



Title	変動軸力を受ける片持ちばりの安定を失った後の動的応答
Author(s)	高橋, 和雄; 呉, 慶雄; 中村, 聖三
Citation	長崎大学工学部研究報告 Vol.33(60) p.97-101, 2003
Issue Date	2003-01
URL	http://hdl.handle.net/10069/5250
Right	

This document is downloaded at: 2020-10-20T06:38:42Z

変動軸力を受ける片持ちばりの安定を失った後の動的応答

高橋 和雄*・呉 慶雄**・中村 聖三*

Nonlinear Response of a Cantilever Subjected to Sinusoidally Time-varying Axial Force

By

Kazuo TAKAHASHI*, Qingxiong WU** and Shozo NAKAMURA*

Dynamic unstable regions and amplitudes of the responses of a cantilever subjected to a sinusoidally time-varying axial force are reported in the present paper. The loading conditions at the free end are conservative and follower forces.

Dynamic unstable regions which are obtained by small deflection theory are discussed at first. The amplitudes of unstable motions are obtained by the nonlinear theory of the inextensible beam considering nonlinear curvature. The effect of the static axial forces and damping on the unstable regions and nonlinear responses is also discussed.

1. まえがき

宇宙構造物等に用いられる構造部材では、自由端を有する片持ちばりとしてのモデル化がなされることが多い。この片持ちばりに作用する外力には、周期的な変動軸力が考えられる。片持ちばりに変動軸力が作用すると、特定の振動数領域において係数励振振動が発生する。この振動は不安定振動であり、時間とともに振幅が増大していく^{1) 2)}。

これまでの研究では、変動軸力を受ける片持ちばりの動的安定性が明らかにされ、安定を失った後の動的応答では荷重の作用する方向とたわみによる非線形曲率の影響を考慮する必要があることが報告されている³⁾。しかし、この研究では片持ちばりの最大応答をどの程度の荷重範囲で考えるべきか、静的軸力や減衰力が最大応答に及ぼす影響については明らかにされていない。そこで本論文では、まず静的軸力による片持ちばりの固有振動数の変化を調べ、保有力と非保有力の2つの負荷条件による座屈メカニズムの違いを十分に考慮したうえで、微小振動理論により不安定領域を明らかにする。

次いで、片持ちばりの変形による非線形曲率を3次の項まで考慮した非線形運動方程式を、Galerkin法に

より常微分方程式に変換して、これにRunge-Kutta-Gill法を用いた数値積分を行うことによって最大応答を計算する。また、最大応答に及ぼす静的軸力や減衰力の影響についても明らかにする。

2. 基礎式および境界条件

片持ちばりにおいては、軸方向変位が拘束されていないので、変形に伴う中立軸の伸びは無視することができる。したがって、はりの非線形項は、たわみおよび軸方向変位による非線形曲率で与えられる。

図-1に示すような片持ちばりに対して、外力として静的軸力 P_0 と動的軸力 $P_1 \cos \Omega t$ の和からなる変動軸力 $P = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ が作用する場合を考える。曲率による3次の非線形項まで採用すると、非線形振動の

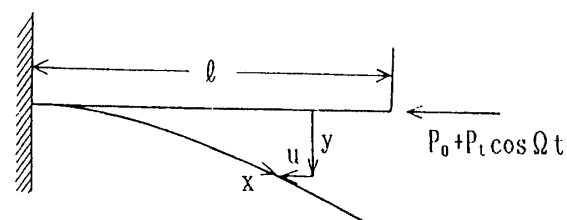


図-1 座標系

平成14年10月25日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

運動方程式は次式のようになる³⁾。

$$L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \left(2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 E ：ヤング率、 I ：断面二次モーメント、 A ：断面積、 Ω ：動的軸力の円振動数、 w ：単位体積重量、 g ：重力加速度

荷重の作用には図-2に示すように、はりのたわみに関係なく作用方向が一定である保存力 (CF-C) と、荷重の作用方向がはりのたわみによって接線方向に変化して作用する従動力 (CF-F) の2つを考える。

保存力と従動力に対する境界条件は、次のように与えられる。

(a) 保存力の場合

$$x=0 \text{ のとき} : y=0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$x=l \text{ のとき} : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (2-a)$$

(b) 従動力の場合

$$x=0 \text{ のとき} : y=0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$x=l \text{ のとき} : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad (2-b)$$

3. 解法

式(1)の一般解を次のように仮定する。

$$y = l \sum_{i=1} X_i(x) \cdot T_i(t) \quad (3)$$

ここに、 l ：スパン長、 $T_i(t)$ ：未知の時間関数、 $X_i(x)$ ：境界条件を満たす座標関数

(a) 保存力の場合

式(2-a)の境界条件を満たす関数として、座屈波形を用いて近似したはりの曲げ振動の固有振動形を用いる。

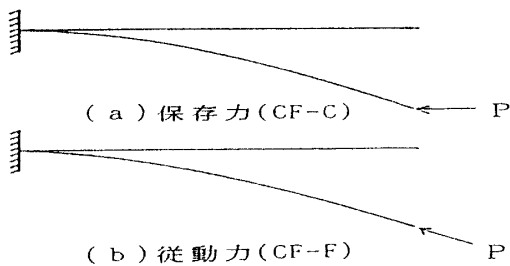


図-2 負荷条件の違い

$$X_i = \sum_{j=1} a_j \left(1 - \cos \frac{(2j-1)}{2} \pi \xi \right) \quad (4-a)$$

ここに、 $\xi = x/l$ 、 a_j ：定数

(b) 従動力の場合

式(2-b)の境界条件を満たす関数として、片持ちばりの曲げ振動の固有振動形を用いる。

$$X_i = \cos \lambda_i \xi - \cosh \lambda_i \xi + A_i (\sin \lambda_i \xi - \sinh \lambda_i \xi) \quad (4-b)$$

ここに、 $A_i = (\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i) / (\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i)$ 、 $\lambda_i^4 = l^4 w A \omega_i^2 / EI g$

式(3)は仮定された解であるため、式(1)の厳密解ではない。したがって、式(3)を式(1)に代入しても右辺は零にならない。そこで、これに微分方程式の近似解法である Galerkin 法を適用する。すなわち、

$$\int_0^l L(y) X_i d\xi = 0 \quad (5)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots$

式(5)において基準関数の直交性を考慮し、かつ無次元化を行うと、次式のような時間に関する連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_i + \alpha_i^2 T_i + (\bar{P}_0 + \bar{P}_i \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{j=1} k_{ji} T_j$$

$$+ \sum_{j=1} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \Gamma_{mji} T_j T_m T_n = 0 \quad (6)$$

ここに、 $\tau = \omega_1 t$ 、 $\bar{P}_0 = P_0 / P_{cr}$ 、 $\bar{P}_i = P_t / P_{cr}$ 、 $P_{cr} = \epsilon^2 EI / l^2$ 、 $\lambda_i^4 = l^4 w A \omega_i^2 / EI g$ 、 $\alpha_i^2 = (\lambda_i / \lambda_1)^4$ 、 $\delta_i = \int_0^1 X_i^2 d\xi$ 、 $k_{ji} = \epsilon^2 \beta_{ji} / \lambda_i^4 \delta_i$ 、 $\Gamma_{mji} = \zeta_{mji} / \lambda_i^4 \delta_i$ 、 $\zeta_{mji} = \int_0^1 (2X_m' X_n'' X_j'' + X_m'' X_n' X_j'') X_i d\xi$

(a) 保存力の場合

$$\beta_{ji} = - \int_0^1 X_i' X_j' d\xi$$

(b) 従動力の場合

$$\beta_{ji} = - \int_0^1 X_i'' X_j'' d\xi$$

(1) 動的安定解析

動的安定解析は微小振動の範囲で考えれば十分であるため、式(6)において非線形項を無視すれば、係数励振振動の運動方程式が得られる。

$$[I] \{\dot{T}\} + [A] \{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_i \cos \bar{\omega} \tau) [B] \{T\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $[I]$ ：単位行列、 $[A] = \text{diag}(\alpha_i^2)$ 、 $[B] = [K_{ji}]$ 、 $\{T\} = \{T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n\}^T$

式(7)の一般解は次のように仮定することができる。

$$\{T\} = e^{s\tau} \left\{ \frac{1}{2} \{b_0\} + \sum_{s=1} \{ \{a_s\} \sin(s\bar{\omega}\tau) + \{b_s\} \cos(s\bar{\omega}\tau) \} \right\} \quad (8)$$

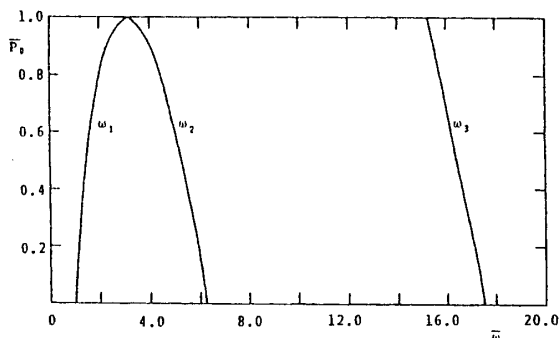


図-3 静的軸力による固有振動数の変化 (従動力)

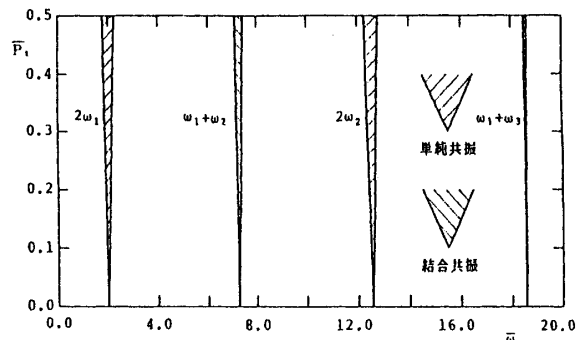


図-5 不安定領域 (保存力, $\bar{P}_0=0.0$)

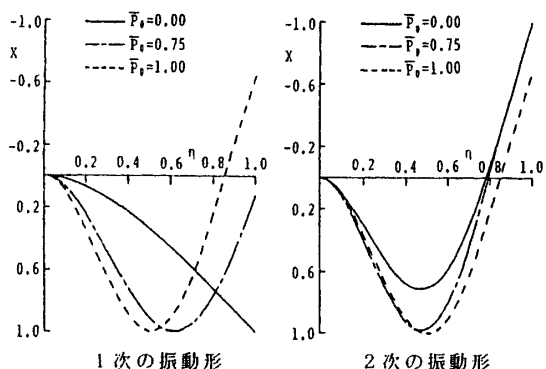


図-4 片持ちばりの固有振動形 (従動力)

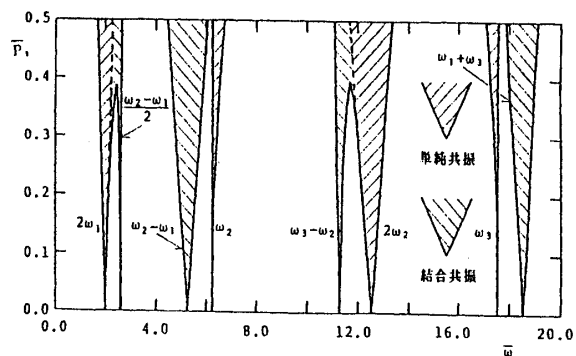


図-6 不安定領域 (従動力, $\bar{P}_0=0.0$)

ここに、 λ : 定数, $\{b_0\}$, $\{a_s\}$, $\{b_s\}$: 時間に無関係なベクトル

式(8)を式(7)に代入して、調和バランス法を適用すると、未知のベクトルを求めるための同次方程式が得られる。これは2倍サイズの固有値問題に変換して解くことができる。得られた固有値の実数部の値が全て負ならば安定になり、1つでも正ならば不安定となる。 \bar{P}_0 , \bar{P}_i および $\bar{\omega}$ からなるパラメータの各組合せに対して、系の安定性を判定することにより不安定領域を求めることができる。

(2) 時間応答解析

動的安定解析により得られる不安定領域の中心振動数に対して、初期条件として微小振動の範囲の外乱を与えたときに、単純共振および結合共振の不安定振動が時間とともにどのように成長していくかを、式(6)の曲率による3次の非線形項まで考慮して調べる。

式(6)の厳密解を求めることは一般には不可能である。そこで、本論文では式(6)を1階の連立常微分方程式に変換して、Runge-Kutta-Gill法を用いた数値積分により時間応答解析を行う。また、安定を失った後の応答は単純共振が1つの固有振動形、結合共振が2つの固有振動形を持つ振動なので、最低2自由度系の取り扱いが必要である。そこで、本研究では2自由度を採用

して計算を行う。なお、振動の初期条件として、微小振動の範囲の外乱 ($T_i, T_j \ll 1$) を与える。

4. 数値結果

(1) 静的軸力による固有振動数の変化

保存力が作用する場合には、静的軸力の増大とともに固有振動数が小さくなる。そして、1次の固有振動数が零になるときの荷重が座屈荷重となる。

一方、従動力の場合は図-3のように2, 3次の固有振動数は小さくなるが、1次の固有振動数は大きくなる。そして、1次と2次の固有振動数が一致し重根を持つ荷重が座屈荷重となる⁹⁾。また静的軸力が作用するとき、1次と2次の振動形は図-4のようになる。 \bar{P}_0 が大きくなるにしたがって、1次と2次の固有振動形が近づいて行き、 $\bar{P}_0 = 1.0$ のときに一致する。

(2) 不安定領域

係数励振振動による不安定振動では、励振振動数の違いにより単純共振 $\bar{\omega} = \omega_i/m$ ($m = 1, 2, \dots$) と和形もしくは差形の結合共振 ($\bar{\omega} = (\omega_i \pm \omega_j)/m$ ($m = 1, 2, \dots$, +: 和形, -: 差形)) が存在する。このうち $m = 1$ のときの不安定領域を主不安定領域といい、 $m \geq 2$ のときのものを副不安定領域という¹⁾。また、発生する不安定領域の種類は、式(6)の第3項目の x_{ji}

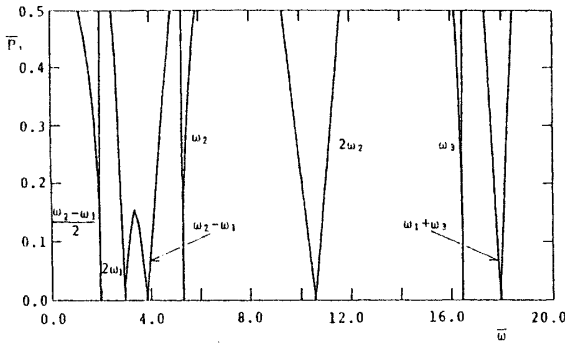


図-7 不安定領域に及ぼす静的軸力の影響 (従動力, $\bar{P}_0=0.5$)

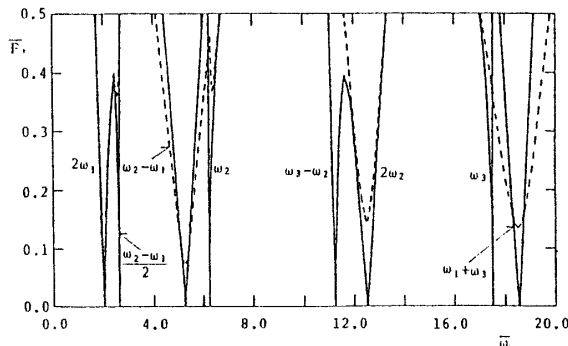


図-8 不安定領域に及ぼす減衰力の影響 (従動力, $h=0.01$)

と x_{ij} の符号によって決まる。つまり x_{ji} と x_{ij} が同符号のときには和形の結合共振が存在し、異符号のときには差形の結合共振が存在する。図において、縦軸は変動軸力を座屈荷重で無次元化した無次元励振振幅 $\bar{P}_1 = P_1/P_{cr}$ で座屈荷重の違い ($P_{cr} = \epsilon^2 EI/l^2$: 保存力では $\epsilon = \pi/2$, 従動力では $\epsilon = 4.4777$) により、保存力の約8倍の変動軸力が従動力の方に作用している。横軸には励振振動数を片持ちばりの1次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数 $\bar{\omega} = \Omega/\omega_1$ をとり、1次の固有振動数の20倍までの振動数領域で計算する。

(a) 負荷条件 負荷条件の影響を見るために $\bar{P}_0 = 0.0$ の保存力と従動力が作用した場合の不安定領域はそれぞれ図-5, 6のようになる。保存力の場合は、単純共振と和形の結合共振とが存在し、単純共振の方が結合共振よりも広い不安定領域となっている。従動力の場合には、単純共振に加えて1次と3次の和形の結合共振 ($\omega_1 + \omega_3$) が存在し、さらに1次と2次および2次と3次がそれぞれ差形の結合共振 ($\omega_2 - \omega_1$, $\omega_3 - \omega_2$) が存在する。

(b) 静的軸力 静的軸力 $\bar{P}_0 = 0.5$ が作用する従動力の場合の不安定領域を図-7に示す。不安定領域の幅は静的軸力が無いときよりも広くなり、1次の単純共振の不安定領域だけが低い振動数の方に移動している。

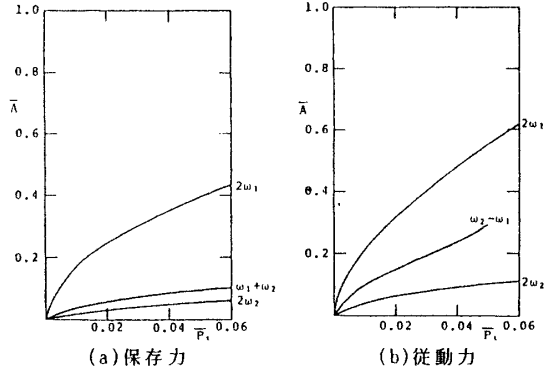


図-9 最大応答と励振振幅との関係

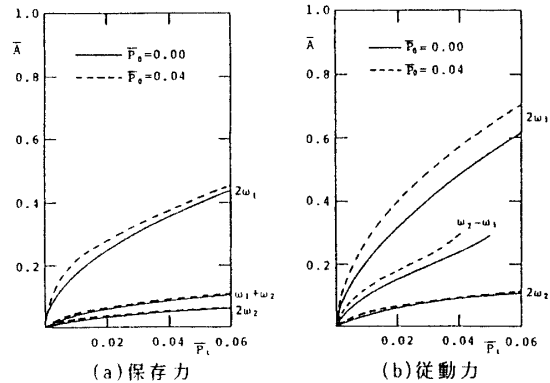


図-10 静的軸力の最大応答に及ぼす影響

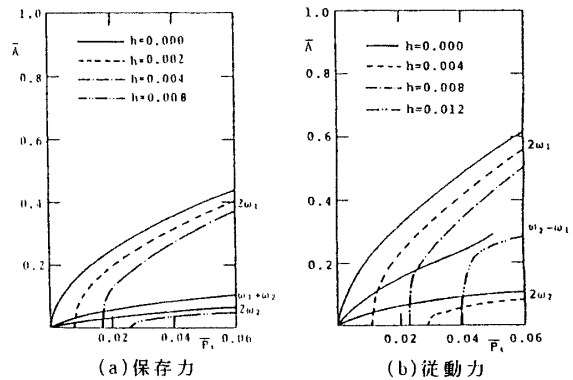


図-11 減衰力の最大応答に及ぼす影響

(c) 減衰力 減衰定数 $h = 0.01$ が存在する従動力の場合の不安定領域は図-8のようになる。高次の不安定領域ほど減衰力の影響が著しくなっている。また、減衰力が作用すると全ての単純共振で不安定領域は狭くなる。しかし、 $\omega_2 - \omega_1$ と $\omega_3 - \omega_2$ のように差形の結合共振の一部では、減衰力の大きさによって不安定領域が拡大する脱安定化効果がみられる。

(3) 最大応答

時間応答解析により得られる振動の最大振幅をはりの長さで割った値が無次元最大応答である。このような最大応答 \bar{A} を縦軸にとり、変動軸力を座屈荷重で無次元化した励振振幅 \bar{P}_1 を横軸にして、最大応答が適

当な大きさになるような範囲でこの2つの関係を調べる。

(a) 負荷条件 保存力と従動力が作用する場合の最大応答をそれぞれ図-9に示す。保存力と従動力のどちらが作用した場合でも、最大応答は不安定領域の幅に関係なく、主不安定領域の低い振動数の順に大きくなっていく。また、両者とも座屈荷重の数%の荷重で、はりの長さの40~60%の最大応答になっている。つまり、片持ちばりでは非線形項を考慮しても荷重が大きくなると、最大応答の発散を押さえることはできない。

(b) 静的軸力 片持ちばりに静的軸力が作用する場合の最大応答は図-10のようになる。静的軸力によって最大応答は増加している。また、その影響は低次の自由度ほど大きい。

(c) 減衰力 減衰力が存在するときの最大応答は、図-11のようになる。従動力、保存力ともに励振振幅が小さいときにのみ、減衰力の影響が効いている。しかし、励振振幅が大きくなると、負荷条件に関係なく減衰力の影響は小さくなり、片持ちばりでは減衰力を考慮しても安定を失った後の動的応答を押さえることができないことがわかる。

5. まとめ

本論文では、保存力と従動力の2種類の変動軸力が作用する場合の片持ちばりについて、動的安定解析により不安定領域を求め、安定を失った後の動的応答を曲率による3次の非線形項まで考慮して調べた。

(1) 不安定領域には、保存力の場合に単純共振および和形の結合共振が存在し、従動力の場合はこれに加えて差形の結合共振も存在する。静的軸力には従動力の1次の固有振動数を除いて、はりの固有振動数を下げ、不安定領域を移動させ広げる効果がある。減衰力は、高次の不安定領域ほど狭くする効果があるが、一部の結合共振に対しては不安定領域を広くする脱安定化効果がみられる。

(2) 安定を失った後の動的応答では、負荷条件によらず最大応答は低次の振動ほど大きくなり、非線形項を考慮しても発散を押さえることができない。静的軸力が作用すると低次のものほど最大応答は増大する。減衰力が作用する場合、励振振幅が小さいときにのみ最大応答が著しく小さくなり、励振振幅が大きいと最大応答の発散を押さえることはできない。

参考文献

- 1) 夏秋・高橋・小西：構造物の動的安定性—そのアプローチ手法と橋梁構造への応用—, 片山技報, Vol. 8, pp. 1~6, 1988.
- 2) 夏秋・高橋：構造部材の非線形振動—非線形振動への誘い—, 片山技報, Vol. 9, pp. 12~15, 1989.
- 3) 高橋・手塚・其田：変動軸力を受けるはり部材の安定を失った後の動的応答, 構造工学論文集, Vol. 37 A, pp. 65~72, 1991. 3.
- 4) 川井：座屈問題解析, 培風館, pp. 35~42, 1974.