



Title	多自由度解析法による偏平殻の非線形自由振動
Author(s)	高橋, 和雄; 中村, 聖三; 三堂, 聡; 田中, 利志
Citation	長崎大学工学部研究報告 Vol.31(56) p.77-80, 2001
Issue Date	2001-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10069/5138">http://hdl.handle.net/10069/5138</a>
Right	

This document is downloaded at: 2018-04-23T20:45:24Z

## 多自由度解析法による偏平殻の非線形自由振動

高橋 和雄\* · 中村 聖三\*  
三堂 聡\*\* · 田中 利志\*\*\*

## Multiple-degree-of-freedom Approach to Nonlinear Vibration Properties of a Thin Shallow Shell

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Shozo NAKAMURA\*,  
Satoshi MIDOU\*\* and Satoshi TANAKA\*\*\*

In this study, the nonlinear vibration properties of a thin shallow shell are examined. The equation of motions describing the large deflection of the thin shallow shell using Vlasov type equations are analyzed by a Galerkin method. The resulting equations for time variable with quadratic and cubic nonlinear terms are solved by the harmonic balance method. Nonlinear free vibrations and forced vibrations of the first mode and higher modes are obtained for various geometric parameters.

## 1. はじめに

薄板にライズを持たせた偏平殻は曲率構造のため、剛性が高まり構造上有利である。しかし、飛び移り座屈を含めた不安定現象が生じやすく、ライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。変形に対して幾何学的非線形性を示すため、ライズによって生じる2次の非線形項が座屈特性に重要な役割を果たす。さらに、動的荷重が作用する場合には、動座屈や非線形振動の問題が生じてくる。したがって、動力学特性を説明するためには、線形振動のみならず、非線形振動特性も明らかにしなければならない。偏平殻の非線形振動の挙動は極めて複雑で、カオスの存在、振動モード間の連成の影響および動座屈など未解明な問題が残されている。

そこで、本研究では、ドームや体育館の屋根などに使用される薄肉殻構造物の解析をする。偏平殻の非線形振動については、金沢・半谷<sup>1)</sup>によって、偏平殻を1自由度系とした解析が行われている。この研究によって、二重曲率をもつ偏平殻の自由振動特性が曲率比などをパラメータに評価されている。偏平殻は連続体であるため多自由度系としての解析が必要であるため、本研究では、薄肉偏平殻を多自由度系として取り扱い、高次モードの非線形自由振動および1次モードの応答振幅に及ぼす高次モードの影響を解析する。本研究では、ガラーキン法を用いてたわみの運動方程式を多自

由度系の運動方程式に直して、調和バランス法を用いて解析する<sup>2)</sup>。

## 2. 薄肉偏平殻の運動方程式および境界条件

Fig.1に示すように、構造系をx方向、y方向に曲率半径 $R_x$ ,  $R_y$ をもつ偏平殻をモデルとし、中央面を式(1)で表す。

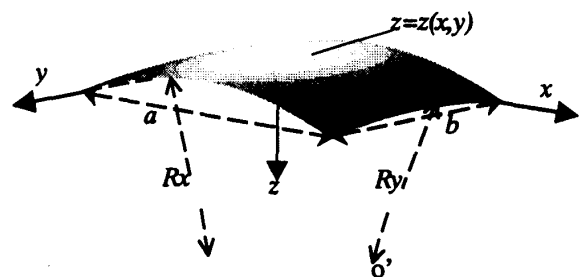


Fig.1 Geometry and co-ordinate system

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x(x-a)}{R_x} + \frac{y(y-b)}{R_y} \right\} \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) \quad (1)$$

ここに、 $R_x$ ,  $R_y$ : および方向の曲率半径。

振動によって起こるたわみを $w$ とすると、薄肉偏平殻の運動方程式と適合条件式は次式のようなになる<sup>3)</sup>。

$$L(w, F) = pd \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w + p_0 \cos \omega t - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$$

平成12年10月27日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*安倍工業所 (Abe Industry)

\*\*\*博士前期課程生産科学研究科 (Graduate Student, Environmental Systems Engineering)

$$-\frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^4 F = Ed \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $\rho$  : 板の密度、 $d$  : 板厚、 $E$  : ヤング率、  
 $\nu$  : ポアソン比、 $F$  : Airyの応力関数、 $t$  : 時間、  
 $p_0$  : 荷重曲線、 $\Omega$  : 荷重の円振動数

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} : \text{板剛度}, \nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$$

薄肉偏平殻の境界条件は、曲げに対して全周辺単純支持と全周辺固定支持とし、それぞれ面内変位  $u$   $v$  は固定もしくは自由とする。

全周辺単純支持の場合の境界条件は

面内自由の場合 (S-1)

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_x = v = 0 \quad (x=0, a) \quad (4)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = N_y = u = 0 \quad (y=0, b)$$

面内固定の場合 (S-2)

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = u = v = 0 \quad (x=0, a) \quad (5)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u = v = 0 \quad (y=0, b)$$

全周辺固定支持の場合の境界条件は

面内自由の場合 (C-1)

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = N_x = v = 0 \quad (x=0, a) \quad (6)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = N_y = u = 0 \quad (y=0, b)$$

面内固定の場合 (C-2)

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = u = v = 0 \quad (x=0, a) \quad (7)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = u = v = 0 \quad (y=0, b)$$

面内の境界条件を完全に満足することは困難であるため、次の近似式を用いる。

面内自由の場合

$$\int_0^b N_x dy = 0 \quad (x=0, a) \quad (8)$$

$$\int_0^a N_y dx = 0 \quad (y=0, b)$$

面内固定の場合

$$\int_0^b u dy = 0 \quad (x=0, a) \quad (9)$$

$$\int_0^a v dx = 0 \quad (y=0, b)$$

運動方程式の解を、境界条件を考慮して次式のように多自由度系に仮定する<sup>2</sup>。

$$w = d \sum_{m=1} \sum_{n=1} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (10)$$

ここに、 $T_{mn}(t)$  : 未知の時間関数、 $d$  : 板厚、 $W_{mn}(x, y)$  : 曲げに対する境界条件を満足する座標関数。

解析の手順として、薄肉偏平殻の式の適合条件式より、応力関数  $F$  を式 (10) を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定する。

運動方程式 (2) に、たわみの仮定および応力関数を代入して Galerkin 法を適用する。本研究では、1次モードと1個の高次モードを選ぶ。この場合、次のような時間に関する非線形連立運動方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{11} + 2h' \sqrt{a} \dot{T}_{11} + a' T_{11} + b' T_{11}^2 + c' T_{ij}^2 + d' T_{11}^3 + e' T_{11} T_{ij}^2 = f \bar{p} \cos \omega \tau \quad (11)$$

$$\ddot{T}_{ij} + 2h'' \sqrt{a} \dot{T}_{ij} + a'' T_{ij} + b'' T_{11} T_{ij} + c'' T_{ij}^3 + d'' T_{11}^2 T_{ij} = \delta_{ij} f'' \bar{p} \cos \omega \tau \quad (12)$$

ここに、 $a', b', c', d', e', f, a'', b'', c'', d'', e'', f''$  : 係数、

$\delta_{ij}$  : Kroneckerのデルタ関数、 $h', h''$  : 減衰定数、

$$\omega = \frac{\Omega}{\omega_0} : \text{無次元固有振動数}, \omega_0 = \sqrt{1 + a' \lambda^2} \sqrt{\frac{pdRx}{E}}$$

$$\bar{p} = \frac{p_0 Rx}{Ed\pi^2} : \text{荷重強度},$$

$\tau = \omega_0 t$  : 無次元時間、 $(i, j) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$

上式 (11) および式 (12) の解を次式のように仮定する。ここで、高次モードは2次の非線形項が入っていないため、1/2分数調波共振が現れないので、 $\cos \frac{\omega}{2} \tau, \sin \frac{\omega}{2} \tau$  を省いている。

$$T_{11} = c_0^{11} + c_{1/2}^{11} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{1/2}^{11} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau \quad (13)$$

$$T_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \quad (14)$$

ここに、 $c_0^{11}, c_1^{11}, s_1^{11}$  : 1次モードの付随型の振幅成分、

$c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$  : 1次モードの分岐型の振幅成分、

$c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$  : 高次モードの付随型の振幅成分。

式 (11) および式 (12) に式 (13) および式 (14) を代入して、調和バランス法を適用すれば、連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson法を適用して解けば、解が得られる。

3. 薄肉偏平殻の解析結果

本研究では無次元パラメータとして次の諸量を用いる。

$k=d/R_x$ : 板厚半径比,  $r=a/R_x$ : 辺長半径比,

$\lambda=R_x/R_y$ : 曲率半径比 ( $\lambda > 0$ : ドーム形状,  $\lambda < 0$ : 鞍形状,  $\lambda = 0$ : 円筒形状). また, 本研究ではポアソン比  $\nu = 0.3$ , 縦横比  $\mu = a/b = 1$ , 減衰定数  $h = 0$  とする。

代表的なパラメータに対する偏平殻の形状をFig.2に示す。  $\lambda = 1$  の場合がライズをもつ長方形板に相当する。

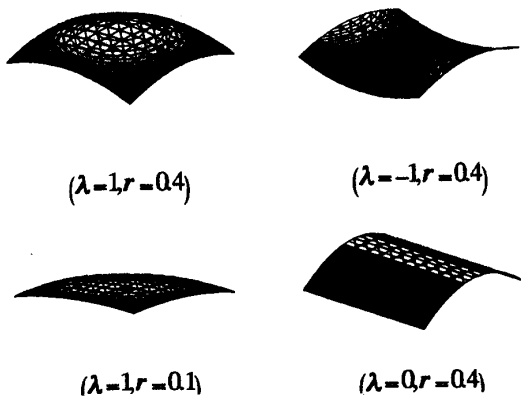


Fig.2 Geometry of shallow shell

(1) 線形自由振動

Fig.3に1次振動から5次の線形自由振動数と辺長半径比の関係を示す。  $r$  が0から0.1の領域では, モード次数の増大にしたがって固有振動数が増加する。しかし,  $r$  が0.2より大きく高次モードの固有振動数が1次固有振動数より小さくなり始める。  $r = 0.4$  の場合には, 1次モードの振動数が最も大きくなる。このように, 偏平殻の振動特性は  $r$  の影響を著しく受けることが分かる。

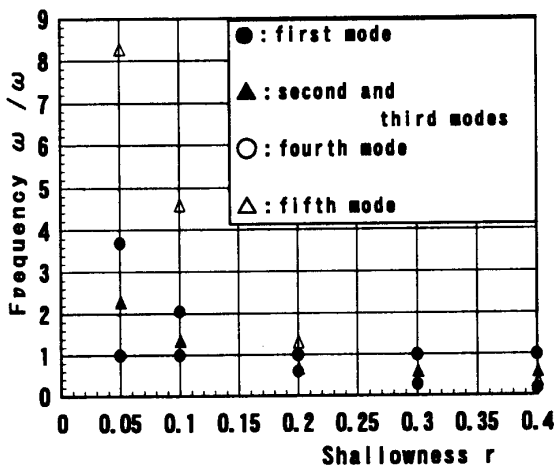


Fig.3 Natural frequency vs. shallowness ratio

(2) 非線形自由振動

Fig.4は  $k=0.001$ ,  $r=0.4$ , Fig.5は  $k=0.001$ ,  $r=0.1$  の

次モード  $T_{11}$ , 2次モード  $T_{12}$ , 3次モード  $T_{21}$ , 4次モード  $T_{22}$  および 5次モード  $T_{33}$  の曲率半径比  $\lambda = 1$  および  $-1$  の非線形自由振動曲線を示している。縦軸は振幅の変動成分  $c_1^{11}, c_1^{12}, c_1^{21}, c_1^{22}, c_1^{33}$ , 横軸は無次元振動数  $\omega/\omega_0$  を取っている。

Fig.4およびFig.5の1次モードの非線形自由振動は曲率半径比  $\lambda$  の影響を受けるが, 2次, 3次, 4次および5次モードの非線形自由振動では, 曲率半径比によって固有円振動数が大きく変わり, また硬化バネの特性のみが現れている。運動方程式内の2次の非線形項の単独項が入っていないためと考えられる。また, Fig.2には, 曲率半径比  $\lambda = 1$  のRunge-Kutta-Gill法による数値シミュレーション結果を●印でプロットしている。解析解とシミュレーションとの結果はほぼ一致し, 解析の精度は十分であるといえる。

薄肉偏平殻の曲率半径比  $\lambda$  が正の場合, ドーム形になり, ライズを持つ長方形板と同じ形状である。この曲率半径比  $\lambda = 1$  のドーム形状の薄肉偏平殻は, 偏平な長方形板と同様に, 運動方程式内の2次の非線形項があるため, 1次モードの非線形自由振動は, 形状パラメータ  $r$  の影響を受け軟化・硬化バネの両特性を持つが, 高次モードの非線形自由振動は形状パラメータ  $r$  の影響を受けず, 硬化バネの特性のみを持つ。

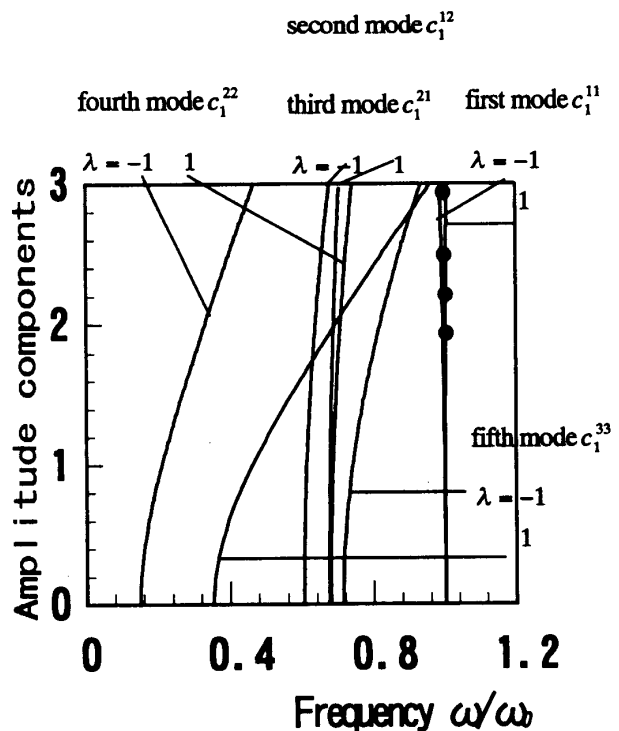


Fig.4 Nonlinear free vibration curves ( $k = 0.001, r = 0.4$ )

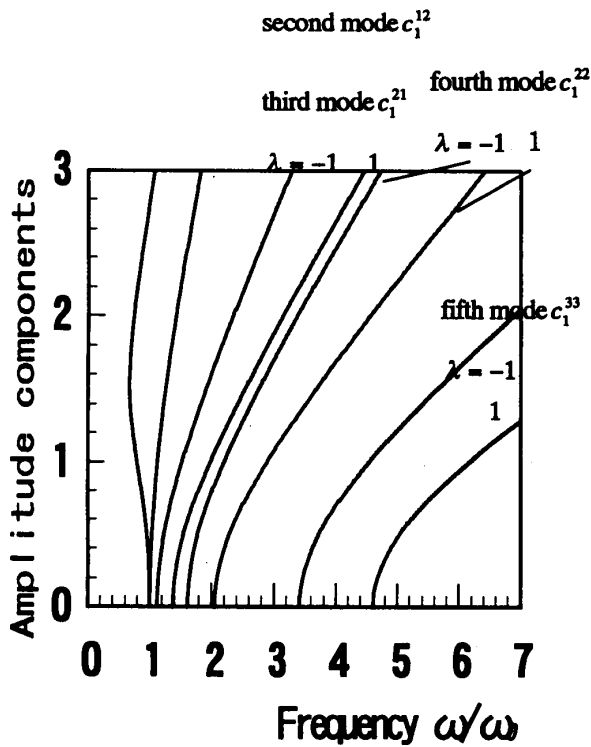


Fig.5 Nonlinear free vibration curve  
( $k = 0.001, r = 0.1$ )

3) 非線形強制振動

Fig.6は曲率半径比 $\lambda=1$ の1次モードの応答曲線を示している。縦軸は振幅成分、横軸は無次元加振振動数 $\Omega/\omega_0$ を取っている。また荷重強度は、無次元加振振動数 $\Omega/\omega_0 = 0$ のとき、主共振の振幅 $c_1^{11}=0.4$ となるように取っている。固有振動数 $\Omega/\omega_0 = 1$ 付近に生じる主共振 $c_1^{11}$ に加え、固有振動数の2倍 $\Omega/\omega_0 = 2$ 付近に $1/2$ 分数調波共振が現れている。主共振および $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$ には、軟化・硬化バネの特性が現れている。

Fig.7は曲率半径比の2自由度系の応答曲線を示している。主共振 $c_1^{11}$ 、 $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$ および4次モードの応答振幅 $c_1^{33}$ が現れている。1次モードの振幅成分と4次モードの振幅成分は別々に現れ、連成の影響が少ない。

4. まとめ

- (1) 薄肉偏平殻の非線形自由振動は、辺長半径比によって特性が変化し、振幅の大きさによって軟化・硬化バネの両特性を持つ。
- (2) 薄肉偏平殻の高次モードの非線形自由振動は、辺長半径比によって固有円振動数が大きく変わり、また硬化バネの特性のみを持つ。
- (3) 薄肉偏平殻の2自由度系の非線形強制振動において、1次モードの振幅成分と高次モードの振幅成分は別々に現れ、連成の影響が少ない。

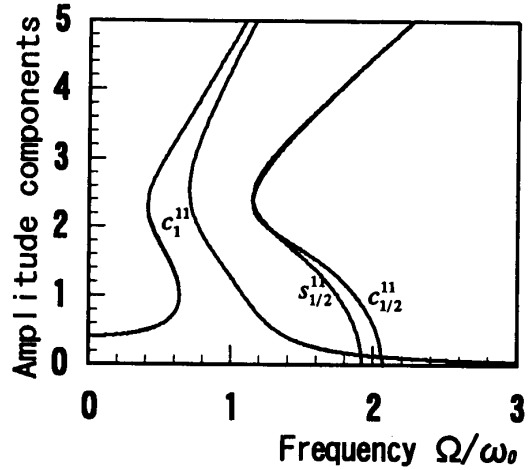


Fig.6 Amplitude response curves  
( $\lambda = 1, \bar{p} = 0.0057, k = 0.01, r = 0.4$ )

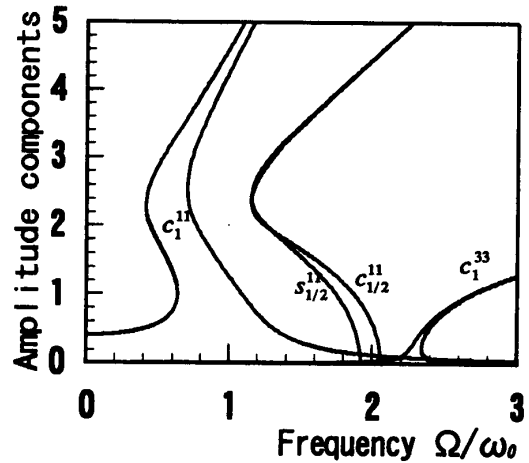


Fig.7 Amplitude response curves  
( $\lambda = 1, \bar{p} = 0.0057, k = 0.01, r = 0.4$ )

- (4) 薄肉偏平殻の曲率半径比が正のドーム形状の場合、ライズを持つ長方形板と形状が一致する。この場合、運動方程式内の2次の非線形項があるため、ライズおよび形状パラメータが非線形自由振動に大きな影響を及ぼし、軟化・硬化バネの両特性を持つ。偏平殻の曲率半径比の影響および境界条件の影響については別途報告する。

参考文献

- 1) Kanazawa, K. and Hangai, Y.: Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Shallow Shells, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.25, pp.75-87, 1977.
- 2) Takahashi, K. and Midou, S.: Multiple-degree-of-freedom Approach to Nonlinear Vibration Properties of a Rectangular Plate with Small Rize, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.48, pp.121-126, 1999.