



Title	電気回路から見た電磁気学
Author(s)	辻, 峰男
Citation	電気回路から見た電磁気学; 2019
Issue Date	2019-03
URL	http://hdl.handle.net/10069/38873
Right	

This document is downloaded at: 2019-09-20T18:45:41Z

第7章 電磁波 -空間に分布した回路-

この章では電磁波について考える。このためにはマクスウェルの方程式を一応全部使って問題を解く必要がある。式がたくさん出て難しく感じるかもしれないが、本テキストでは基本的な問題しか扱わないので食わず嫌いにならないでほしい。電磁波を考える場合、電気回路（分布定数回路）による解法も利用可能である。もちろんマクスウェルの方程式には及ばないが、線路を使った通信で重要な TEM 波では大いに役に立つ。本テキストでは、電気回路による解法とマクスウェルの方程式による解法を比較して述べることで、電磁波の基本が理解できるように解説しよう。導波管や空間に飛び出す電磁波に関しては、TEM 波のように回路理論で解析できないが、これまでの学習の頂点にあるので、マクスウェルの方程式による解析を示す。

○ 電気回路の基本式

平行2線の線路を考える。

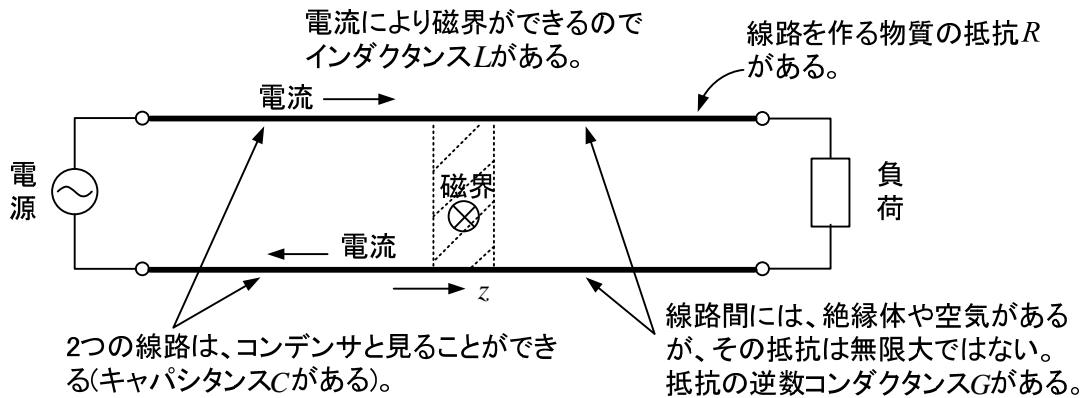


図 7-1 電線やケーブルはどんな素子で表せるか？

これまでの電線では、上記の R 、 L 、 C 、 G は全て無視し、 0 と考えていた。電源からの座標を z とし、短い区間 Δz をとると、その間の等価回路は図のように考えられる。

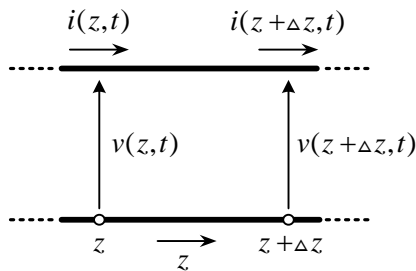


図 7-2 微小区間の電圧，電流

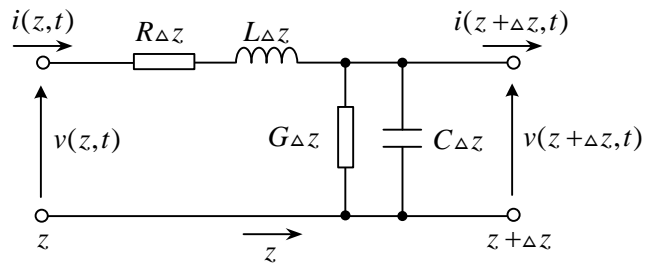


図 7-3 等価回路

抵抗は線路の長さに比例するが、 1m に換算した抵抗を（往復分） $R [\Omega / \text{m}]$ とすると、微小区間

Δz では、 $R_{\Delta z}$ となる。インダクタンスも長さに比例し、1m 当りのインダクタンス（往復分） L [H/m]とすると、 Δz 間では $L_{\Delta z}$ となる（付録参照）。静電容量も長さに比例し、1m 当り C [F/m]とすると、 Δz 間では $C_{\Delta z}$ となる。線路間の絶縁抵抗は長さに反比例するが、その逆数であるコンダクタンスは長さに比例し、1m 当り G [S/m]とすると、 Δz 間では $G_{\Delta z}$ となる。これにより、図の等価回路が書ける。電圧や電流が時間 t だけの関数ではなく位置 z の関数にもなっているのは、等価回路から判るように場所によって値が異なるからである。このような回路は**分布定数回路** (distributed constant circuit)と呼ばれる。

テイラーの定理より

$$i(z+\Delta z, t) = i(z, t) + \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \Delta z \quad (7-1)$$

$$v(z+\Delta z, t) = v(z, t) + \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \Delta z \quad (7-2)$$

となる。等価回路より、

$$v(z, t) = R_{\Delta z} i(z, t) + L_{\Delta z} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + v(z+\Delta z, t) \quad (7-3)$$

(7-2)を用いて、

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \Delta z = R_{\Delta z} i(z, t) + L_{\Delta z} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

Δz で割り

$$\boxed{-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = R i(z, t) + L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}} \quad (7-4)$$

電流については、等価回路より

$$i(z+\Delta z, t) = i(z, t) - G_{\Delta z} v(z+\Delta z, t) - C_{\Delta z} \frac{\partial v(z+\Delta z, t)}{\partial t}$$

(7-1), (7-2)を代入して、 Δz^2 の項は無視すると

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \Delta z = -G_{\Delta z} v(z, t) - C_{\Delta z} \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Δz で割り

$$\boxed{-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = G v(z, t) + C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}} \quad (7-5)$$

(7-4), (7-5)は、分布定数回路の出発点となる。1次元空間でのモデルになる。

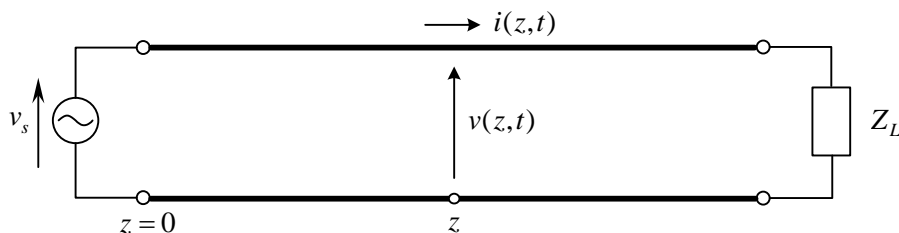


図 7-4 分布定数回路（線路）に交流電源を接続

図 7-4 の電源電圧を $v_s(t) = V_s \sin \omega t$ とすると、電源から $z[\text{m}]$ 離れた点の電圧 $v(z,t)$ 、電流 $i(z,t)$ は、定常状態では次式で表される。

$$v(z,t) = V_m(z) \sin(\omega t + \theta_v(z)) \quad (7-6)$$

$$i(z,t) = I_m(z) \sin(\omega t + \theta_i(z)) \quad (7-7)$$

すなわち、場所によって振幅や位相は異なるが、電源と同じ周波数の正弦波である。分布定数回路も一定の R, L, C, G が集まってできた回路であるから、交流電源がつながった定常状態では一般の交流回路と同様と考えてよいであろう。(7-6)、(7-7)に対するフェーザを

$$\dot{V}(z) \equiv V_m(z) e^{j\theta_v(z)} \quad (7-8)$$

$$\dot{I}(z) \equiv I_m(z) e^{j\theta_i(z)} \quad (7-9)$$

と定義する。通信関係では $\sqrt{2}$ で割らない形で定義することが多い。場所によってフェーザが異なることに注意しよう。各回路素子が場所になったのである。フェーザから瞬時値を求めるには、

$$v(z,t) = \text{Im}(\dot{V}(z) e^{j\omega t}) \quad (7-10)$$

$$i(z,t) = \text{Im}(\dot{I}(z) e^{j\omega t}) \quad (7-11)$$

ここで、 $\text{Im}()$ は虚部を意味する。(7-6)、(7-7)を \cos で表すと、実部(Re)をとれば良く、以下の理論は同じである。

(7-10)、(7-11)を(7-4)、(7-5)に代入すると、次式のフェーザ表示式が得られる。このとき、 $\partial/\partial z$ はフェーザが z のみの関数だから d/dz 、 $\partial/\partial t$ は時間に関する偏微分なので $j\omega$ が掛けられる。

$$-\frac{d\dot{V}(z)}{dz} = R\dot{I}(z) + j\omega L\dot{I}(z) \quad (7-12)$$

$$-\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = G\dot{V}(z) + j\omega C\dot{V}(z) \quad (7-13)$$

例えば、 $\text{Im}(-\frac{\partial \dot{V}(z)}{\partial z} e^{j\omega t}) = \text{Im}(R \dot{I}(z) e^{j\omega t}) + \text{Im}(L \frac{\partial}{\partial t} (\dot{I}(z) e^{j\omega t}))$ が任意の t で成り立つことから得られる。

一方の式を z で微分し、他方の式を代入すれば

$$\frac{d^2 \dot{V}(z)}{dz^2} = \gamma^2 \dot{V}(z) \quad (7-14)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}(z)}{dz^2} = \gamma^2 \dot{I}(z) \quad (7-15)$$

$$\text{ただし、} \gamma \text{ (ガンマ) は、} \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (7-16)$$

(7-14)を解くと、特性方程式は $p^2 = \gamma^2 \quad \therefore p = \pm \gamma$ だから

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} \quad (7-17)$$

(7-17)を(7-12)に代入して、

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) \quad (7-18)$$

となる。 A, B は線路両端の条件による決る定数（一般に複素数）である。ここで、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega] \quad (7-19)$$

Z_0 は**特性インピーダンス**(characteristic impedance), γ は**伝搬定数**(propagation constant)と呼ばれる。

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \alpha \geq 0 \quad (7-20)$$

において、 α を**減衰定数**(attenuation constant), β を**位相定数**(phase constant)と呼ぶ。(7-16)の両辺を2乗して、実部と虚部を等しいとおくことにより次式が得られる。

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (7-21)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (7-22)$$

(7-17), (7-18)は、分布定数回路の基本となる重要な公式である。実際の瞬時値は、(7-10), (7-11)に代入して求まる。

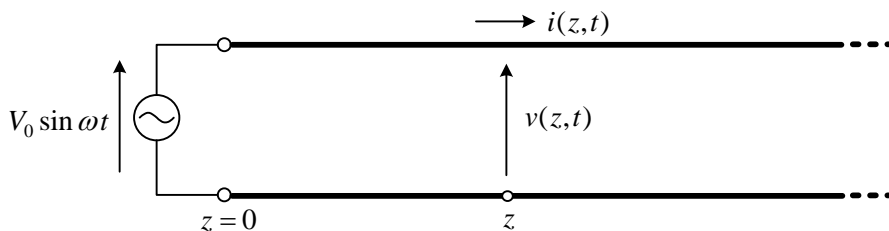
$$\begin{aligned} v(z, t) &= I_m(\dot{V}(z)e^{j\omega t}) \\ &= I_m((Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z})e^{j\omega t}) \\ &= I_m(Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}) + I_m(Be^{\alpha z}e^{j(\omega t + \beta z)}) \end{aligned} \quad (7-23)$$

第1項は z が増加する方向に進む波、第2項は逆に z が減少する方向に進む波を表し、一般にはこれらの波を加え合わせたものとなる。一般に、 A, B は複素数なので、注意すること。

電流については、第1項、第2項とも特性インピーダンス Z_0 で割ることで得られる。第2項のマイナスについては、第2項が電流の矢印の方向と逆方向に進むことに対応している。

例題 1 図の半無限長線路で、 z 点の電圧と電流を求めよ。

但し、特性インピーダンス Z_0 、伝搬定数 $\gamma = \alpha + j\beta$ ($\alpha > 0$)とする。



(解) $v(z,t)$ のフェーザ $\dot{V}(z)$ は次式で与えられる。

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} = Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + Be^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (1)$$

一般に波源が有限の領域にある場合は、無限遠では外向きの波しか存在しない**放射条件**がある。この場合、電源は限られた領域にあるから、 z が負の向きに伝搬する波はなく、 $B=0$ でなくてはならない。よって、(1)より、

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z}$$

境界条件として、 $z=0$ で、 $\dot{V}(0) = V_0$ (実数) だから、 $A = V_0$

$$\therefore \dot{V}(z) = V_0 e^{-\gamma z} = V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (2)$$

電流は、

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3)$$

(2)より、

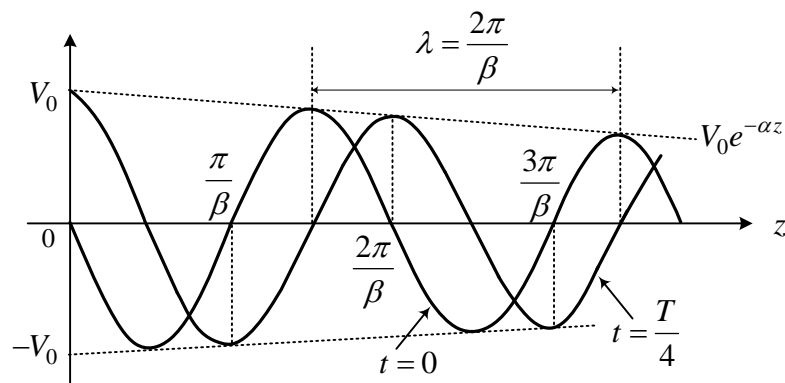
$$v(z,t) = I_m (\dot{V}(z) e^{j\omega t}) = I_m (V_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}) = V_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \quad (4)$$

(3)より、

$$\begin{aligned} i(z,t) &= I_m (\dot{I}(z) e^{j\omega t}) \\ &= \frac{V_0}{|Z_0|} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z - \arg Z_0) \quad \because Z_0 = |Z_0| e^{j\arg Z_0} \end{aligned} \quad (5)$$

$t=0$ のとき、 $v = -V_0 e^{-\alpha z} \sin \beta z$

$t = \frac{T}{4}$ のとき、 $v = V_0 e^{-\alpha z} \sin(\frac{\pi}{2} - \beta z) = V_0 e^{-\alpha z} \cos \beta z$



$V_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z)$: z の正方向へ進む波

図 7-5 進行波(travelling wave)

$\sin(\omega t - \beta z)$ について

- ある点 $z = z_0$ では, $\sin(\omega t - \beta z_0)$ \therefore 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (時間について, 正弦波)
- ある時間 $t = t_0$ では, $\sin(\omega t_0 - \beta z)$ \therefore 波長 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ (場所について, 正弦波)
- 図より, 時間が $T/4$ 変わると, 波は z 方向に $\lambda/4$ 進んでいる。

よって, 波の速度 v_p は**位相速度**(phase velocity)と呼ばれ,

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{\beta} \quad (7-24)$$

となる。 $\omega t - \beta z = \text{一定}$ なら \sin の値が変化しないから, 両辺を t で微分して,
 $\omega - \beta dz/dt = 0$ より求めても良い。

$v_p = c$ (真空中の光速) とすると, $f = 1\text{MHz}$ のとき $\lambda \approx 30 \times 10^7 / 10^6 = 300\text{m}$ となる。
 $f = 1\text{MHz}$ 程度以下なら, 1m 以内で回路を作る場合, 線路での位相はほぼ等しい。

無損失線路

$R = G = 0$ の場合, 損失が無いので無損失線路と呼ばれる。

$$\text{伝搬定数 } \gamma = \sqrt{j\omega C \cdot j\omega L} = j\omega\sqrt{LC} \quad \therefore \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (7-25)$$

$$\text{特性インピーダンス } Z_0 = \sqrt{L/C}, \text{ 位相速度 } v_p = 1/\sqrt{LC} \quad (7-26)$$

従って, (4), (5)より

$$\begin{aligned} v(z,t) &= V_0 \sin\{\omega t - \omega\sqrt{LC}z\} \\ i(z,t) &= V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\{\omega t - \omega\sqrt{LC}z\} \end{aligned} \quad (7-27)$$

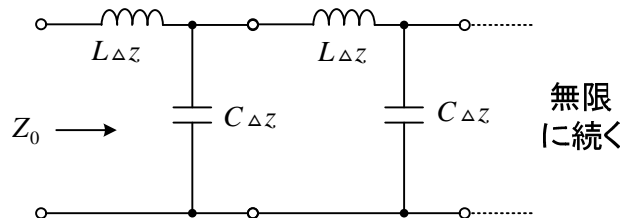


図 7-6 無損失線路

このことから, どの点においても, それから右側に純抵抗 $\sqrt{L/C}$ があるとした電流が流れる。実際には抵抗は無いが, L と C が無限につながっているので, そこにエネルギーが蓄えられていくと考えられる。 $LC\Delta z^2$ の項を無視すると特性インピーダンスは反復インピーダンスに等しい。

○ 電磁波の基本式

出発点となるのは以下の式である。

$$\text{電荷保存の法則} \quad \operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{0}$$

$$\text{ガウスの法則} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \textcircled{1}$$

$$\text{磁束の保存則} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{アンペア・マクスウェルの法則} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \textcircled{3}$$

$$\text{ファラデーの法則} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \textcircled{4}$$

$$\text{物質の式} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \textcircled{6}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \textcircled{7}$$

$$\mathbf{i}_c = \kappa \mathbf{E} \quad \textcircled{8}$$

⑧において、動く物体や電池は考えないことにする。また、伝導電流 \mathbf{i} を強制電流 \mathbf{i}_0 とそれ以外 \mathbf{i}_c に分ける。強制電流は問題を解く場合に既に分かっている電流と考えればよい。すなわち

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_c \quad (7-28)$$

また、この章の電磁波の解析において、以下の仮定(1)を設ける。

仮定(1) ε, μ, κ は考える空間で一定の定数とする。すなわち均質媒質を考える。

電荷密度 ρ は、電流に合わせて

$$\rho = \rho_0 + \rho_c \quad (7-29)$$

と分解できる。すなわち、

$$\operatorname{div} \mathbf{i}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{i}_c + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0 \quad (7-30)$$

③の rot をとり、④～⑧, (7-28) を用いて

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-31)$$

を得る。④の rot をとり、③～⑧, (7-28) を用いて次式を得る。

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} \quad (7-32)$$

一般に、(付 13) より、 $\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$ (∇^2 の定義) だから、(7-31) より、② を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-33)$$

x, y, z 直角座標系では、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H} = & \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) \hat{y} \\ & + \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \hat{z}\end{aligned}\quad (7-34)$$

となるが、円柱座標，球座標では定義より計算しないといけない。(7-32)より，①を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho \quad (7-35)$$

導電性の物体を考えない場合には， $\kappa = 0$ と置けばよく，⑧より $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$ で，(7-30)より ρ_c は定数となる。よって，

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho_0 \quad (7-37)$$

となる。さらに，強制電流 \mathbf{i}_0 とそれに伴う電荷 ρ_0 がない空間を考える場合には(\mathbf{i}_0, ρ_0 はどこかにはあるが)，次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-38)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-39)$$

この形の偏微分方程式は**波動方程式**と呼ばれている。

さらにこの章では次の仮定を設けて，電磁波で良く利用されるフェーザ表示の式を導こう。

仮定(2) 電磁波を作る原因となるのが，電荷密度 ρ_0 と強制電流 \mathbf{i}_0 である。これらは角周波数 ω の正弦波とする。

仮定(3) 回路で言うところの定常状態にあり，全ての量が時間的に角周波数 ω の正弦波であるとする。つまり電源のスイッチを入れた後の過渡現象は考えない。

仮定(2),(3)の結果，電気回路の交流理論(**フェーザ表示**)と同じことができる。空間の各点ごとにフェーザ表示が異なることに注意しなければならない。これは回路素子ごとに電圧や電流のフェーザが異なるのと同じである。電圧や電流が電界や磁界になったと思えばよい。前節でも述べたことであるが，③を例にとり説明しよう。まず，任意の (x, y, z) 点において

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = (H_x(x, y, z, t), H_y(x, y, z, t), H_z(x, y, z, t)) \quad (7-40)$$

ここで， $H_x(x, y, z, t) = H_{xm}(x, y, z) \sin(\omega t + \theta_{hx}(x, y, z))$

$H_y(x, y, z, t) = H_{ym}(x, y, z) \sin(\omega t + \theta_{hy}(x, y, z))$

$H_z(x, y, z, t) = H_{zm}(x, y, z) \sin(\omega t + \theta_{hz}(x, y, z))$

$H_{xm}(x, y, z), H_{ym}(x, y, z), H_{zm}(x, y, z)$ は振幅で、いずれも正または0と書ける。(7-6),(7-7)の**3次元への拡張**である。sinの代わりにcosで表してもよい。**フェーザ表示**(ドットをつける)を次式で定義する。(7-8)と同じように実効値ではなく振幅で定義する。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}(x, y, z) &= (\dot{H}_x(x, y, z), \dot{H}_y(x, y, z), \dot{H}_z(x, y, z)) \\ &= (H_{xm}(x, y, z)e^{j\theta_{hx}(x, y, z)}, H_{ym}(x, y, z)e^{j\theta_{hy}(x, y, z)}, H_{zm}(x, y, z)e^{j\theta_{hz}(x, y, z)})\end{aligned}\quad (7-41)$$

$\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)$ から実際の $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ を求める場合には

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{I}_m\{\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-42)$$

とすればよい。 \mathbf{I}_m は虚部をとることを意味する。cosで表していたらReで実部になる。

$\mathbf{i}(x, y, z, t)$, $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ についても全く同様にフェーザ表示が定義でき、次式が成り立つ。

$$\mathbf{i}(x, y, z, t) = \mathbf{I}_m\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-43)$$

$$\mathbf{D}(x, y, z, t) = \mathbf{I}_m\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-44)$$

③に代入して、

$$\text{rot}(\text{Im}\{\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}\}) = \text{Im}\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} + \frac{\partial}{\partial t} \text{Im}\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t}\}$$

\mathbf{I}_m の演算は入れ替えても良く、rotの演算は時間に関係ないから

$$\text{Im}\{e^{j\omega t} \text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z)\} = \text{Im}\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} + \text{Im}\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}\}$$

$$\therefore \text{Im}\{e^{j\omega t} (\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) - \dot{\mathbf{i}}(x, y, z) - j\omega \dot{\mathbf{D}}(x, y, z))\} = \mathbf{0}$$

となる。任意の時間に対して成り立つためには、次式が成り立たなくてはならない。

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{i}}(x, y, z) + j\omega \dot{\mathbf{D}}(x, y, z) \quad (7-45)$$

同様に、形式的に $\partial/\partial t$ を $j\omega$ と置くことで求められる。 ε, μ, κ を除く全ての量が時間を含まない複素数になっていることに注意しなくてはならない。 $\dot{\mathbf{i}}_c$ を消去し、 $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$ の式に直すと、 (x, y, z) は省略して、①~⑧より

$$\text{div}(\kappa \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}}_0) + j\omega \dot{\rho} = 0 \quad (7-46)$$

$$\text{div}(\varepsilon \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho} \quad (7-47)$$

$$\text{div}(\mu \dot{\mathbf{H}}) = 0 \quad (7-48)$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}} = (\kappa + j\omega\varepsilon) \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-49)$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \quad (7-50)$$

が得られる。(7-47), (7-48)で、仮定(1)より、 ε, μ はdivの外に出しても構わない。 $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$ を分離

した式は、(7-46)~(7-50)で求められるが、(7-33), (7-35)からも直接得られる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot} \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-51)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu \dot{\mathbf{i}}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \dot{\rho} \quad (7-52)$$

$$\text{ただし, } k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\kappa\mu} = \beta - j\alpha, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\kappa\mu \quad (7-53)$$

ここでは、(7-20)で定義した伝搬定数 γ の代わりに k を用いることも多い。 k も **伝搬定数** と呼ばれており、良く用いられている。両者には以下の関係がある。

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta \quad (7-54)$$

(7-53)より **減衰定数** α 、**位相定数** β は、 $\alpha \geq 0$ の条件より以下の式となる。

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right\}} \quad , \quad \alpha = 0 \quad (\kappa = 0 \text{ のとき}) \quad (7-55)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right\}} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\kappa = 0 \text{ のとき}) \quad (7-56)$$

(7-21), (7-22)で $R=0, LC = \varepsilon\mu, G/C = \kappa/\varepsilon$ とおくと、(7-55), (7-56)と一致する。 $G/C = \kappa/\varepsilon$ は(4-43)で得られた結果と同じである。

電荷密度 $\dot{\rho}$ は、(7-29), (7-30)を複素表示して

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 + \dot{\rho}_c$$

$$\text{div} \dot{\mathbf{i}}_0 + j\omega\dot{\rho}_0 = 0, \quad \text{div} \dot{\mathbf{i}}_c + j\omega\dot{\rho}_c = 0$$

となる。⑧より $\text{div} \dot{\mathbf{i}}_c = \kappa \text{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\kappa\dot{\rho}}{\varepsilon}$

$$\text{故に } \frac{\kappa\dot{\rho}}{\varepsilon} + j\omega\dot{\rho}_c = 0 \quad \therefore \dot{\rho}_c = -\frac{\kappa\dot{\rho}_0}{\kappa + j\omega\varepsilon}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} = -j\omega \frac{\dot{\rho}_c}{\kappa} = \frac{j\omega\dot{\rho}_0}{\kappa + j\omega\varepsilon}$$

である。従って、(7-52)で、

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \dot{\rho} = \frac{j\omega}{\kappa + j\omega\varepsilon} \text{grad} \dot{\rho}_0 \quad (7-57)$$

(7-51), (7-52)で強制電流や電荷がない空間では次式が成り立つ。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (7-58)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (7-59)$$

これは**ヘルムホルツの方程式**(Helmholtz equation)と呼ばれている。

ポテンシャルを用いる場合には、(7-28)の場合($\kappa \neq 0$)の式を導出後、フェーザ表示して次式と

なる⁽¹⁴⁾。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-60)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{V}} + k^2 \dot{\mathbf{V}} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \quad (7-61)$$

このとき、ローレンツゲージは次式で与えられる。 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ とおくと(2-33)に対応する。

$$\text{div} \dot{\mathbf{A}} + j\omega\mu\varepsilon \dot{\mathbf{V}} + \mu\boldsymbol{\kappa} \dot{\mathbf{V}} = 0 \quad (7-62)$$

○ 平面波

導電性の物質がなく $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ で、 ε, μ が一定の空間を考える。(7-59)のヘルムホルツの方程式

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu})$$

は、直角座標系では、以下のように書ける。

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x = 0 \quad (7-63)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y = 0 \quad (7-64)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z = 0 \quad (7-65)$$

波源を考えていないので、どの方向にも同じ条件である。そこで

$$\dot{E}_x(x, y, z) = \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z) \quad (7-66)$$

と仮定する⁽¹⁵⁾。(7-63)に代入し、

$$\dot{Y}(y)\dot{Z}(z)\frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \dot{X}(x)\dot{Z}(z)\frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\frac{\partial^2 \dot{Z}(z)}{\partial z^2} + k^2 \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z) = 0$$

両辺を $\dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z)$ で割ると

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\dot{Z}(z)} \frac{\partial^2 \dot{Z}(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

これが成り立つには、それぞれの項が定数でなければならない。

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{d^2 \dot{X}(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{d^2 \dot{Y}(y)}{dy^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{\dot{Z}(z)} \frac{d^2 \dot{Z}(z)}{dz^2} = -k_z^2 \quad (7-67)$$

とおくと、

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (7-68)$$

(7-67)は、(7-17)のように解くことができる。この結果、

$$\dot{E}_x(x, y, z) = (Ae^{-jk_x x} + Be^{jk_x x})(Ce^{-jk_y y} + De^{jk_y y})(Ee^{-jk_z z} + Fe^{jk_z z}) \quad (7-69)$$

となる。進行波だけを考える場合には、 $B = D = F = 0$ とおける。(7-64), (7-65)より y, z 成分も同様に求められる。反射波は $A = C = E = 0$ とおく。

以上のことから、(7-59)の解の1つとして、次式が考えられる。

$$\dot{E}(x, y, z) = \dot{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (7-70)$$

これを(7-59)に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dot{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \dot{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2 \dot{E} \end{aligned}$$

となり、(7-70)はヘルムホルツの解の1つであることが確かめられる。

磁界は波動方程式でなく、波動方程式を解いても求めた(7-70)を使いマクスウェルの方程式から求める⁽¹⁰⁾ (波動方程式はマクスウェル方程式の必要条件である)。(7-50)より

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \dot{E} \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \text{rot}(\dot{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & k_y & k_z \\ \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -jk_x \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \dot{E} \end{aligned} \quad (7-71)$$

ここで、

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (7-72)$$

$$\dot{E}_0 = \dot{E}_{0x} \hat{x} + \dot{E}_{0y} \hat{y} + \dot{E}_{0z} \hat{z} \quad (7-73)$$

また、 $\dot{\rho} = 0$ として、(7-47)に(7-70)を代入して

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} &= \operatorname{div}(\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
 &= -jk_x \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_y \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_z \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
 &= -j \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0
 \end{aligned} \tag{7-74}$$

座標軸の取り方は自由なので、 z 軸方向に伝搬する電磁波を考え

$$\mathbf{k} = k_z \hat{\mathbf{z}} = k \hat{\mathbf{z}} \quad (k_x = k_y = 0, k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}) \tag{7-75}$$

と選ぶことができる。この向きは波源で決まる。 \mathbf{k} は実数だから、(7-71), (7-74)より瞬時値 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ については、 $\mathbf{H} = (1/\omega\mu) \mathbf{k} \times \mathbf{E}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ が成立つから、それぞれ直交し、図 7-7 のようになる。なお、フェーザ表示は次式で表せる。

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{E}}(z) = \dot{E}_{0x} e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{x}} \equiv \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{x}} \quad (\dot{E}_{0y} = \dot{E}_{0z} = 0) \tag{7-76}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{H}}(z) = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}} = \frac{k}{\omega\mu} \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{y}} \tag{7-77}$$

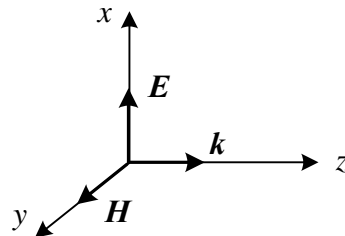


図 7-7 平面波と座標軸の取り方

実際の電界は以下のように求められる。

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Im}(\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}) = (\operatorname{Im}(\dot{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}), 0, 0)$$

$$\therefore E_x = |\dot{E}_0| \sin(\omega t - kz + \theta_0), E_y = 0, E_z = 0 \quad \text{ただし, } \theta_0 = \arg \dot{E}_0$$

一般に、座標原点 ($x = y = z = 0$) で、正弦波で変化する電界の x 成分、 y 成分、 z 成分、磁界の x 成分、 y 成分、 z 成分などのうち、どれか 1 つは、時間 $t = 0$ で 0 として良い(時間の原点の定義)。交流回路の解析でも、どれかの素子の電圧または電流のうち、いずれか 1 つのフェーザを実数に選べる。よって、 $\dot{E}_0 = E_0$ (実数)としても一般性を失わない。最終的に

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - k z), \quad E_y(x, y, z, t) = 0, \quad E_z(x, y, z, t) = 0 \quad (7-78)$$

となる。磁界は

$$H_x(x, y, z, t) = 0, \quad H_y(x, y, z, t) = \sqrt{\varepsilon / \mu} E_0 \sin(\omega t - k z), \quad H_z(x, y, z, t) = 0 \quad (7-79)$$

となる。

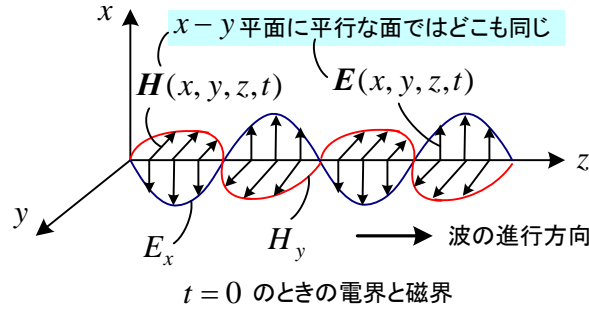


図 7-8 平面波 (矢印は z 軸上の点の電磁界)

となる。この様子を図 7-8 に示す。z 軸に垂直な x-y 平面 (**波面** という) において、電磁界は時間によって変化するが、どの場所でも同じ値である (決して z 軸のところだけに電磁界があるわけではない)。 $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$ と言える。 $\partial/\partial z \neq 0$, $\partial/\partial t \neq 0$ である。このように平面波は簡単な式で表現でき、解が(7-27)の分布定数回路とも対応しているので判り易い。

ただ、無限に広がる空間に平面波を作るためには、無限のエネルギーが必要だから、その意味では平面波は架空の電磁界である。しかし、波源 (アンテナ) から十分離れたところでは、近似的に平面波と考えてよいのである。

電磁波の速度は、真空中とすると(7-24)より、波源の周波数に関係なく

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3.0 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

となる。すなわち真空中の**光速**で進む。波の波長 λ は、 $f = 1\text{MHz}$ なら $\lambda = 300\text{m}$ である。

○ 平面波の導体への入射

表面が平らな導電性の十分広い媒質に平面波が垂直に入射する場合について考える。

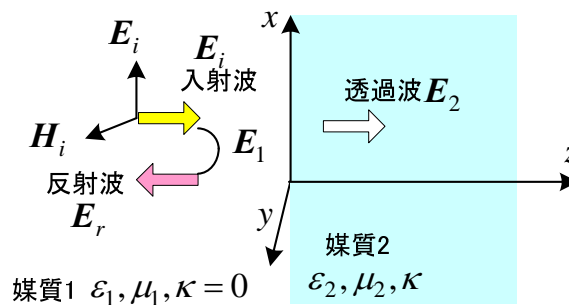


図 7-9 平面波の導電性媒質への入射

まず、電界について考える。(7-76)より、入射波は $\dot{E}_0 = E_i$ (正の定数とおいても一般性を失わない)として、次式で表せる。

$$\dot{E}_i(x, y, z) = E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{x} \quad \text{ここで, } k = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = \beta_1 \quad (7-80)$$

導体面での反射波は、(7-69)で $A = C = E = 0$ とおいた場合に相当し、考えている問題では $\kappa = 0$ だから、反射波は次式のように表せる。

$$\dot{E}_r(x, y, z) = \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{x} \quad (7-81)$$

媒質 **1** の電界は、入射波と反射波を加えたものとなり、次式となる。

$$\dot{E}_1(x, y, z) = \dot{E}_i + \dot{E}_r = E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{x} + \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{x} \quad (7-82)$$

媒質 **2** の透過波は、導電性の十分広い媒質であり境界条件と対称性より、次式で仮定する。

$$\dot{E}_2(x, y, z) = \dot{E}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} \quad (7-83)$$

一方、磁界に関し、進行波については(7-77)より電界(7-80)に対し次式で表せる。

$$\dot{H}_i(x, y, z) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{y} \quad (7-84)$$

反射波については、(7-71)より

$$\dot{H}_r(x, y, z) = -\frac{1}{\omega\mu_1} \mathbf{k} \times \dot{E}_r = -\frac{k}{\omega\mu_1} \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{z} \times \hat{x} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{y} \quad (7-85)$$

従って、媒質 **1** の磁界は、入射波(7-84)と反射波(7-85)を加えたものとなり、次式で与えられる。

$$\dot{H}_1(x, y, z) = \dot{H}_i + \dot{H}_r = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{y} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{y} \quad (7-86)$$

媒質 **2** の透過波で、磁界は(7-71)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{H}_2(x, y, z) &= \frac{1}{\omega\mu_2} \mathbf{k} \times \dot{E}_2 = \frac{k}{\omega\mu_2} \dot{E}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{y} \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 - j\omega\mu_2 \kappa}}{\omega\mu_2} \dot{E}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{y} \quad (7-53) \text{より} \end{aligned} \quad (7-87)$$

境界条件を使って、未知パラメータを求めよう。

$$(a) \quad z = 0 \quad \text{で} \quad \dot{E}_1, \dot{E}_2 \text{ の接線成分が等しい: } E_i + \dot{E}_r = \dot{E}_2 \quad (7-88)$$

$$(b) \quad z = 0 \quad \text{で} \quad \dot{H}_1, \dot{H}_2 \text{ の接線成分が等しい: } \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_i - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \dot{E}_r = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_2 - j\kappa}{\omega\mu_2}} \dot{E}_2 \quad (7-89)$$

ここで、次式の定義を行う。

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\kappa + j\omega\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\dot{\varepsilon}_2}} \quad (7-90)$$

$\dot{\varepsilon}_2$ は複素誘電率とよばれ、次式で表せる。

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \frac{\kappa}{j\omega} \quad (7-91)$$

すると、(7-89)より

$$\frac{1}{\eta_1} E_i - \frac{1}{\eta_1} \dot{E}_r = \frac{1}{\eta_2} \dot{E}_2$$

この結果、

$$\dot{E}_r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_i \equiv R E_i, \quad \dot{E}_2 = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_i \equiv T E_i \quad (7-92)$$

となる。これらの係数は、 R が**反射係数**、 T が**透過係数**といわれる。

媒質 **2** に流れる電流密度は、(7-83)より次式で求められる。

$$\dot{i}_2(x, y, z) = \kappa \dot{E}_2(x, y, z) = \frac{2\eta_2\kappa}{\eta_2 + \eta_1} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} \quad (7-93)$$

ここで、導体の導電率が大きく

$$\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_2} \gg 1 \quad (7-94)$$

が成り立つとき、**減衰定数** α_2 、**位相定数** β_2 は、(7-55)、(7-56)より以下のように近似できる。

$$\alpha_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\kappa}{2}}, \quad \beta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\kappa}{2}} \quad (7-95)$$

導体に入った電界、磁界さらに流れる電流は、 z の増加とともに減衰する。 $\delta \approx \sqrt{2/(\omega\mu_2\kappa)}$ は**表皮の厚さ**と呼ばれ、 $z = \delta$ で振幅が $1/e$ になる。

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\kappa + j\omega\varepsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\kappa}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

よって、 $\left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\varepsilon_1}{\kappa\mu_1}} \ll 1$ なので、(7-93)より

$$\dot{i}_2(x, y, z) \approx \frac{2\eta_2\kappa}{\eta_1} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} = 2\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{j\frac{\pi}{4}} \hat{x}$$

瞬時値は、 x 成分のみで $e^{j\omega t}$ を掛けて虚部をとればよいので

$$i_{2x} = 2\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-\alpha_2 z} \sin(\omega t - \beta_2 z + \frac{\pi}{4}) \quad (7-96)$$

となる。他の瞬時値も同様に求めることができる。

○ 線路で送る電磁波(TEM 波)

通信を行うため信号を送る方法は、空間を利用した無線通信と伝送路を利用した通信に大別される。伝送路には、平行平板導波路、同軸ケーブル、導波管、光ファイバーなどがあるが、ここでは分布定数回路として解析ができる平行平板導波路、同軸ケーブルについて考える。電磁波を記述するマクスウェルの方程式と回路の式がどのように関係しているかを考えたい⁽²⁴⁾。

まず、図 7-10 の平行平板導波路について述べる。以下の仮定を行う。

- (1) 導体板は完全導体とする。また導体板の間は ϵ, μ の絶縁物質とする。 z 軸方向は無限の長さで、 a は b と比べて十分長いとする。すなわち縁端効果を見捨てる。
- (2) 平面波が進行方向の成分を持たないように電界と磁界の z 方向成分は 0 すなわち $E_z = 0, H_z = 0$ とする。これは **TEM 波**(transverse electromagnetic wave) と呼ばれる。
- (3) 電界については y 軸成分のみとする。よって、 $E_x = 0$ である。
- (4) 磁界については x 軸成分のみとする。よって、 $H_y = 0$ である。
- (5) 回路で言うところの定常状態にあり、全ての量が時間的に角周波数 ω の正弦波であるとする。つまり電源のスイッチを入れた後の過渡現象は考えない。

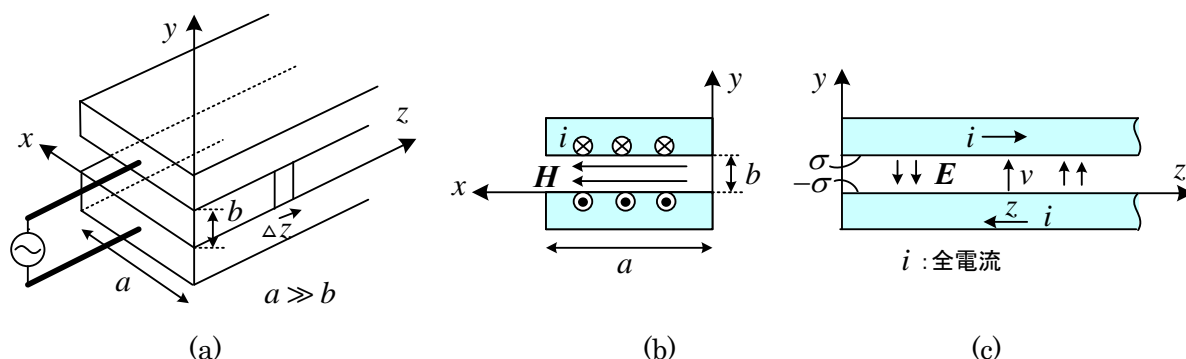


図 7-10 平行平板導波路

導体板の間では、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ であり、 $\kappa = 0$ で、電流や電荷はないとする。よって、①～④より次式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (7-97)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (7-98)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7-99)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (7-100)$$

波動方程式は、(7-38), (7-39)より次式で与えられる。

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-101)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-102)$$

仮定(2),(3),(4)より, (7-97)~(7-100)を x, y, z 成分で書くと以下の様になる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (7-103)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (7-104)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \hat{z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{y}$$

$$\therefore \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (7-105)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{x}$$

$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (7-106)$$

(7-106)の第1式を z で偏微分し, (7-105)の第1式を用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (7-107)$$

これは $E_x = E_z = 0$ として, (7-102)の波動方程式からも直接得られる。

(7-103)~(7-106)より, x, y についての偏微分が0だから E_y, H_x は z と時間 t の関数でなければならない。仮定(5)の場合の解については, フェーザ表示して平面波と同じように解くことができる。(7-107)をフェーザ表示して, E_y が z のみの関数だから $\partial/\partial z \rightarrow d/dz$ にかえて

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0 \quad \text{ただし, } k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (7-108)$$

z 方向に進む進行波のみを考えた場合には, 次式で表される。

$$\dot{E}_y(z) = \dot{E}_0 e^{-jkz} \quad (7-109)$$

よって,

$$E_y(z, t) = \left| \dot{E}_0 \right| \sin(\omega t - kz + \theta_0) \quad \text{ただし, } \theta_0 = \arg \dot{E}_0 \quad (7-110)$$

(7-106)をフェーザ表示して, 次式が得られる。

$$\frac{d\dot{E}_y}{dz} = j\omega\mu\dot{H}_x$$

故に, (7-109)より

$$\dot{H}_x(z) = -\frac{1}{j\omega\mu} jk \dot{E}_0 e^{-jkz} = -\sqrt{\varepsilon/\mu} \dot{E}_0 e^{-jkz} \quad (7-111)$$

瞬時値にもどすと (平面波の場合と比べ-がつくのは座標軸の取り方が違うから)

$$H_x(z, t) = -\left|\dot{E}_0\right| \sqrt{\varepsilon/\mu} \sin(\omega t - kz + \theta_0)$$

ここで, 図 7-10(c)の向きに z 点の電位 $v(z, t)$ を定義すると⑩より

$$v(z, t) = -\int_0^b E_y dy = -E_y b = -b \left|\dot{E}_0\right| \sin(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-112)$$

導体板に流れる全電流を図 7-10(c)の向き $i(z, t)$ にとすると, 導体板を完全導体として, (2-60)の境界条件より, $H_x(z, t)$ が単位長当たりの電流密度に等しいから全電流 $i(z, t)$ は

$$i(z, t) = a H_x(z, t) = -a \left|\dot{E}_0\right| \sqrt{\varepsilon/\mu} \sin(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-113)$$

特性インピーダンスは

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (7-114)$$

なお, 上の導体板表面の電荷密度は, (2-65)の境界条件より次式となる。

$$\sigma(z, t) = -D_y = -\varepsilon \left|\dot{E}_0\right| \sin(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-115)$$

以下に, 分布定数回路の基本式との関係を明確にしよう。(7-106)の第 1 式で, 両辺を 0 から b まで線積分して次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^b E_y dy = \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b H_x dy \quad (7-116)$$

$b, \Delta z$ (z 軸微小長さ)の長方形面の磁束を ϕ とすると, (7-113)を用いて

$$\phi = \Delta z \int_0^b \mu H_x dy = b \Delta z \mu H_x = \frac{b \Delta z \mu}{a} i = L \Delta z i \quad (7-117)$$

と書ける。 L [H/m] は 1m 当たりに換算したインダクタンスで, 次式となる (付録参照)。

$$L = b\mu/a \text{ [H/m]} \quad (7-118)$$

導波路は z 軸方向に無限に長い 1 巻のコイルであるが, そこに鎖交する磁束の一部を求めたものである。(7-116)に, (7-112), (7-117)を用いて

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (7-119)$$

となる。これは $R=0$ とした場合の (7-4)に対応する。

(7-105)の第 1 式で, 両辺を 0 から b まで線積分して次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^b H_x dy = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b E_y dy \quad (7-120)$$

C [F/m] を 1m 当りに換算した静電容量とすると, Δz の静電容量は次式となる。

$$C_{\Delta z} = \frac{\epsilon a \Delta z}{b} \quad \therefore C = \frac{\epsilon a}{b} \text{ [F/m]} \quad (7-121)$$

電荷密度が x 方向に変化しないことが前提となっている。(7-118), (7-121)より, 次式が得られる。

$$CL = \epsilon\mu$$

(7-120)に(7-112), (7-117)を用いて次式が得られる。

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (7-122)$$

これは, $G=0$ とした場合の(7-5)に一致する。

(7-119), (7-122)の解は, (7-27)より以下のように求められていた。

$$v(z,t) = V_0 \sin(\omega t - \omega\sqrt{LC}z)$$

$$i(z,t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega t - \omega\sqrt{LC}z)$$

(7-112), (7-113)で $\theta_0 = \pi$ とし

$$V_0 = b |\dot{E}_0|, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{b}{a}, \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega\sqrt{CL}$$

の関係から, 両者は一致する。このときの電界の様子を図 7-11 に示す。表面電荷の \oplus は, 実際には電子が動いている。図 3-10 の場合と比べて周波数が高くなると, 場所 z の関数として電圧, 電流, 電界が変化する。

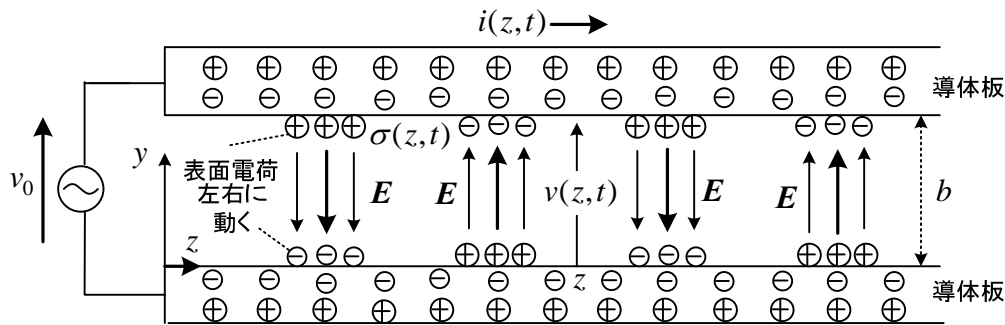


図 7-11 平行平板導波路の電界

(7-106)より $\text{rot } \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ であるから, 図 7-11 の電界は厳密に言えばクーロン電界とは言えない。 \mathbf{E} は y 軸成分のみであるが, z によって値が異なるので, 回転が 0 でない(渦がある)。また, ガウスの法則④で求められるのは電界 \mathbf{E} で, 電荷が作る電界を求めているようだがクーロン電界 \mathbf{E}_c とは限らない。では何故, (7-112)で電位が計算できたのか? 以下に説明しよう。(7-112)で

$$\dot{V}(z) = -\dot{E}_y(z)y = -\dot{E}_0 y e^{-jkz}$$

により導体板間の電位を表す。これから次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{E}}_c = -\text{grad} \dot{V}(z) = \dot{E}_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} - jk \dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

このようにクーロン電界には z 成分もある。この結果、 $\text{rot}\dot{\mathbf{E}}_c = \mathbf{0}$ となることが容易に確かめられる。電界 $\dot{\mathbf{E}}$ は(7-109)の y 軸成分のみとしているので、誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ は⑨より

$$\dot{\mathbf{E}}_b = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}_c = \dot{E}_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} - \dot{E}_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} + jk\dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} = jk\dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

となる。誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ でクーロン電界の z 成分が打ち消される。このためには、(2-28)よりベクトルポテンシャル $\dot{\mathbf{A}}$ は次式でなければならない⁽²²⁾。

$$\dot{\mathbf{E}}_b = -j\omega\dot{\mathbf{A}} = jk\dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} \quad \therefore \quad \dot{\mathbf{A}} = -\sqrt{\epsilon\mu}\dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot}\dot{\mathbf{A}}$ より、 $\dot{\mathbf{B}}$ を計算すると(7-111)が得られ、理論に矛盾はない。

電位はクーロン電界の任意の積分路で求められるが、 $x-y$ 平面上で線積分することにすれば、 $\dot{\mathbf{E}}_c$ の z 成分を考えなくて良いから、容易に電位が求められる。(7-112)はこのようにして電位が求められたのである。図7-11の電界 \mathbf{E} はクーロン電界 \mathbf{E}_c の y 成分と等しい。

次に、**同軸ケーブル**の場合を考える。

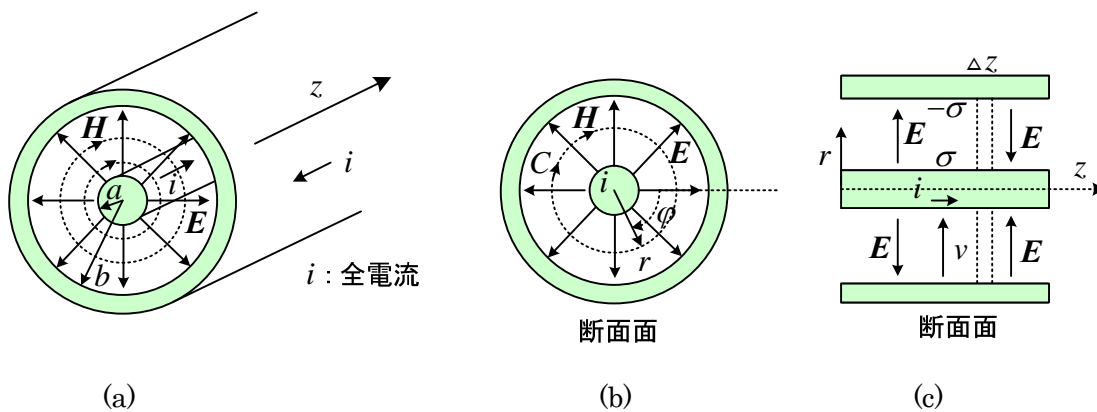


図 7-12 同軸ケーブル

同軸ケーブルの場合には、円柱座標系で解析するのが便利である。以下の仮定を行う。

- (1) 導体板は完全導体とする。また導体板の間は ϵ, μ の絶縁物質とする。
- (2) 電界と磁界の z 方向成分は0すなわち $E_z = 0, H_z = 0$ とする。
- (3) 電界については r 方向成分のみとする。よって、 $E_\phi = 0$ である。
- (4) 磁界については ϕ 方向成分のみとする。よって、 $H_r = 0$ である。
- (5) 定常状態にあり、全ての量が時間的に角周波数 ω の正弦波であるとする。

(7-97)~(7-100)を r, ϕ, z 成分で書くと以下の様になる。(付20), (付21)参照。

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (7-123)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (7-124)$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} + \varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (7-125)$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} - \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (7-126)$$

仮定(2), (3), (4)を代入すると, 以下の式となる。

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0 \quad \therefore \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0 \quad (7-127)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \therefore \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (7-128)$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \hat{\mathbf{z}} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} \\ \therefore \quad &-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = 0\end{aligned}\quad (7-129)$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{z}} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \therefore \quad &\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0\end{aligned}\quad (7-130)$$

(7-130)の第1式を z で偏微分し, (7-129)の第1式を代入すると, 波動方程式が以下の様に得られる。

$$\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0 \quad (7-131)$$

仮定(5)の場合の解については, フェーザ表示して同じように解くことができる。 z 方向に進む進行波のみを考えた場合には, (7-110)より次式で表される。

$$E_r = \left| \dot{E}_0 \right| \sin(\omega t - k z + \theta_0) \quad (7-132)$$

$$\text{ただし, } \theta_0 = \arg \dot{E}_0, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

マクスウェルの方程式を満足するため, (7-127)より

$$E_r = \frac{\left| \dot{E}_0 \right|}{r} \sin(\omega t - k z + \theta_0) \quad \text{ただし, } \dot{E}_0 = \dot{E}_0 / r \quad (7-133)$$

でなければならない。磁界は(7-130)に代入して積分し

$$H_\varphi = \frac{\left| \dot{E}_0 \right|}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin(\omega t - k z + \theta_0) \quad (7-134)$$

これはマクスウェルの方程式(7-128),(7-129)を満足している。

電圧は、図 7-12(c)の向きに定義すると

$$\begin{aligned} v(z,t) &= -\int_b^a E_r dr = -\int_b^a \frac{|\dot{E}_0|}{r} \sin(\omega t - k z + \theta_0) dr \\ &= -|\dot{E}_0| \sin(\omega t - k z + \theta_0) \int_b^a \frac{1}{r} dr = |\dot{E}_0| \log \frac{b}{a} \sin(\omega t - k z + \theta_0) \end{aligned} \quad (7-135)$$

となる。 $z=0$ で、 $v=V_0 \sin \omega t$ とすると、

$$|\dot{E}_0| = \frac{V_0}{\log(b/a)}, \quad \theta_0 = 0$$

となり、

$$v(z,t) = V_0 \sin(\omega t - kz) \quad (7-136)$$

$$E_r = \frac{V_0}{r \log(b/a)} \sin(\omega t - kz) \quad (7-137)$$

$$H_\phi = \frac{V_0}{r \log(b/a)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin(\omega t - kz) \quad (7-138)$$

全電流 i を図の向きに定義する。導体を完全導体と考えると、磁界が単位長の面電流だから $r=a$ のときの境界条件(2-60)より、 $i(z,t) = 2\pi a H_\phi$ (H_ϕ は $r=a$ のときの値) だから、(7-138)より

$$i(z,t) = \frac{2\pi V_0}{\log(b/a)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin(\omega t - kz) \quad (7-139)$$

である。よって(7-138)、(7-139)より

$$i(z,t) = 2\pi r H_\phi \quad (7-140)$$

特性インピーダンス Z_0 は

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \log \frac{b}{a} \quad (7-141)$$

次に、分布定数回路とのつながりを考えよう。

(7-130)の両辺を r 方向に線積分すると

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b E_r dr = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b H_\phi dr \quad (7-142)$$

電流が表面に流れるとして、導体内の内部インダクタンスを無視すると Δz の長さ当たり、鎖交する磁束は(7-140)を用いて

$$\phi = \int_a^b \mu H_\phi \Delta z dr = \int_a^b \mu \frac{i}{2\pi r} \Delta z dr = \frac{\mu}{2\pi} \Delta z i \log \frac{b}{a} = L \Delta z i \quad (7-143)$$

となる。1m 当りに換算したインダクタンスは次式となる。

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (7-144)$$

(7-135),(7-143)を (7-142)に代入して次式が得られる。 E_r の積分範囲に注意。

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (7-145)$$

(7-129)の第1式の両辺を r 一定の円周上で周回線積分して次式が得られる。

$$-\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi r} H_\phi dl = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi r} E_r dl \quad (7-146)$$

ここで、 Δz の長さ当たりの電荷は、ガウスの法則より $\varepsilon E_r \Delta z$ が表面電荷に相当するので

$$Q = \int_0^{2\pi r} \varepsilon E_r \Delta z dl = C \Delta z v \quad \therefore \quad \varepsilon \int_0^{2\pi r} E_r dl = 2\pi r \varepsilon E_r = C v \quad (7-147)$$

となる。よって(7-136), (7-137)より

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\log(b/a)} \quad [\text{F/m}] \quad (7-148)$$

である。(7-146)より, (7-140), (7-147)だから

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (7-149)$$

と書ける。(7-145), (7-149)は分布定数回路の基本式に一致する。分布定数回路より得られた(7-27)の結果に, (7-144), (7-148)を用いると, マクスウェルの方程式より得られた(7-139)に一致する。

○ 導波管で送る電磁波(TE 波, TM 波)

導波管は、断面が長方形または円の中空のパイプ状の伝送路で、壁面は銅や銀などの導体で作られている。同軸ケーブルと比べて高価であるが、損失が少なく電力用に適している。電磁波は、導波管の入口に設置した送信アンテナから送られ、出口の受信アンテナで受け取られる。導波管の場合には、中空導体内に静電界が存在しないのと同じように **TEM 波**は存在しない。利用されている電磁波は **TE 波**(transverse electric wave) (H 波, $E_z = 0$) と **TM 波**(transverse magnetic wave) (E 波, $H_z = 0$) である。TEM 波でないので単純な電気回路で考えることはできない。そこで、電磁波の基本式を使って解析しよう。

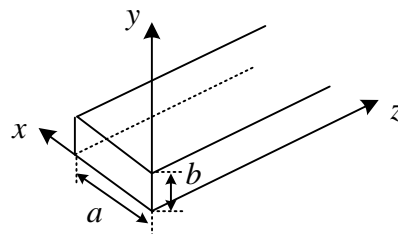


図 7-13 導波管

本テキストでは、**TE 波** (H 波, $E_z = 0$) を考える。そこで、(7-58)のヘルムホルツの方程式

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (7-150)$$

に注目しよう。この式で、 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ として、 z 成分は次式で表せる。

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu \dot{H}_z = 0 \quad (7-151)$$

z 方向に伝わる電磁波は、これまでの計算でもそうであったように、 $\sin(\omega t - \beta z)$ の因子をもつと考えられる。すなわち、フェーザ表示すれば、 z を含む因子は $e^{-j\beta z}$ をもつことになる。これは全ての変数に共通である。そこで、

$$\dot{H}_z = \dot{H}_z(x, y) e^{-j\beta z} \quad (7-152)$$

と置く。これを代入して、

$$\left\{ \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} - \beta^2 \dot{H}_z(x, y) + \omega^2 \varepsilon \mu \dot{H}_z(x, y) \right\} e^{-j\beta z} = 0$$

従って、

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_H^2 \dot{H}_z(x, y) = 0 \quad (7-153)$$

$$\text{ただし、 } k_H^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 \quad (7-154)$$

を解けばよい。方形導波管は、 x 軸、 y 軸に平行な境界があるので

$$\dot{H}_z(x, y) = \dot{X}(x) \dot{Y}(y) \quad (7-155)$$

仮定する。これを代入して

$$\dot{Y}(y) \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \dot{X}(x) \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + k_H^2 \dot{X}(x) \dot{Y}(y) = 0$$

両辺を $\dot{X}(x) \dot{Y}(y)$ で割ると

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + k_H^2 = 0$$

各項はそれぞれ、 x の関数、 y の関数及び定数なので、それぞれが定数でなければならない。よって、次式の様における。

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{d^2 \dot{X}(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad (7-156)$$

$$\frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{d^2 \dot{Y}(y)}{dy^2} = -k_y^2 \quad (7-157)$$

$$\text{ただし、 } k_H^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (7-158)$$

(7-156)は、常微分方程式だから容易に解ける。特性方程式は $s^2 + k_x^2 = 0 \therefore s = \pm jk_x$ より

$$\dot{X}(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

同様に(7-157)より

$$\dot{Y}(x) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

従って、

$$\dot{H}_z(x, y) = (A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x))(C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)) \quad (7-159)$$

A, B, C, D は境界条件から決定できる。

波動方程式から全てが出てくる訳ではないので、境界条件から解を求める前に、マクスウェルの方程式から得られる電界と磁界の関係を示す。因子 $e^{-j\beta z}$ をもつとして

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{E}}(x, y)e^{-j\beta z}, \quad \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{H}}(x, y)e^{-j\beta z} \quad (7-160)$$

とおく。TE波の条件、 $\dot{E}_z = 0$ を考慮すると $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$ より以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x(x, y, z) & \dot{E}_y(x, y, z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \hat{y} + \left(\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= -j\omega\mu\dot{H}_x(x, y, z)\hat{x} - j\omega\mu\dot{H}_y(x, y, z)\hat{y} - j\omega\mu\dot{H}_z(x, y, z)\hat{z} \end{aligned}$$

(7-160)を代入して、 $e^{-j\beta z}$ で割り算して

$$\beta \dot{E}_y(x, y) = -\omega\mu\dot{H}_x(x, y) \quad (7-161)$$

$$\beta \dot{E}_x(x, y) = \omega\mu\dot{H}_y(x, y) \quad (7-162)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x(x, y)}{\partial y} = -j\omega\mu\dot{H}_z(x, y) \quad (7-163)$$

$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}$ より以下の式が得られる。

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{H}_x(x, y, z) & \dot{H}_y(x, y, z) & \dot{H}_z(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\
&= j\omega\varepsilon \dot{E}_x(x, y, z) \hat{x} + j\omega\varepsilon \dot{E}_y(x, y, z) \hat{y}
\end{aligned}$$

(7-160)を代入して、 $e^{-j\beta z}$ で割り算して

$$\frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} + j\beta \dot{H}_y(x, y) = j\omega\varepsilon \dot{E}_x(x, y) \quad (7-164)$$

$$-j\beta \dot{H}_x(x, y) - \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial x} = j\omega\varepsilon \dot{E}_y(x, y) \quad (7-165)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7-166)$$

以上の式から、電界と磁界を $\dot{H}_z(x, y)$ で表そう。(7-162), (7-164)より

$$\dot{E}_x(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} \quad (7-167)$$

(7-161), (7-165)より

$$\dot{E}_y(x, y) = \frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial x} \quad (7-168)$$

(7-161)より

$$\dot{H}_x(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu} \dot{E}_y(x, y) = -\frac{j\beta}{k_H^2} \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial x} \quad (7-169)$$

(7-162)より

$$\dot{H}_y(x, y) = \frac{\beta}{\omega\mu} \dot{E}_x(x, y) = -\frac{j\beta}{k_H^2} \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} \quad (7-170)$$

が得られる。(7-163)は(7-167), (7-168)を代入すると解こうとしている波動方程式に一致し, (7-166)は(7-169), (7-170)より満足している。また, (7-167), (7-168)より

$$\operatorname{div} \dot{E}(x, y, z) = \frac{\partial \dot{E}_x(x, y)}{\partial x} e^{-j\beta z} + \frac{\partial \dot{E}_y(x, y)}{\partial y} e^{-j\beta z} = 0$$

は成り立つ。

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \dot{H}(x, y, z) &= e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_x(x, y)}{\partial x} + e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_y(x, y)}{\partial y} + \dot{H}_z(x, y) \frac{\partial}{\partial z} (e^{-j\beta z}) \\
&= e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_x(x, y)}{\partial x} + e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_y(x, y)}{\partial y} - j\beta \dot{H}_z(x, y) e^{-j\beta z} = 0
\end{aligned}$$

も(7-163)より満足する。従って、波動方程式を解いて、(7-167)~(7-170)を用いて電磁界を計算すればよい。

境界条件は、導体の表面で、電界の接線成分が 0 となることから、(7-168) ,(7-167)を用い

$$(1) \quad x=0 \quad \text{で} \quad \dot{E}_y(x,y)=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x,y)}{\partial x}=0$$

$$(2) \quad x=a \quad \text{で} \quad \dot{E}_y(x,y)=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x,y)}{\partial x}=0$$

$$(3) \quad y=0 \quad \text{で} \quad \dot{E}_x(x,y)=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x,y)}{\partial y}=0$$

$$(4) \quad y=b \quad \text{で} \quad \dot{E}_x(x,y)=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x,y)}{\partial y}=0$$

(7-159)より、 $\frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_z(x,y) = (Ak_x \cos(k_x x) - Bk_x \sin(k_x x))(C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y))$ であり、(1)

を用いて

$$A=0$$

$$(2) \text{より、} \sin(k_x a) = 0 \quad \therefore \quad k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$(3),(4) \text{より同様に、} C=0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

従って、

$$\dot{H}_z(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\therefore \quad \dot{H}_z(x,y,z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \quad (m,n=0,1,2,\dots) \quad (7-171)$$

実際の瞬時値は、

$$\begin{aligned} H_z(x,y,z,t) &= \text{Im}\{H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - \beta z)}\} \\ &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned} \quad (7-172)$$

他の値は $\dot{H}_z(x,y)$ を用いて計算できる。

$$\dot{E}_x(x,y,z) = \frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \quad (7-173)$$

$$\dot{E}_y(x,y,z) = -\frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \quad (7-174)$$

$$\dot{H}_x(x,y,z) = \frac{j\beta}{k_H^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \quad (7-175)$$

$$\dot{H}_y(x,y,z) = \frac{j\beta}{k_H^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \quad (7-176)$$

となる。当然、 $\dot{E}_z=0$ である。

$m=n=0$ の場合には電界が 0 となり伝送に適さない。

(7-154) , (7-158)より、

$$k_H^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (7-177)$$

電磁波が減衰なく伝送するためには

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > 0 \quad (7-178)$$

でなければならない。 $a > b$ とすると、 $m=1, n=0$ の場合、最も低い周波数から電磁波が伝送できる。これは TE_{10} モードと呼ばれている。 TE_{10} モードの最低周波数（カットオフ周波数）は、(7-177)より次式のように求められる（ $\beta=0, m=1, n=0$ として）。

$$\omega = \frac{\pi}{a\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \therefore f = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{2a} \quad (7-179)$$

TE_{10} モードの電磁界は $m=1, n=0$ より、以下の様に得られる。

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{a\beta}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y(x, y, z, t) = 0$$

$$E_y(x, y, z, t) = -\frac{a\omega\mu}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_x(x, y, z, t) = E_z(x, y, z, t) = 0$$

図 7-14 に TE_{10} モードの電磁界を示す。 $b/a=1/2$ のとき、 TE_{20} モードと TE_{01} モード信号のカットオフ周波数は等しく $f=c/a$ である。従って、 TE_{10} モードの電磁波として減衰することなく伝送できる周波数の範囲は以下の通りである。

$$\frac{c}{a} > f > \frac{c}{2a} \quad (f\lambda = c \text{より波長では } 2a > \lambda > a)$$

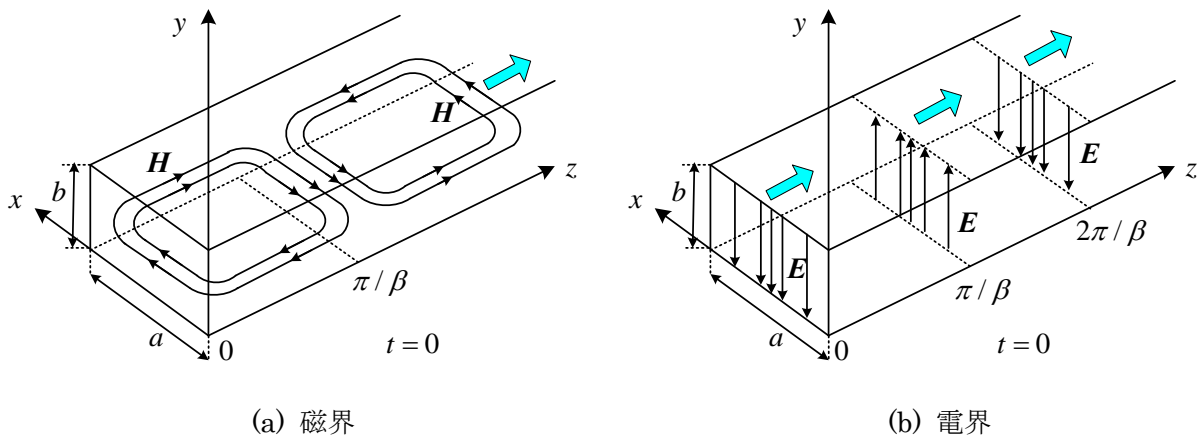


図 7-14 導波管の TE_{10} モードの電磁界

○ アンテナから送る電磁波

この節ではアンテナの基礎となる話で、電磁波が空間に飛び出すことを考えよう。これまで学習したことがみごとに繋がってくる。点電荷の電荷が時間的に変化している場合が最も簡単に思えるが、その電荷がどこから供給されるかを考えると電流も必要である。また電荷保存の法則を考えると、増える方と減る方の2つの点電荷が必要である。ということで、電気双極子が最も簡単な場合ということになる。双極子は**ダイポール(dipole)**ということもある。

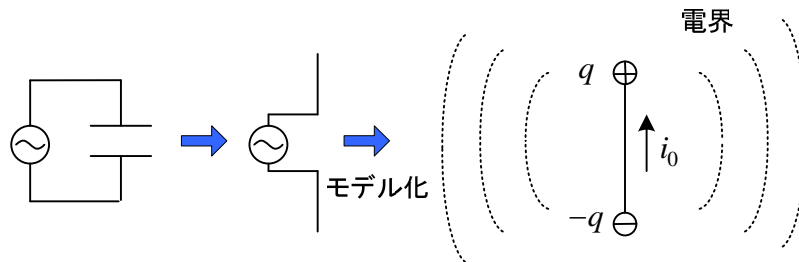


図 7-15 電気双極子

電磁波が飛び出す空間に電流の流れる物質がなければ、(2-34), (2-35)より、次式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{i}_0(\mathbf{r}, t) \quad (7-180)$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon} \quad (7-181)$$

(7-181)で、時間によって電荷が変化しない場合には

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

となる。これはポアソンの方程式に他ならない。この解は、重ね合わせの理より、電荷が存在する空間 V' 全体で集めれば良く、P 点の電位 V_p は次式で求められる。 \mathbf{r}' を動かして集める。

$$V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は電荷のある所から、考えている点までの距離である。

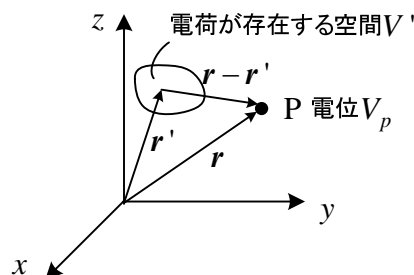


図 7-16 空間に分布した電荷が作る電位

それでは、(7-181)の場合はどうであろうか？つまり電荷が時間的に変化している場合である。実は、電荷の変化が伝わるのに時間がかかるのである。空気の光速は真空中の光速とほぼ等しいので、身近には体験しにくいのであるが。(7-181)の解は、次式となることが判っている⁽²⁾⁽²⁸⁾。

$$V_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7-182)$$

ここで、 $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ [m/s] である。 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ [m/s] なら真空中の光速である。つまり、電荷から $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 離れた点では、電位は時間 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ だけ前の電荷を使って求める必要があることを意味する。わかりやすい結果である。(7-180)のベクトルポテンシャルの場合には、

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{i}_0(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7-183)$$

となる。(7-182), (7-183)は**遅延ポテンシャル**と呼ばれている。

図 7-17 の電気双極子の場合で、電荷や電流が角周波数 ω で変化する場合を考えよう。(7-182), (7-183)のフェーザ表示は、 $k = \omega/c = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ として次式となる。

$$\dot{V}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7-184)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{i}}_0(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7-185)$$

例えば、 $\dot{\rho}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) = \text{Im}\{\dot{\rho}_0(\mathbf{r}') e^{j\omega(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}\} = \text{Im}\{\dot{\rho}_0(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{j\omega t}\}$ である。

電荷は、 $q = q_0 \sin \omega t$ の点電荷について考え、電荷密度の体積分は電荷になるので

$$\dot{V}_p(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r_1} e^{-jk r_1} \quad (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r_1 \text{ だから}) \quad (7-186)$$

となる。同様に、 $-q$ の点電荷について考え、これらの和から

$$\dot{V}_p(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} e^{-jk r_1} - \frac{1}{r_2} e^{-jk r_2} \right), \quad \dot{q} = q_0 \quad (7-187)$$

ここで、第 4 章の例題 9 を参照して

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta, \quad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta\right), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta\right)$$

$$e^{-jk r_1} \approx e^{-jk(r - \frac{l}{2} \cos \theta)} = e^{-jkr} e^{jk \frac{l}{2} \cos \theta} \approx e^{-jkr} \left(1 + jk \frac{l}{2} \cos \theta\right)$$

$$e^{-jk r_2} \approx e^{-jkr} \left(1 - jk \frac{l}{2} \cos \theta\right)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_p(\mathbf{r}) &\approx \frac{q_0}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos\theta + jk \frac{l}{2} \cos\theta - 1 + \frac{l}{2r} \cos\theta + jk \frac{l}{2} \cos\theta\right) \quad (l^2 \text{項無視}) \\ &= \frac{q_0 l \cos\theta}{4\pi\epsilon r^2} e^{-jkr} (1 + jkr)\end{aligned}\quad (7-188)$$

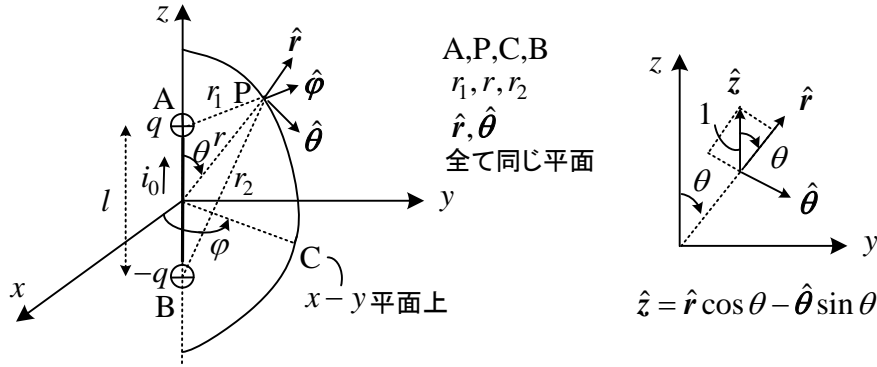


図 7-17 電気双極子と球座標系

電流密度も原点近傍にあると考え $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$ とする。電流密度の体積分は全電流 i_0 に長さ l を掛ければよいので

$$\dot{A}_p(\mathbf{r}) = \frac{\mu i_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu i_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} (\hat{\mathbf{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta) \quad (7-189)$$

電位とベクトルポテンシャルが求まったので、(2-26)より電界は次式から計算できる。

$$\dot{\mathbf{E}} = -\text{grad}\dot{V}_p - j\omega\dot{\mathbf{A}}_p \quad (7-190)$$

$$\begin{aligned}\text{ここで、} \quad \dot{\mathbf{E}}_c &= -\text{grad}\dot{V}_p = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{V}_p}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}_p}{\partial \theta} \quad (\text{付 24) より} \\ &= -\hat{\mathbf{r}} \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon} \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \right\} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos\theta) \\ &= \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{2jk}{r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r} \right) \cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) \sin\theta \right\}\end{aligned}\quad (7-191)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_b &= -j\omega\dot{\mathbf{A}}_p = -j\omega \frac{\mu i_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -j\omega \frac{\mu i_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} (\hat{\mathbf{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta)\end{aligned}\quad (7-192)$$

電流は $i_0 = \frac{dq}{dt}$ だから、フェーザ表示は

$$\dot{i}_0 = j\omega\dot{q}, \quad \dot{q} = q_0 \quad (7-193)$$

である。よって、

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_c + \dot{\mathbf{E}}_b$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon} e^{-jkr} \left\{ \hat{r} \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2jk}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \cos\theta + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) \sin\theta \right\} \\
&\quad + \omega^2 \frac{\mu q_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} (\hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta) \quad \left(\omega^2 \mu = \frac{k^2}{\epsilon} \text{より} \right) \\
&= \hat{r} \frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{-jkr} + \hat{\theta} \frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-jkr} \quad (7-194)
\end{aligned}$$

双極子近くの $1/r^3, 1/r^2$ の項はクーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ のみで作られている。遠方では、 $1/r$ の項のみとなり、クーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ と誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ で打ち消す項があり、誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ の一部が残る。

一方、磁界は $\dot{\mathbf{A}}_p$ の $\hat{\phi}$ 成分が 0 で、 φ の関数でないから、(付 26)より

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r\dot{A}_{p\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(\dot{A}_{pr})}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi} \\
&= \hat{\phi} \frac{j_0 l \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr} \quad (7-195)
\end{aligned}$$

真空中では、 $k = \omega/c$ ($c \approx 3 \times 10^8$ [m/s]) なので、 r が小さい双極子の近くで周波数も低いと $k \approx 0$ とおける。なお 1Mz のとき、 $k = 0.021$ である。双極子の近くで周波数も低い場合には

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}} &\approx \hat{r} \frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} + \hat{\theta} \frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} \\
\therefore \mathbf{E}(t) &= \left(\hat{r} \frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \\
&\approx \left(\hat{r} \frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \right) \sin\omega t \quad (r \text{ が小さい範囲}) \\
&= \hat{r} \frac{q(t)l \cos\theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{q(t)l \sin\theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \quad (7-196)
\end{aligned}$$

となる。よって電荷の時間変化があっても(4-29)の解がそのまま使用できることがわかる。(7-196)の近似した電界は $\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ を満足するからクーロン電界と考えられる。

磁界については、 r が小さい領域で、周波数が高くない場合には次式となる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}} &= \hat{\phi} \frac{j_0 l \sin\theta}{4\pi r^2} e^{-jkr} = \hat{\phi} \frac{j\omega q_0 l \sin\theta}{4\pi r^2} e^{-jkr} \\
\therefore \mathbf{H}(t) &= \frac{\omega q_0 l \sin\theta}{4\pi r^2} \cos(\omega t - kz) \hat{\phi} \approx \frac{\omega q_0 l \sin\theta}{4\pi r^2} \cos\omega t \hat{\phi} = \frac{i_0(t)l \sin\theta}{4\pi r^2} \hat{\phi} \quad (7-197)
\end{aligned}$$

(5-67)で、 $I dl = i_0 l$ 、 $\mathbf{t} \times \mathbf{r} = r \sin\theta \hat{\phi}$ と置くと、(7-197)と一致する。よって r が小さい領域で、周波数が高くない場合にはたとえ時間変化がある場合でもビオ-サバルの法則が適用できることが分る。

遠方では、 $1/r$ の項だけとなる。すなわち、

$$\dot{\mathbf{E}} = -\hat{\theta} \frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon r} k^2 e^{-jkr} \quad (7-198)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \hat{\phi} \frac{j_0 l \sin\theta}{4\pi r} j k e^{-jkr} \quad (7-199)$$

となる。 $\theta = \pi/2$ の場合、(7-198)、(7-199)より、電界と磁界の瞬時値は以下のように求められる。

$$E_{\theta}(r,t) = -\frac{q_0 l}{4\pi\epsilon r} k^2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \quad (7-200)$$

$$H_{\varphi}(r,t) = -\frac{\omega q_0 l}{4\pi r} k \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \quad (7-201)$$

これは平面波である。電界と磁界の振幅の比 η は

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \frac{4\pi r}{\omega q_0 l k} \frac{q_0 l k^2}{4\pi\epsilon r} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (7-202)$$

となり、(7-78),(7-79)の場合と一致している。 η は**波動インピーダンス**とよばれている。

真空中では、次の値となる。

$$\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \approx 377 \Omega \quad (7-203)$$

本テキストでは、クーロン電界と誘導電界を明らかにするため、以上の理論展開としたが、まずベクトルポテンシャルより(7-195)の磁界を求め、次に $\dot{\mathbf{E}} = (1/j\omega\epsilon)\text{rot } \dot{\mathbf{H}}$ から電界を求めることもできる⁽¹⁰⁾。この場合、 \dot{V}_p を求める必要はない。不思議な感じがするが、以下のように考えられる。ベクトルポテンシャルから、 \dot{V}_p を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \text{div } \dot{\mathbf{A}}_p &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{A}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_{\varphi}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi} \cos \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r e^{-jkr}) - \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \\ &= \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi} \cos \theta \frac{1}{r^2} (e^{-jkr} - jkr e^{-jkr}) - \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \frac{2}{r} \cos \theta \\ &= -\frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (7-204)$$

である。よって、(7-62) のローレンツの条件より電位 \dot{V}_p は

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= -\frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \text{div } \dot{\mathbf{A}}_p \\ &= \frac{\dot{i}_0 l \cos \theta}{j\omega\epsilon 4\pi r^2} e^{-jkr} (1 + jkr) \quad (\dot{i}_0 = j\omega q_0 \text{ より}) \\ &= \frac{q_0 l \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} e^{-jkr} (1 + jkr) \end{aligned}$$

となる。これは(7-188)に他ならない。

もともと(7-183)のベクトルポテンシャルにはローレンツの条件が加味されていた。従って、ベクトルポテンシャルが分かればローレンツの条件から電位が計算できたのである。すなわち、(7-183)のベクトルポテンシャルには電位の情報も入っており、この結果電位の計算なしに電磁界が求められたと思われる。ただし、静電界の場合には電流は流れていないので、ベクトルポテンシャルから電位を求めることはできない。