 \mathbf{B} は鉄の中を通過して、導体棒の中をほとんど通らない。この結果導体棒の vBl は小さくなるが、外

部磁界 B_0 を使い起電力 $V_e = vB_0l$ として計算して構わない。鉄の中を B が通るとき、その付近の $\partial B / \partial t$ (変圧器起電力) が生じて、その分を考慮すると $V_e = vB_0l$ になるであろう。ファラデーの電磁誘導の法則 $e = -d\phi / dt$ がそんな場合でも成り立つからである。簡単ではあるが、恐るべしファラデーの電磁誘導の法則である。

例題 5 水平面の十分長い平行導体上に垂直に接触して導体 ab がのせられ、質量 m [kg] のおもりをつないだ滑車で引っ張る。平行導体の間隔は l [m] とし、垂直方向に一様に大きさ B [T] の磁束密度が加えられている。時間 $t = 0$ で導体 ab の速度 v [m/s] を 0 とし、その後の電流 i [A] と v を求めよ。但し、導体の質量や摩擦、導線や銅棒の抵抗は無視できるものとする。また電流による磁束は無視できるものとする。



(解) 導体の速度が v のとき、導体にはフレミングの右手の法則より起電力 e [V] が生じる。

$$e = vBl \quad [\text{V}]$$

($v > 0$ のとき、図の等価な電池の向きに起電力が生じる。銅棒の抵抗は 0 なので、 a 点に対する b 点の電圧は e [V] に等しい)

また、一方で、フレミング左手の法則により、力 f [N] が加わる。すなわち、

$$f = Bli \quad [\text{N}]$$

回路の式は、

$$V_d + e = Ri \quad \therefore V_d + vlB = Ri \quad (1)$$

おもりの運動方程式は、導体の質量が無視できるので、

$$m \frac{dv}{dt} = mg - f \quad \therefore m \frac{dv}{dt} = mg - Bli \quad (2)$$

(1)を(2)に代入して i を消去すると、

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{R} v = mg - \frac{BlV_d}{R} \quad (3)$$

右辺は一定である。 $t = 0$ で、 $v = 0$ として(3)を解くと

$$v = \left(\frac{Rmg}{B^2 l^2} - \frac{V_d}{Bl} \right) (1 - e^{-st}) \quad [\text{m/s}]$$

$$\text{但し、} s = \frac{B^2 l^2}{mR} > 0$$

(1)に代入して、

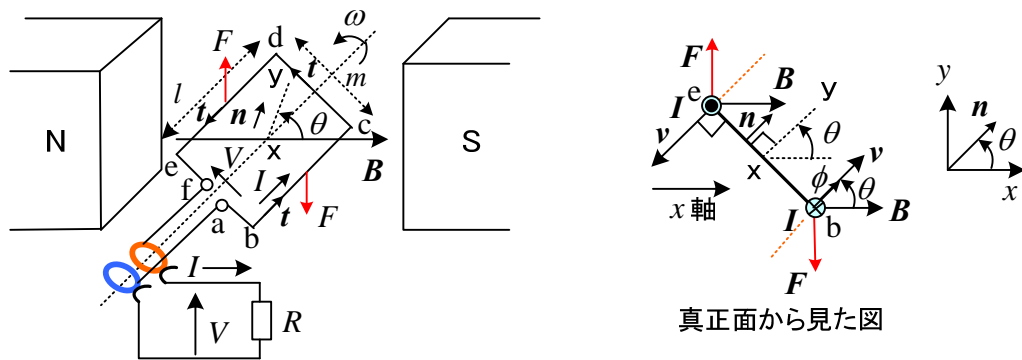
$$i = \frac{V_d}{R} + \left(\frac{mg}{Bl} - \frac{V_d}{R}\right)(1 - e^{-st}) = \frac{mg}{Bl} - \left(\frac{mg}{Bl} - \frac{V_d}{R}\right)e^{-st} \quad [\text{A}]$$

$t = \infty$ のとき, $i = \frac{mg}{Bl}$ で重力とつり合うように電流が流れる。このとき, $v = \frac{1}{Bl}(Ri - V_d)$

となり, V_d の大きさで動く向きが違ふ。 $Ri > V_d$ のとき, $v > 0$ で, 質量 m の物体に引っ張られ, その向きに動く。 $Ri < V_d$ のとき, $v < 0$ で, 質量 m の物体を持ち上げる。起電力 e も正, 負に変化し, V_d と e で質量に見合った電流を流すようになる。

例題 6 一定の磁束密度 $B[\text{T}]$ の磁界中で, abcdef の 1 回巻きのコイルを一定の角速度 $\omega[\text{rad/s}]$ で図の向きに外からの力によって回転させる。時間 $t=0$ で, 角度 $\theta=0$ とする。コイルには, 電磁誘導により電圧 $V[\text{V}]$ が生じる。但し, コイルの抵抗は 0 とする。

- (1) 図の向きに電圧 $V[\text{V}]$ の測定の向きを定義するとき, $V[\text{V}]$ を求めよ。 V は a 点を基準とした f 点の電位または a 点から見た f 点の電圧と言っても良い。また抵抗に流れる電流 I を求めよ。
- (2) コイル辺 bc, de に働くトルクを求めよ。
- (3) コイルを回すのに外力がする仕事と抵抗 R で消費される電力が等しいことを証明せよ。



(解) (1) 速度起電力を考える。④' で磁束密度は一定だから $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$ として

$$V = \int_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = \int_b^c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl + \int_d^e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = 2vBl \sin \theta$$

このようにコイル片 bc と de は磁束を切るように動くので起電力が生じる。コイル辺 ab, cd, ef では $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と \mathbf{t} の向きが 90 度だから, $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} = 0$ である。コイルの角速度は ω だから, その周辺速度 $v(\text{m/s})$ は, 半径を掛けて $v = m\omega/2$ となる。従って

$$V = Bml\omega \sin \theta$$

流れる電流は

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bml\omega \sin \theta}{R}$$

今度は, ファラデーの電磁誘導の法則で考えてみよう。コイルの面を通過する磁束 ϕ は

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = SB \cos \theta = mlB \cos \theta$$

角度 θ によって変化し、 $\theta=0$ のときが最も多く通過する。

V の測定の向きが、 ϕ の向きに右ねじを回してコイルをなぞり、その出口に矢がある向きだから、コイルの巻数 $N=1$ 、 $d\theta/dt=\omega$ に注意して

$$V = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blm \cos \theta) = Blm \frac{d\theta}{dt} \sin \theta = Blm \omega \sin \theta$$

となり、先の結果と一致する。 $d\theta/dt=\omega$ (一定) より $\theta=\omega t$ ($t=0$ で $\theta=0$) と表せる。

(2) 回転に関係のある力はコイル辺 de, bc のみである。 de の辺に働く力 F は上向きを正の向きとする

$$F = I \times B l = I B l$$

となる。電流に働くトルク (偶力) T_e は、 $-\mathbf{v}$ の向きを正の向きとして、半径 \times (力の $-\mathbf{v}$ 方向成分) だから、辺 de で考え、 bc の分で 2 倍して

$$T_e = F \frac{m}{2} \sin \theta \times 2 = m I B l \sin \theta$$

(3) 角速度が一定だから、外部からのトルク T_m (\mathbf{v} の向きを正の向きとする) とそれに反発する電流が作るトルク T_e は大きさが等しく、向きが逆でなければならない (そのような外力を加えないと速度は一定にならない)。よって $T_m = T_e$ である。

このとき、外力がする仕事率 P_{in} は

$$P_{in} = T_m \omega$$

である。一方、抵抗で消費される電力 P_{out} は

$$P_{out} = VI = BmlI\omega \sin \theta = T_e \omega = P_{in}$$

となる。

発電には、水力発電、火力発電、原子力発電、エンジン発電などがある。**発電機**の原理は簡単で、磁界の中でコイルを機械的に回転させる (またはコイルの中で磁石を回転させる) だけでよい。自転車のライトもこの原理である。電磁誘導の法則により、コイルに誘導起電力を発生させるのである。発電の違いは、何により回転させるかの違いで、火力発電ではボイラで蒸気を発生させタービンを回し、その力で発電機を回す。

例題 7 例題 6 で、磁束密度が $\mathbf{B} = (B_0 \sin \omega t, 0, 0)$ で変化するとき、電圧 V を求めよ。但し、図中の \mathbf{B} の向きを x 軸とする。

(解) まず、電磁誘導の法則より求めてみよう。 $\theta = \omega t$ だから、 $ml = S$ として

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = SB \cos \theta = SB_0 \sin \omega t \cos \omega t$$

よって、

$$V = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 S \sin \omega t \cos \omega t) = -\omega B_0 S \cos^2 \omega t + \omega B_0 S \sin^2 \omega t$$

今度は、変圧器起電力と速度起電力を使って求めてみよう。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0 \sin \omega t, 0, 0) = (\omega B_0 \cos \omega t, 0, 0), \quad \mathbf{n} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$$

を用いて、変圧器起電力は

$$V_1 = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\int_S \omega B_0 \cos^2 \omega t \, dS = -\omega B_0 S \cos^2 \omega t$$

となる。速度起電力は例題 6 で求めたように

$$V_2 = BS\omega \sin \theta = \omega B_0 S \sin^2 \omega t$$

これらの和は、 V に一致する。

例題 8 図のように一様な磁束密度 \mathbf{B} 中を、一定の角速度 ω で回転する導体円板が水平面にある。すり接触子でつながり静止した電圧計に現れる電圧を求めよ。ただし、円板の半径を a とする。

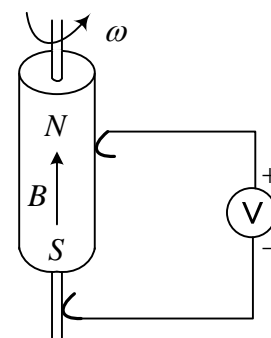
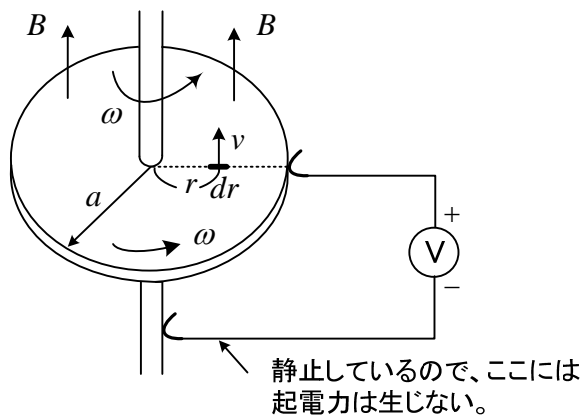


図 6-11 単極誘導

(解) 磁界中で動く物体には速度起電力が生じる。中心から r の点 dr の速度は $v = r\omega$ である。よって、 dr の部分に生じる起電力は、 $r\omega B dr$ となる。これを半径方向に 0 から a まで集めて、

$$V = \int_0^a r\omega B \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 \omega B \right]_0^a = \frac{1}{2} a^2 \omega B$$

この起電力が電圧計の読みとなる。

単極誘導：図 6-11 の様に棒磁石を軸の周りに角速度 ω で回転した場合にも、すり接触子でつながった起電力が生じ電圧計（静止）の針が振れる。磁界を作る原因が何であってもつまり自分で作った磁界であっても、磁界中を物体が動くとき磁石に速度起電力が生じるのである。この電圧は、例題 8 と同じ値である。磁界が磁石と同じ速度で回転すると考えてはいけない。

図 6-12 の様に導体円板を回転させるかわりに円柱磁石だけを角速度 ω で回転させると電圧計は振れるだろうか？答は“振れない”である。速度起電力の速度 v は、静止座標系に対する物体の速度で、磁石との相対速度ではない。従って、この場合には磁石の回転があっても \mathbf{B} は全く

変化せず、円板にとっては磁石が回転していない場合と変わらない。また、磁石を固定し導体円板と電圧計を一緒に回転させた場合にも電圧計は振れない。これは、すり接触子と電圧計を結ぶ導線にも起電力を生じ、打ち消すため、電圧計に電流が流れないためである。

以上のように磁界は磁石に固定されているのではなく、空間の物理的状態として認識されなければならない。

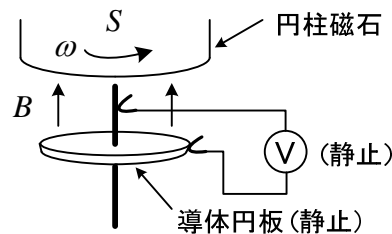


図 6-12 磁石のみ回転

○ キルヒホッフの法則

これまでに、回路を構成する素子を全て紹介したので、キルヒホッフの法則がどのように導かれるか図 6-13 の場合を例にとり述べておく。銅棒の速度 \mathbf{v} は外力によって時間とともに正負に変化し（交流電源を模擬して）、このため回路を流れる電流 \mathbf{i} も時間の関数であるとする。ただし、磁束密度 \mathbf{B} は鉛直方向で一定とする。 R_e, R_L, R_v は内部抵抗である。

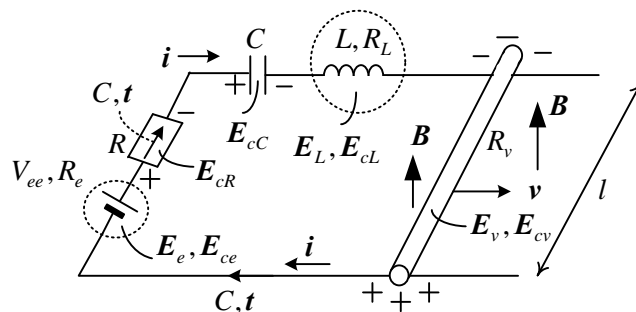


図 6-13 キルヒホッフの電圧則

まず、電荷が作るクーロン電界 \mathbf{E}_c は、空間の至るところに存在する。これを図の各素子を含む空間の領域に分けて、次式で表す。

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_{cr} + \mathbf{E}_{cc} + \mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_{cv} \quad (6-25)$$

ここで、 \mathbf{E}_{cr} は素子をつなぐ導線の部分も含むとする。空間の境界を厳密に分ける必要はなく、まとめて \mathbf{E}_c としてもよいが、判り易くするため領域を分けている。一方、非クーロン電界は、電池の中に \mathbf{E}_e 、コイルに \mathbf{E}_L （誘導電界）、銅棒に $\mathbf{E}_v = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が生じる。 \mathbf{E}_e と $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は等価な電界で電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_L$ には入らない。これらをまとめて

$$\mathbf{E}_{nc} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_v \quad (6-26)$$

と表す。以上をまとめて

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc} \quad (6-27)$$

と書く。 \mathbf{E}_{all} を電流が流れている素子や導線の中を1周する積分路で周回積分する。コンデンサの極板間には電流は流れていないが、ここも積分路とする。すると、クーロン電界の線積分は1周すると0だから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} (\mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \mathbf{E}_{cR} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_3} \mathbf{E}_{cC} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} (\mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_L) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} (\mathbf{E}_{cv} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl \\ &= \int_{C_1} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl \end{aligned} \quad (6-28)$$

つまり右辺には \mathbf{E}_{nc} の線積分だけが残る。左辺で、コンデンサ以外は、オームの法則を用いて

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{C_1} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_e} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_3} \mathbf{E}_{cC} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_L} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_v} \cdot \mathbf{t} dl \\ &= R_e I + RI + V_c + R_L I + R_v I \end{aligned}$$

右辺は、起電力の和であり

$$\text{右辺} = V_{ee} + V_{eL} + V_{ev}$$

となる。従って、

$$(V_{ee} - R_e I) + (V_{eL} - R_L I) + (vBl - R_v I) = RI + V_c \quad (6-29)$$

電池 コイル 銅棒 抵抗 コンデンサ

となり、キルヒホッフの電圧則が得られる。内部抵抗 R_e, R_L, R_v が0ならその項はない。以上において、以下の現象は影響が小さいとして無視している。

- (1) 流れる電流によって、コイル以外にも磁界を生じる。磁界が時間変化すると誘導電界を生じる。従って、導線、抵抗などにもインダクタンスがある。
- (2) コンデンサ極板の電束密度の時間変化（変位電流）は磁界を発生し、コンデンサ内に誘導電界を発生する。
- (3) 導線及び各素子の間（空气中）には電界があり、等価的なコンデンサを形成する。

これらの影響は、電圧や電流の周波数が大きくなるほど大きくなる。この場合の解析については、第7章で述べる。

次に、キルヒホッフの電流則について述べる。

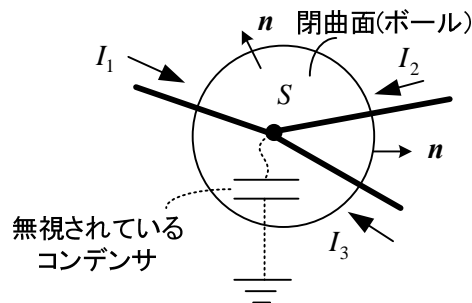


図 6-14 キルヒホッフの電流則

図 6-14 で、キルヒホッフの電流則は次式で与えられる。

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (6-30)$$

これは、①の電荷保存の法則から導かれる。

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ガウスの定理を閉曲面 S に適用すると

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad (6-31)$$

を得る。閉曲面 S 内に電荷の時間変化がなければ、左辺第 2 項は 0 となる。このとき

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = -I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (6-32)$$

が成立し、キルヒホッフの電流則が成り立つ。すなわち、 $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$ から導かれる。

キルヒホッフの電流則が成立しなくなる場合は、例えば、等価的に導線と大地間にわずかな容量のコンデンサ(浮遊容量という)があつて、導線の表面に電荷が貯まることが考えられる。すると、(6-31)の左辺第 2 項は 0 とならず、キルヒホッフの電流則は成り立たない。もちろん、この等価なコンデンサを考慮して回路を考え、コンデンサ電流も加味すればキルヒホッフの電流則は成り立つ。しかし、このようなコンデンサを考慮した回路は容易には得られないだろう。浮遊容量の影響は、コンデンサのインピーダンスが小さくなる高周波において大きくなる。この点についても、第 7 章で述べる。

以上のように普通の電気回路は、比較的周波数の低い領域で利用できるものである。とは言つても、その周波数は MHz 程度まで可能であろう。50Hz や 60Hz の商用周波数では問題なく利用できる。周波数の高い場合の電気回路は、分布定数回路として取り扱うことができる。これについても第 7 章で述べる。

○ 表皮効果

図 6-15 に示すように半径 a の長い円柱導体に交流電源をつないで電流を流すと、電流密度は導体表面に近いほど大きくなる。これを**表皮効果**(skin effect)と言う。この現象を解析しよう。断面図に示すように $\mathbf{H} = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}$ の円柱座標系を用いる。

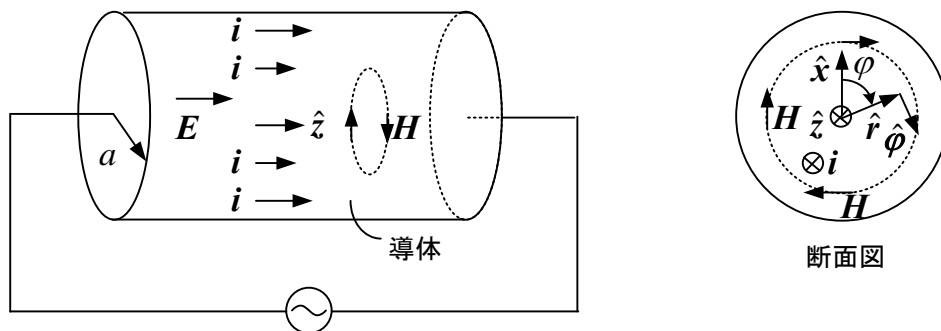


図 6-15 表皮効果

(付 21)を用い、対称性より \mathbf{H} は ϕ 成分 H_ϕ しかなく、 z が変化しても \mathbf{H} は同様だから $\partial/\partial z = 0$ と

おけるので

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \hat{z}\end{aligned}\quad (6-33)$$

となる。電流については、 z 成分しかないのでオームの法則より

$$\mathbf{i} = i_r \hat{r} + i_\varphi \hat{\varphi} + i_z \hat{z} = \kappa E_z \hat{z} \quad (6-34)$$

と表せる。従って、 $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$ より次式が得られる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \kappa E_z \quad \therefore \frac{1}{r} H_\varphi + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} = \kappa E_z \quad (6-35)$$

次に、 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ において、電流は z 成分しかないので、導体中ではオームの法則より電界

も z 成分 E_z しかないと考えられ、 φ が変化しても \mathbf{E} は同様だから $\partial/\partial\varphi = 0$ とおけるため

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{z} \\ &= -\frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{\varphi}\end{aligned}\quad (6-36)$$

となる。従って、次式が得られる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \quad (6-37)$$

ここで、交流電源が接続され時間が十分経過した定常状態を考えると、電界や磁界も電源と同じ周波数で変化していると考えられるので、回路で行ったようにフェーズ表示を用いることが可能となる。 $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ と置き換えるだけで、変数から時間の項を除去できる。この結果(6-35), (6-37)より

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \dot{H}_\varphi + \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial r} &= \kappa \dot{E}_z \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} &= j\omega \mu \dot{H}_\varphi\end{aligned}$$

がえられる。これらの式より、 \dot{H}_φ を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = j\omega \kappa \mu \dot{E}_z$$

\dot{E}_z は r だけの関数なので、偏微分を常微分に置き換えて良い。よって

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{E}_z}{dr} = j\omega \kappa \mu \dot{E}_z \quad (6-38)$$

これはベッセルの微分方程式とよばれている。ここでは、 r が比較的大きく左辺の第 2 項を無視した次式の解を求めよう。

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dr^2} = j\omega\kappa\mu \dot{E}_z \quad (6-39)$$

特性方程式の根は、 $s^2 = j\omega\kappa\mu$ より、 $s = \pm\sqrt{j\omega\kappa\mu}$ である。

$$\sqrt{j} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

だから、 $s = \pm\left(\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}\right) = \pm(k + jk)$ とおくと

$$\dot{E}_z = K_1 e^{(k+jk)r} + K_2 e^{-(k+jk)r} \quad (6-40)$$

となる。 r が比較的大きい場合には、右辺第 1 項が求める解である。 $r = a$ のとき、 $\dot{E}_z = E_m$ (実数) と仮定すると

$$E_m = K_1 e^{(k+jk)a} \quad \therefore K_1 = E_m e^{-(k+jk)a}$$

よって

$$\dot{E}_z = E_m e^{(k+jk)(r-a)}$$

瞬時値は $e^{j\omega t}$ を掛けて虚部をとり

$$E_z = E_m e^{-k(a-r)} \sin(\omega t - k(a-r)) \quad (6-41)$$

電流密度は次式で表せる。

$$i_z = \kappa E_m e^{-k(a-r)} \sin(\omega t - k(a-r)) \quad (6-42)$$

導体表面 ($r = a$) に比べ、導体中は電流密度が減衰し、位相も遅れることが分る。

$$\delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}} \quad (6-43)$$

は**表皮の厚さ**とよばれている。高周波になると、 δ が小さくなり、電流は導体表面に集中する。

○ 緩慢に変化する現象のベクトルポテンシャルによる解析

図 6-16 に示すように動く金属板の電磁界をベクトルポテンシャルを用いて解析する。本テキストでは基本式のみ紹介する。図 6-16 はリニア誘導電動機を簡単にモデル化している。固定したコイルに既知の強制電流 i_0 を流す。 i_0 は交流電流で、この電流によって移動磁界 B (等価的に磁石を左から右へ動かしたときにできる磁界) を作ることができる。この磁界が金属板を通過すると、電磁誘導の法則で金属板に**うず電流**(eddy current)が流れる。移動磁界とうず電流により金属板に右方向の力が働いて速度 v で動くことになる。これが誘導電動機の原理である。

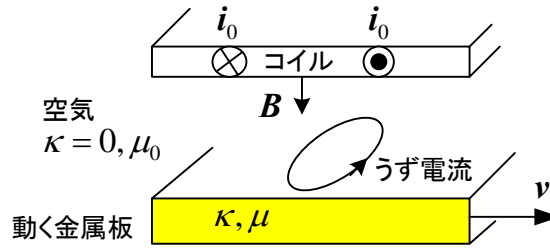


図 6-16 動く金属板の電磁界

変位電流を無視するとき，電流による磁界は一般に③と⑧より

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6-44)$$

電界は，(2-26)で述べたようにクーロン電界と誘導電界の和として次式で表される。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

(2-25)より，ベクトルポテンシャルから磁束密度が求められる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

これらの式を用い，(6-44)を \mathbf{A}, V の式にすると (⑦も使用)

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu \mathbf{i}_0 + \mu \kappa \left(-\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

が得られる。ここで，(付 13)の

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を用いると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{i}_0 + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \mu \kappa V) \quad (6-45)$$

となる。①については，⑥を用い

$$\varepsilon \text{div} \left(-\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

である。ここで(付 13)の

$$\text{div}(\text{grad}V) = \nabla^2 V$$

を用いると，次式が得られる。

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (6-46)$$

ここで， \mathbf{A} ， V に次式のローレンツゲージを課す。

$$\text{div} \mathbf{A} + \mu \kappa V = 0 \quad (6-47)$$

このとき(6-45)，(6-46)は次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu\kappa \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{i}_0 \quad (6-48)$$

$$\nabla^2 V - \mu\kappa \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (6-49)$$

これは、(2-34)，(2-35)で、速度起電力を考慮し、変位電流を無視したときの式である。

(6-48)は、領域ごとに以下の式が成立つ。

空气中： $\kappa = 0, \mu = \mu_0, \mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (6-50)$$

動く金属板中： $\kappa = \kappa, \mu = \mu, \mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu\kappa \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (6-51)$$

基本的には、(6-50)，(6-51)を第2章で述べた境界条件を考慮して解くことで、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求めることになる。強制電流 \mathbf{i}_0 は面電流密度として境界条件に考慮できる。 \mathbf{A} が決まると他の量が求められる。この場合も例題3のように金属板に流れる電流と連続の式でつながる電荷分布が不明でも解は得られるであろう。すなわち(6-49)は解がなくてもよいであろう。

(6-44)や(6-48)は全空間をまとめた式で、空間の領域ごとに式が異なることを再認識してもらいたい。



ちよと一言

物体とは微視的には真空中に分布する点電荷の集まりであり、電磁界はどんな場合でも真空中を考えればよい⁽²⁰⁾。このとき、電界 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} が本質的な量で、分極 \mathbf{P} と磁化 \mathbf{M} を使って電束密度 \mathbf{D} と磁界 \mathbf{H} が定義される。よって本来 \mathbf{B} を磁界とよぶべきだが、一度定着した名前はなかなか変えられない。これは **EB 対応** とよばれ、古くからあったのが **EH 対応** である。**EH 対応** では磁石に働く力から磁界 \mathbf{H} を定義していた。

これに関して筆者の考えを述べておこう。誘電体や磁性体を考えるとき、分極 \mathbf{P} と磁化 \mathbf{M} を用いて、 \mathbf{D} と \mathbf{H} を定義するのが正当とは思いますが、 \mathbf{P} と \mathbf{M} を新たに登場人物に加えて詳しく説明すると話が複雑化し、何が大切かの焦点がぼやけてこよう。実際によく利用されているは $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ で記述されたマクスウェルの方程式であるから、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ のマクスウェルの方程式よりスタートし、分極と磁化は誘電率や透磁率を使って簡単に述べることで、入門としては良いのではないかと思う。また電界と磁界の類似性に関し **EH 対応** が分かりやすく、本テキストでも随所にこの考え方を取り入れているが、理論のスタートとしてはやはり $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ のマクスウェルの方程式が統一的かつ実用的と思う。